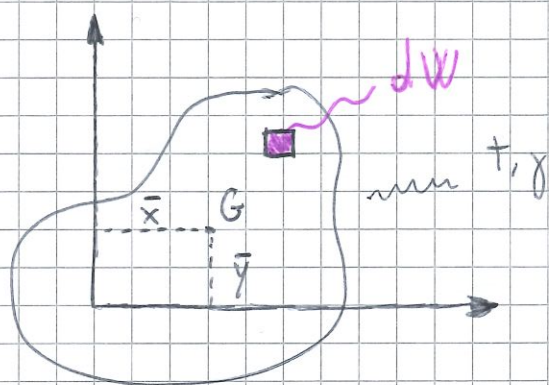


BARICENTRO

Iniziamo questo corso di scienza delle costruzioni e statica proprio dal **baricentro** (G) detto anche "center of gravity". In questo corso useremo sempre i sistemi di riferimento perciò utilizzeremo ancora una volta le notazioni S.R., S.R.B., S.R.N.B.

Innanzitutto chiarifichiamo W = peso [N], t = spessore [m],
 γ = peso per unità di volume [N/m^3]; osserviamo un corpo ora in un sistema di riferimento non baricentrico.



Facciamo un paio di calcoli tramite integrazione dell'infinitesimo di peso:

$$W = \int dW \begin{cases} W\bar{x} = \int x dW \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x dW}{W} \\ W\bar{y} = \int y dW \Rightarrow \bar{y} = \frac{\int y dW}{W} \end{cases}$$

Ora sappiamo che $dW = \gamma t dA$ il che ci porta ai seguenti calcoli che sfoceranno nel **momento statico** ($S_{...}$) rispetto all'asse opposto di quello usato per trovarlo

$$W = \int dW = \int \gamma t dA = \gamma t \int dA = \gamma t A$$
$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x \gamma t dA}{\gamma t A} = \frac{\cancel{\gamma t} \int x dA}{\cancel{\gamma t} A} = \frac{\int x dA}{A}$$

Abbiamo così ricavato le coordinate del baricentro e il momento:

$$S_y = \int x dA$$
$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{S_y}{A}$$

$$S_x = \int y dA$$
$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{S_x}{A}$$

si nota subito che il momento statico dipende solo da delle considerazioni geometriche sul solido di lavoro

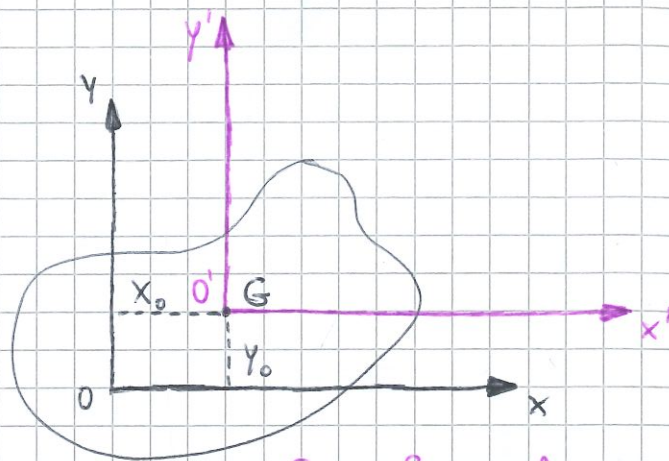
Vediamo ora le correlazioni con i sistemi di riferimento "spostati" dalla loro posizione iniziale tramite azioni:

TRASLAZIONE

Osserviamo il caso di un SRB che viene traslato in un punto generico del solido come in figura

$$x' = x - x_0$$

$$y' = y - y_0$$



Troviamo i nuovi momenti statici:

$$S_{y'} = \int x' dA = \int (x - x_0) dA = S_y - x_0 A$$

$$S_{x'} = \int y' dA = \int (y - y_0) dA = S_x - y_0 A$$

\Rightarrow

$$S_{x'} = S_x - y_0 A$$

$$S_{y'} = S_y - x_0 A$$

Adesso poniamoci la domanda, se esistono assi cartesiani coordinati tali che $S_{x'} = 0$ e $S_{y'} = 0$? Proviamo e vedremo che

$$S_{x'} = 0$$

$$S_x - y_0 A = 0$$

\Leftrightarrow

$$S_{y'} = 0$$

$$S_y - x_0 A = 0$$

\Leftrightarrow

$$y_0 = \frac{S_x}{A} = y_G$$

$$x_0 = \frac{S_y}{A} = x_G$$

ne deriva che il MOMENTO STATICO rispetto al baricentro è nullo; l'unità di misura di questa grandezza è $[m^3]$ e può essere sia positivo sia negativo.

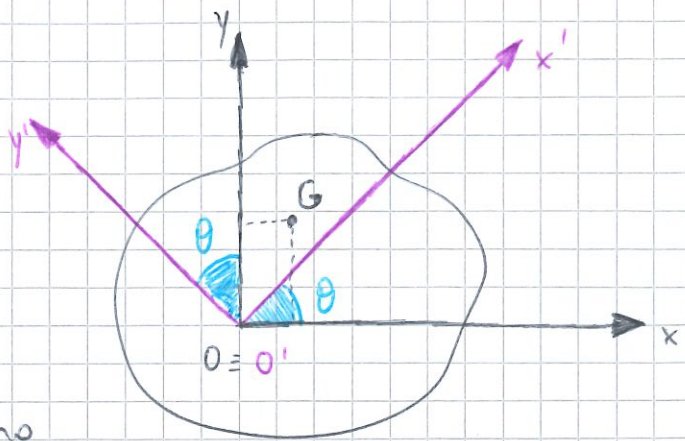
Come giunta a conclusione la figura soprastante è posta ad assi x', y' baricentrici pertanto il momento statico in G è zero

ROTAZIONE

Guardiamo ora per il caso di un SRNB ruotato di angolo θ e analizziamo se esiste un modo per dire che $S_{x'} = 0$ e $S_{y'} = 0$.
Iniziamo definendo le coordinate

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$



Proviamo a calcolare e vedremo

$$S_{x'} = \int_A y' dA = \int_A (-x \sin \theta + y \cos \theta) dA = \dots = -\sin \theta S_y + \cos \theta S_x$$

$$S_{y'} = \int_A x' dA = \int_A (x \cos \theta + y \sin \theta) dA = \dots = \cos \theta S_y + \sin \theta S_x$$

Giungiamo alla seguente ponendoli uguali a zero:

$$\begin{cases} S_{x'} = 0 \Rightarrow \tan \theta = \frac{S_x}{S_y} \\ S_{y'} = 0 \Rightarrow \tan \theta = -\frac{S_x}{S_y} \end{cases} \Rightarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

Ne deriva che la rotazione NON produce MOMENTO STATICO Nullo se si considera un SRNB, ovvero non centrato in "G"

Scriviamo ora le coordinate del baricentro di un rettangolo e di un triangolo rettangolo, ovvero: (lati a, b e h, b)

$$x_{G_{\text{rett}}} = \frac{1}{2} b$$

$$y_{G_{\text{rett}}} = \frac{1}{2} a$$

$$x_{G_{\text{trg}}} = \frac{2}{3} b$$

$$y_{G_{\text{trg}}} = \frac{1}{3} h$$

MOMENTI DI INERZIA

I momenti di inerzia riguardano la distribuzione della massa o dell'area di una sezione rispetto ad un asse e vengono utilizzati per analizzare la resistenza di una sezione soggetta a forze esterne, come flessione e torsione.

Consideriamo per primo il momento di inerzia rispetto a un asse x o y e scriviamo le formule:

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

mentre il momento polare di inerzia, può essere scritto in due modi ovvero in termini di somma o in termini integrali. Consideriamo "r" la distanza radiale di un punto dalla posizione centrale (centroide)

$$I_p = I_x + I_y$$

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

Vediamo ora il momento di inerzia per alcune sezioni comuni come rettangolo, cerchio, triangolo rettangolo e anello circolare

• RETTANGOLO: $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_y = \frac{hb^3}{12}$ (SRB)

• CERCHIO: $I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$, $I_p = \frac{\pi r^4}{2}$ (SRB)

• TRIANGOLO RETT.: $I_x = \frac{bh^3}{36}$, $I_y = \frac{hb^3}{36}$ (SRNB)

• ANELLO CIRCOLARE: $I_x = I_y = \frac{\pi (r_o^4 - r_i^4)}{4}$, $I_p = \frac{\pi (r_o^4 - r_i^4)}{2}$ (SRB)

TEOREMA DI HUYGENS - STEINER

È detto teorema degli assi paralleli e permette di calcolare il momento di inerzia rispetto a un SRNB a distanza "d" dal centroide:

$$I_{\text{asse parallelo}} = I_{\text{centroide}} + Ad^2$$

STATICA DEL PUNTO MATERIALE (2D)

In questo capitolo ci occuperemo di punti materiali liberi di muoversi: prima nel piano e poi nello spazio. Andremo a rimpiazzare più forze con la risultante e analizzeremo l'equilibrio.

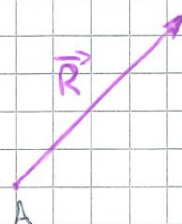
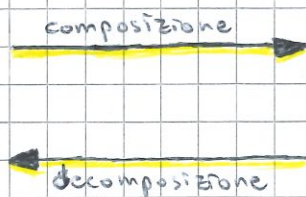
POSTULATI DELLA STATICA P.TO MATERIALE

- I la variazione dello stato di quiete o di moto di un punto materiale (libero o vincolato), prodotta da un sistema di forze che vengano tutte simultaneamente applicate al, o rimosse dal, punto stesso, può essere ottenuta sostituendo le forze con una unica, detta **risultante** del sistema di forze.
- II la risultante di due forze applicate si ottiene applicando la regola del PARALLELOGRAMMA
- III la risultante di un sistema di più di due forze si ottiene per applicazioni successive della regola precedente

LA PRIMA OPERAZIONE INVARIANTIVA

Le varie combinazioni vettoriali della regola del PARALLELOGRAMMA si possono condensare affermando che:

"1° operazione invariantiva: lo stato di quiete o il moto di un punto materiale è invariante per **composizione** o **decomposizione** di più forze agenti nel medesimo punto."



EQUIVALENZA CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

Due sistemi di forze applicati a un punto materiale si dicono **equivalenti** se, applicati o rimossi a/dal lo stesso punto materiale, producono gli stessi effetti meccanici.

La **condizione necessaria e sufficiente (CNS)** per l'equivalenza di due sistemi di forze applicati allo stesso punto materiale è che abbiano la stessa risultante, in senso vettoriale:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$$

Invece un sistema di forze agente su un punto materiale si dice in **equilibrio** quando applicato o rimosso dal punto non ne altera lo stato di quiete o di moto.

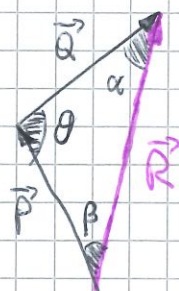
La **CNS** per tale equilibrio è la seguente

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

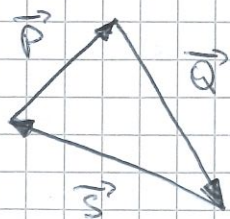
Come per la geometria Euclidea anche qui potremo usare la legge del seno e la legge del coseno

• **COSENO:** $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos \theta$

• **SENO:** $\frac{\sin \theta}{R} = \frac{\sin \alpha}{P} = \frac{\sin \beta}{Q}$



Inoltre indichiamo un metodo per trovare velocemente una risultante nulla per dei sistemi di 3 o + forze:



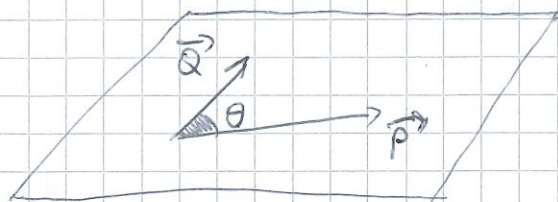
"poligono chiuso" = $\mathbf{R} = \mathbf{0}$

OPERAZIONI TRA VETTORI

Preliminarmente all'analisi della statica del corpo rigido, vengono introdotte le operazioni tra vettori che sono alla base del calcolo del momento di una forza rispetto a un punto e rispetto a un asse.

- **Prodotto scalare:** $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta$ con nullo se $\vec{Q} \perp \vec{P}$
→ commutativo, distributivo, non associativo

$$\Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

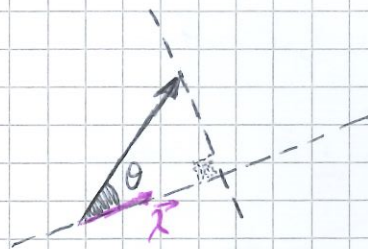


- **Modulo di un vettore:** $\vec{P} \cdot \vec{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$

- **Angolo tra vettori:** $\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$

- **Proiezione vettore su asse dato:**

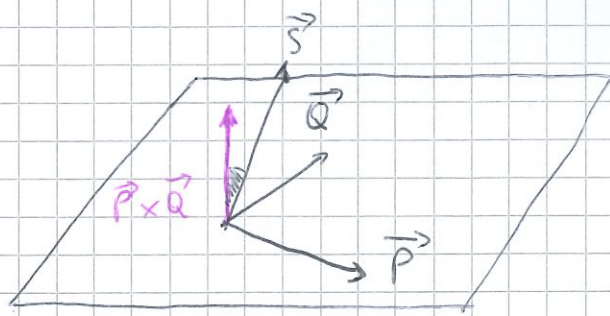
$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{AB} &= \vec{P} \cdot \vec{x} = P \cdot 1 \cdot \cos \theta \\ &= P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \end{aligned}$$



- **Triplo prodotto misto:** $\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q})$

in breve si può
usare anche per
calcolare il volume
del parallelepipedo.

$$\begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$



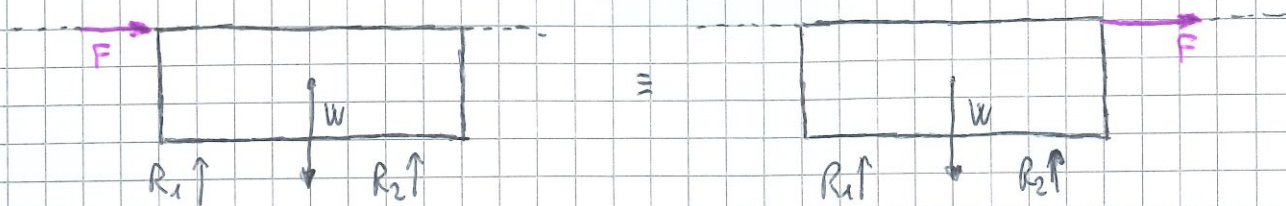
Se complementi questo prodotto è nullo

Passiamo ora alla statica del corpo rigido, ovvero un insieme di punti materiali dove le mutue distanze non cambiano.

Analizzeremo le forze e i punti di applicazione per poi passare a TRASLAZIONI e ROTAZIONI attorno ad un asse

LA SECONDA OPERAZIONE INVARIANTE

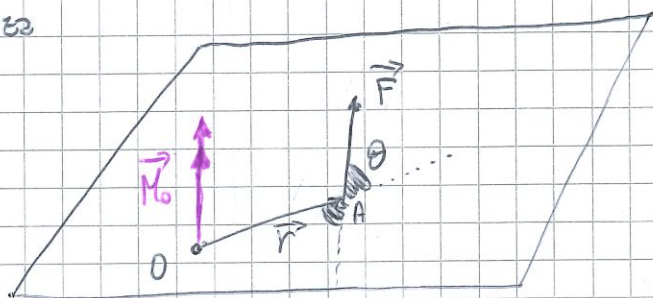
Trasferire una forza lungo la propria retta d'azione non altera lo stato di quiete/moto del corpo rigido \Rightarrow principio di Trasmissibilità



MOMENTO DI UNA FORZA

Vediamo ora il momento di una forza rispetto a un punto detto "Polo":

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

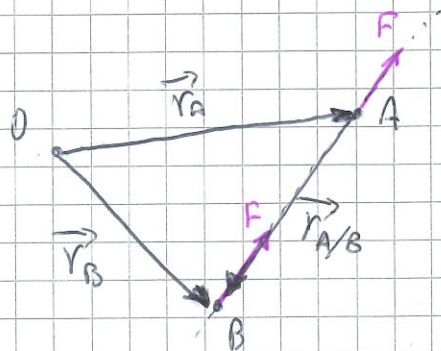


$$\Rightarrow M_o = r F \sin \theta = F \cdot b \quad (b = \text{braccio})$$

$$\vec{M}_O = \vec{0} \iff \theta = 0^\circ \Rightarrow \sin \theta = 0 \text{ e quindi } \vec{r} \parallel \vec{F}$$

Come visto nella II^a operazione invariante

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{r}_B \times \vec{F} = (\vec{r}_A + \vec{r}_{A/B}) \times \vec{F} \\ &= \vec{r}_A \times \vec{F} + 0 \end{aligned}$$



Vediamo ora la condizione di equivalenza di 2 forze, CNS:

$$1) \vec{F} = \vec{F}' \quad \text{e} \quad \text{poi} \quad 2) \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}') \quad \text{con } O \text{ p.to arbitrario}$$

TEOREMA DI VARIGNON

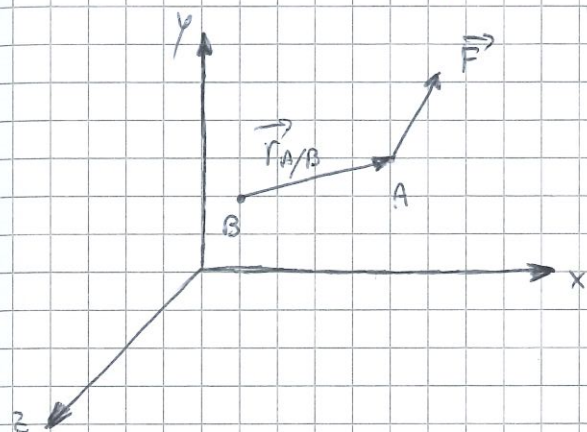
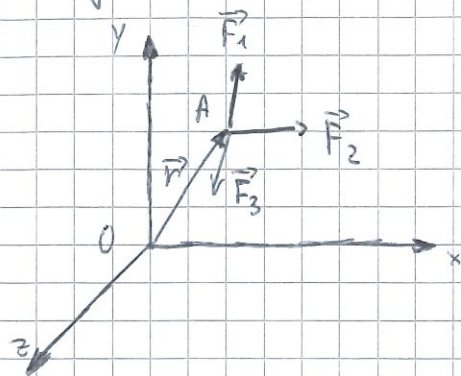
Questo importante teorema dice che il momento di un sistema di vettori, rispetto a un punto generico P è uguale al momento della risultante rispetto allo stesso punto.

Consideriamo un SR centrato nell'origine e poi uno in un punto "B"

$$\vec{r} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



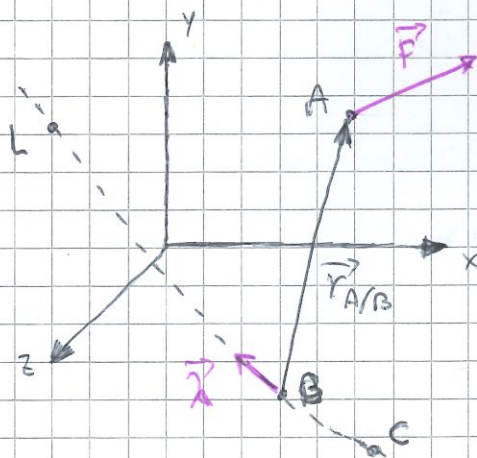
$$\vec{r}_{A/B} = (x_A - x_B) \vec{i} + (y_A - y_B) \vec{j} + (z_A - z_B) \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x_A - x_B) & (y_A - y_B) & (z_A - z_B) \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Vediamo ora invece il momento rispetto a un asse

$$M_{BL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_B = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r}_{A/B} \times \vec{F}) = M_{CL}$$

$$\Rightarrow M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ (x_A - x_B) & (y_A - y_B) & (z_A - z_B) \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

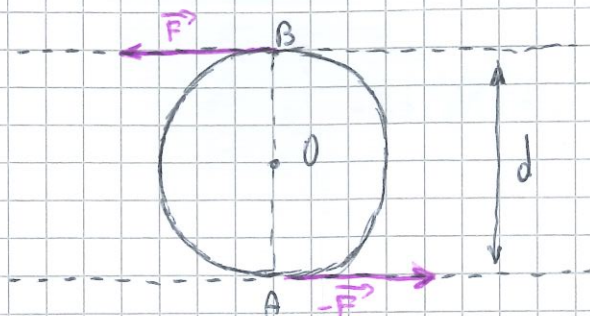


STATICA DEL CORPO RIGIDO

Ricordando le nozioni sul momento possiamo ora andare a definire quella che è la **coppia** di forze: ovvero due forze che hanno stesso modulo, rette d'azione // e verso opposto.

Queste avranno $\vec{R} = 0$ e:

$$M_0 = F \frac{d}{2} + F \frac{d}{2} = Fd$$



Definiamo "free vector"

un "vettore libero" indipendente da O allora il vettore \vec{M} si può applicare in un punto qualsiasi con stesso effetto.

Parleremo poi di **coppie equivalenti** dicendo che due di queste potranno essere tale se " $F_1 d_1 = F_2 d_2$ ", se le coppie appartengono a due piani paralleli e se hanno la stessa tendenza di rotazione nella stessa direzione.

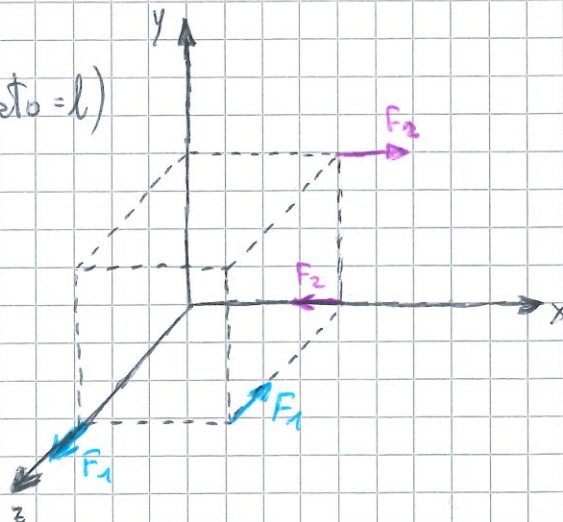
Due sistemi di forze si dicono equivalenti se hanno lo stesso effetto meccanico su un corpo rigido, perciò se possono essere ottenuti uno dall'altro attraverso le due operazioni invariantive:

- composizione e scomposizione di più forze concorrenti nello stesso punto
- scorrimento di una forza lungo la sua linea d'azione

Vediamo nella figura a lato che: (cubo lato=l)

$$\vec{M}_1 = F_1 \cdot l \vec{j}$$

$$\vec{M}_2 = -F_2 \cdot l \vec{k}$$



$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = F_1 l \vec{j} - F_2 l \vec{k}$$

Ogni sistema di forze può essere sostituito da un sistema equivalente di una forza in un punto O + una coppia

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

e se possono essere ridotti a tale semplificazione si chiameranno sistemi di forze EQUIVALENTI.

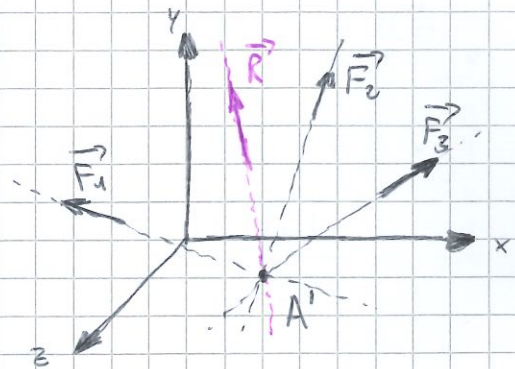
Se la sommatoria $\vec{R} = \vec{0}$ il sistema equivalente coincide col solo contributo della coppia \vec{M}_O

Infine se $\vec{R} \perp \vec{M}_O$ si può applicare la "riduzione ad un punto" ovvero ridurre il sistema ad una sola forza che agisce lungo la retta d'azione:

• Forze concorrenti

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

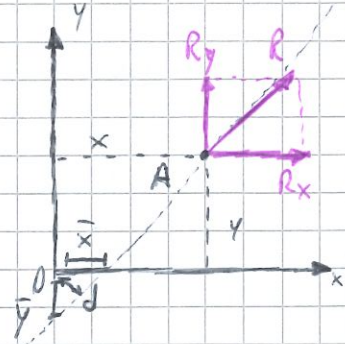
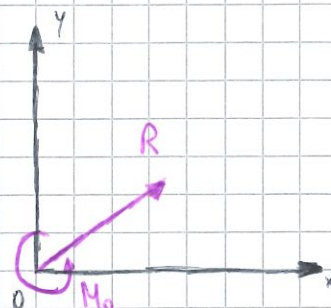
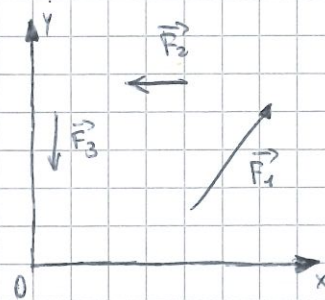
$$\vec{R} \perp \vec{M}_O$$



• Forze complanari

$$d = \frac{|M_O|}{|R|}$$

$$\Rightarrow y = \frac{R_y}{R_x} x - \frac{M_O}{R_x}$$



$$\hookrightarrow \text{se } x=0 \rightarrow \bar{y} = -\frac{M_O}{R_y}$$

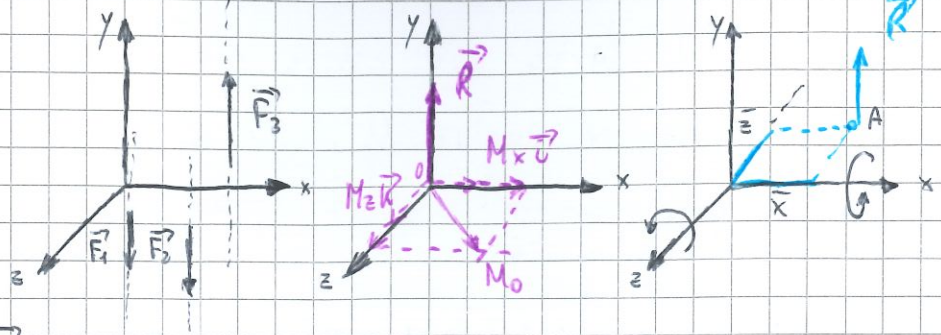
$$\hookrightarrow \text{se } y=0 \rightarrow \bar{x} = \frac{M_O}{R_x}$$

Forze parallele

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & R_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\bar{z} R_y \vec{i} + \bar{x} R_y \vec{k} =$$

$$= M_x \vec{i} + M_z \vec{k}$$



$$M_x = -\bar{z} R_y$$

$$M_z = \bar{x} R_y$$

$$\bar{z} = -M_x / R_y$$

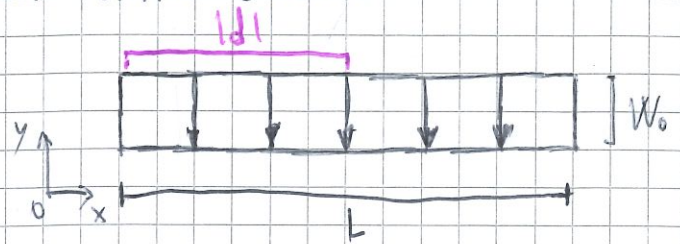
$$\bar{x} = M_z / R_y$$

CARICHI DISTRIBUITI SU TRAVI

Analizziamo il caso del carico distribuito uniformemente

$$w(x) = w_0 = \text{costante} :$$

$$|R| = \int_0^L dw = \int_0^L w_0 dx = w_0 L$$



$$|M_0| = \int_0^L x dw = \int_0^L w_0 x dx = \frac{1}{2} w_0 L^2$$

$$\Rightarrow |l| = \frac{|M_0|}{|R|} = \dots = \frac{1}{2} L$$

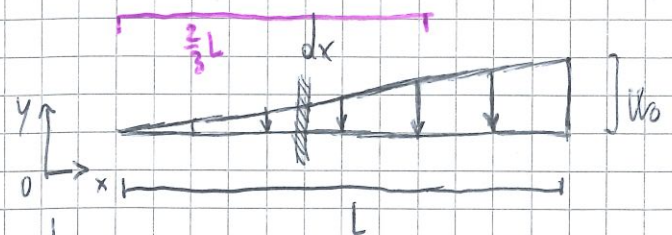
Se invece il carico è distribuito linearmente si avrà

$$w(x) = w_0 \cdot \frac{x}{L}$$

$$\Rightarrow dw = \frac{w_0}{L} x dx$$

$$|R| = \int_0^L dw = \int_0^L \frac{w_0}{L} x dx = \frac{1}{2} w_0 L$$

$$|M_0| = \int_0^L x dw = \int_0^L \frac{w_0}{L} x^2 dx = \frac{1}{3} w_0 L^2$$



$$|l| = \frac{|M_0|}{|R|} = \dots = \frac{2}{3} L$$

VINCOLI

Vediamo ora quando un sistema di forze è in equilibrio tramite i seguenti postulati:

- 1 Se nessuna forza \rightarrow quiete
- 2 Se una forza \rightarrow no quiete
- 3 Se due forze \rightarrow quiete \Leftrightarrow stessa retta d'azione, modulo, verso opposto

Vediamo ora il postulato dei vincoli addizionali

"Lo stato di equilibrio di un corpo non viene modificato dall'applicazione di vincoli addizionali"

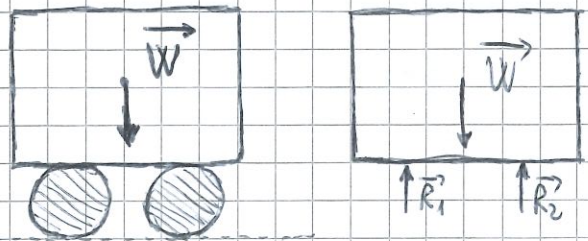
CORPI RIGIDI VINCOLATI

I vincoli sono collegamenti che limitano gli spostamenti e/o le rotazioni sia interni che esterni. Possono essere:

- PUNTUALI: riducibili ad un punto, in pratica tutti, no biella
- LISCI: ovvero privi di attrito, solo in condizioni ideali
- BILATERI: impediscono il moto in entrambe le direzioni di vincolo come quello orizzontale (destra/sinistra) o il momento che non avverrà in nessun modo (orario/antiorario)
- PERFETTI: non cedono, non crollano e sono stabili

Vediamo il postulato delle reazioni vincolari:

"Non si altera l'equilibrio se si sostituiscono ai vincoli opportune forze (reazioni vincolari)"



Queste reazioni hanno direzione e verso opposto alla rotazione/spostamento impedito

Analizziamo ora i GDL ovvero i gradi di vincolo: per fare ciò dovremo passare dalla CNS dell'equilibrio del corpo rigido vincolato

$$\vec{R} = \vec{0} : \vec{R}^{(A)} + \vec{R}^{(R)} = \vec{0} ; \vec{M}_0 = \vec{0} : \vec{M}_0^{(A)} + \vec{M}_0^{(R)} = \vec{0}$$

e vediamo l'equilibrio alla traslazione e alla rotazione (attive / reattive)

$$\begin{aligned} \bullet \sum (F_x^{(A)} + F_x^{(R)}) &= 0 & \bullet \sum (M_x^{(A)} + M_x^{(R)}) &= 0 \\ \bullet \sum (F_y^{(A)} + F_y^{(R)}) &= 0 & \bullet \sum (M_y^{(A)} + M_y^{(R)}) &= 0 \\ \bullet \sum (F_z^{(A)} + F_z^{(R)}) &= 0 & \bullet \sum (M_z^{(A)} + M_z^{(R)}) &= 0 \end{aligned}$$

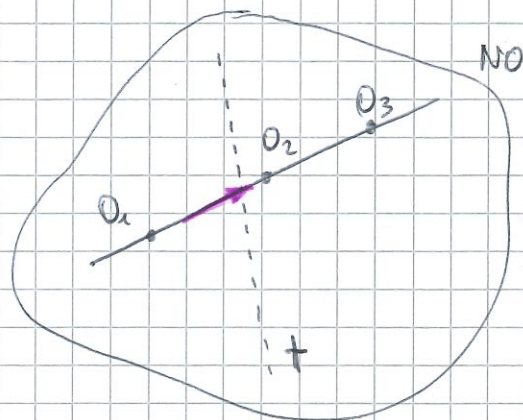
in 3 dimensioni si avranno tutte e 6 le equazioni mentre per il solo piano, 2 dimensioni, ne avremo 3 diverse. Quelle col **viola** sono le forme canoniche delle ECS.

Ora consideriamo la figura a lato

$$\sum (F_x^{(A)} + F_x^{(R)}) = 0 \Rightarrow \sum (M_{O_{1,2}}^{(A)} + M_{O_{1,2}}^{(R)}) = 0$$

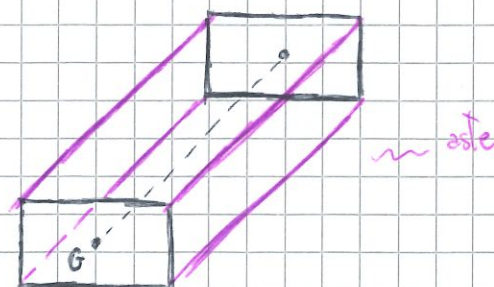
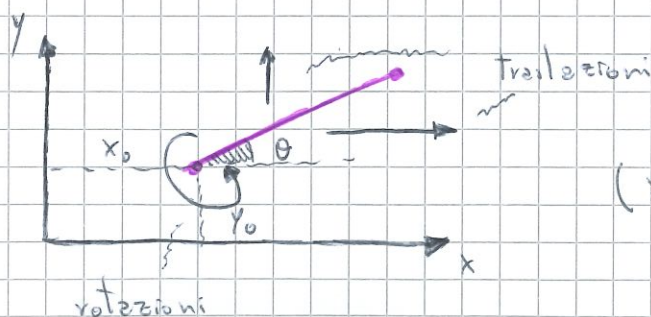
e inoltre avremo

$$\sum (M_{O_{1,2,3}}^{(A)} + M_{O_{1,2,3}}^{(R)}) = 0$$



Studieremo durante il corso delle strutture 3D di aste rettilinee come le seguenti.

Allontanandole però in 2D i gradi di libertà saranno "GDL = 3" con: (x, y, θ)

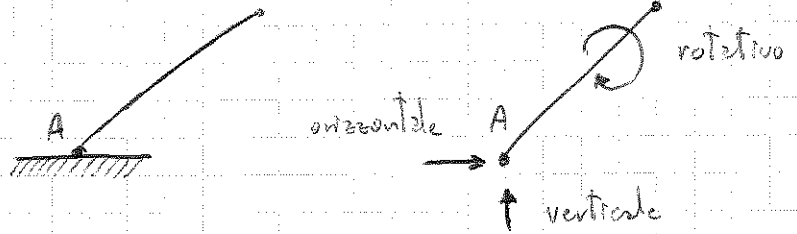


$$(x_0, y_0, \theta)$$

Vediamo ora le tipologie di vincoli esterni come:

• INCASTRO (fisso)

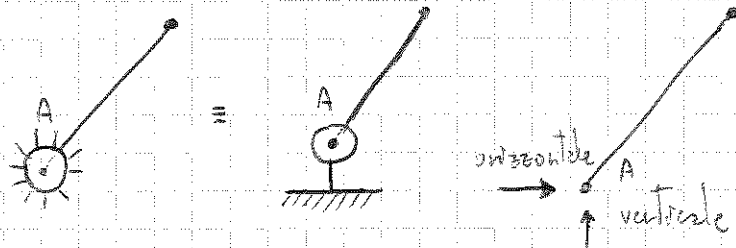
3 GDV



• CERNIERA (doppio)

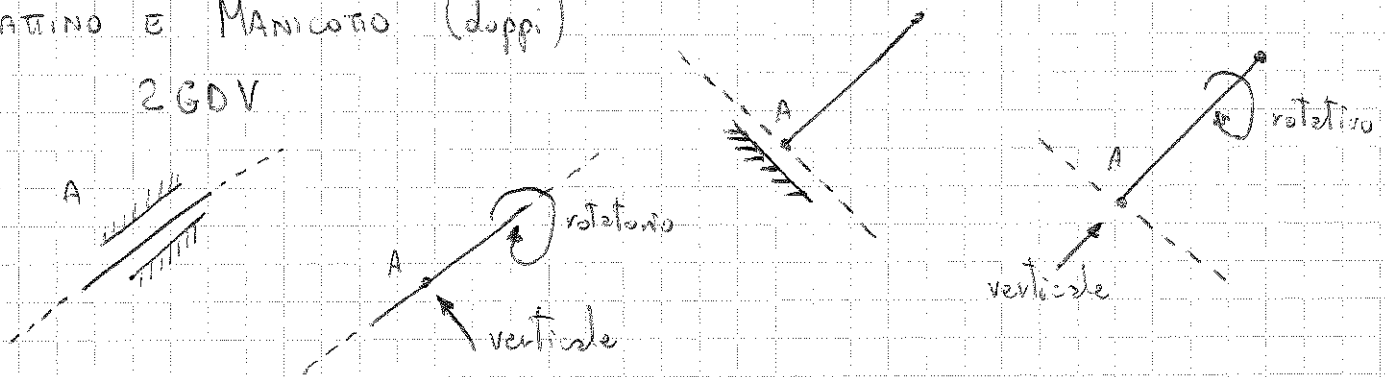
2 GDV

(anche detto PERNO)



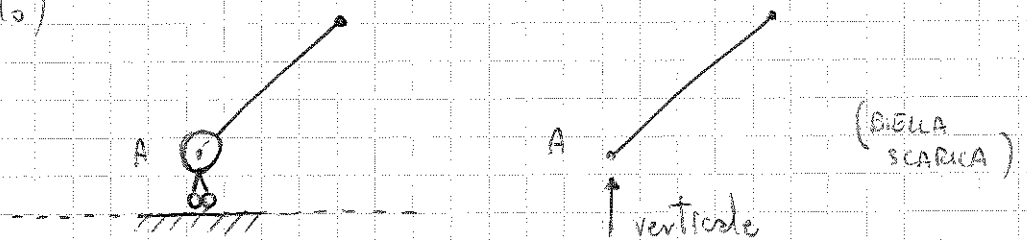
• PATINO E MANICOTTO (doppio)

2 GDV



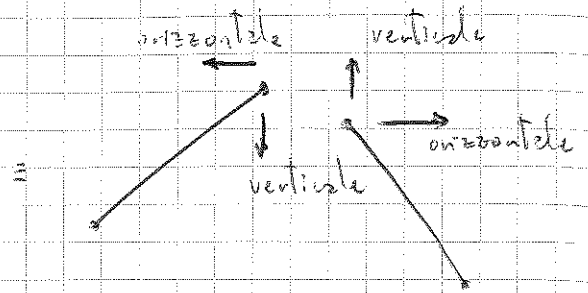
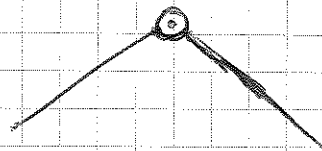
• CARRELLI (singolo)

1 GDV

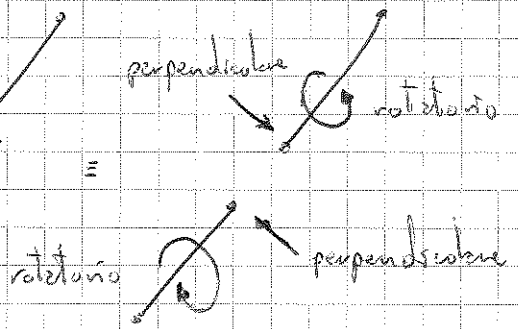
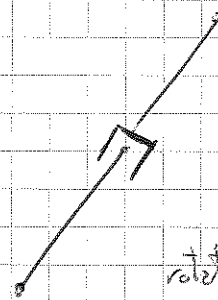
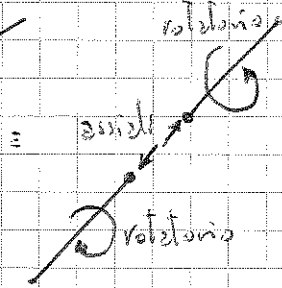
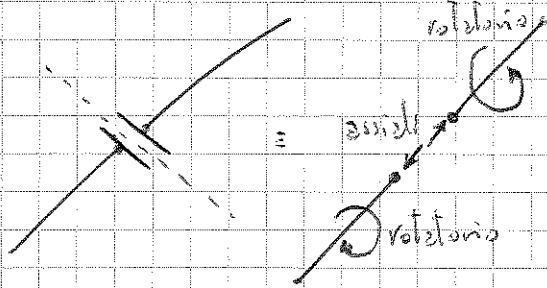


Valutiamo ora i vincoli interni ovvero:

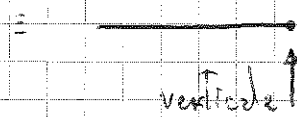
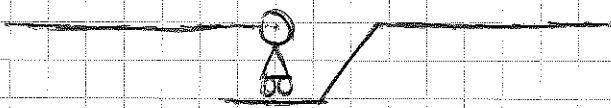
• CERNIERA INTERNA:
(PERNO INTERNO)



• PATINO / MANICOTTO INTERNO:



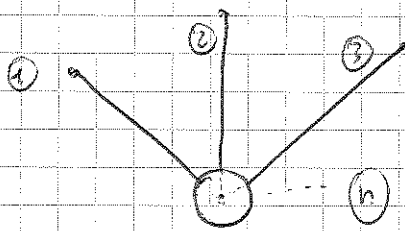
• CARRELLI INTERNI:



verticale

verticale

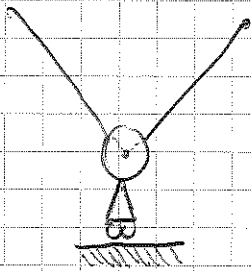
• VINCOLI MULTIPLI:



$$\Rightarrow G.D.V. = 2(n+1)$$

$$\downarrow$$

$$\text{con } n=3 \Rightarrow G.D.V. = 4$$



\Rightarrow CERNIERA INTERNA
+ CARRELLI A TERRA:

$$2 + 1 = 3 \text{ G.D.V.}$$

ANALISI DELLO SCHEMA STATICO

Andremo ora a verificare le possibilità di equilibrio identificando vincoli, forze applicate e reazioni vincolari determinando anche le sollecitazioni interne. Troviamo innanzitutto i gradi di libertà ($GDL = 3 \times n$) di un sistema composto da "n" aste e i suoi gradi di vincolo. Vediamo subito le classificazioni:

• **IPO-STATICI:** $GDL > GDI$ →



• **ISO-STATICI:** $GDL = GDI$ →



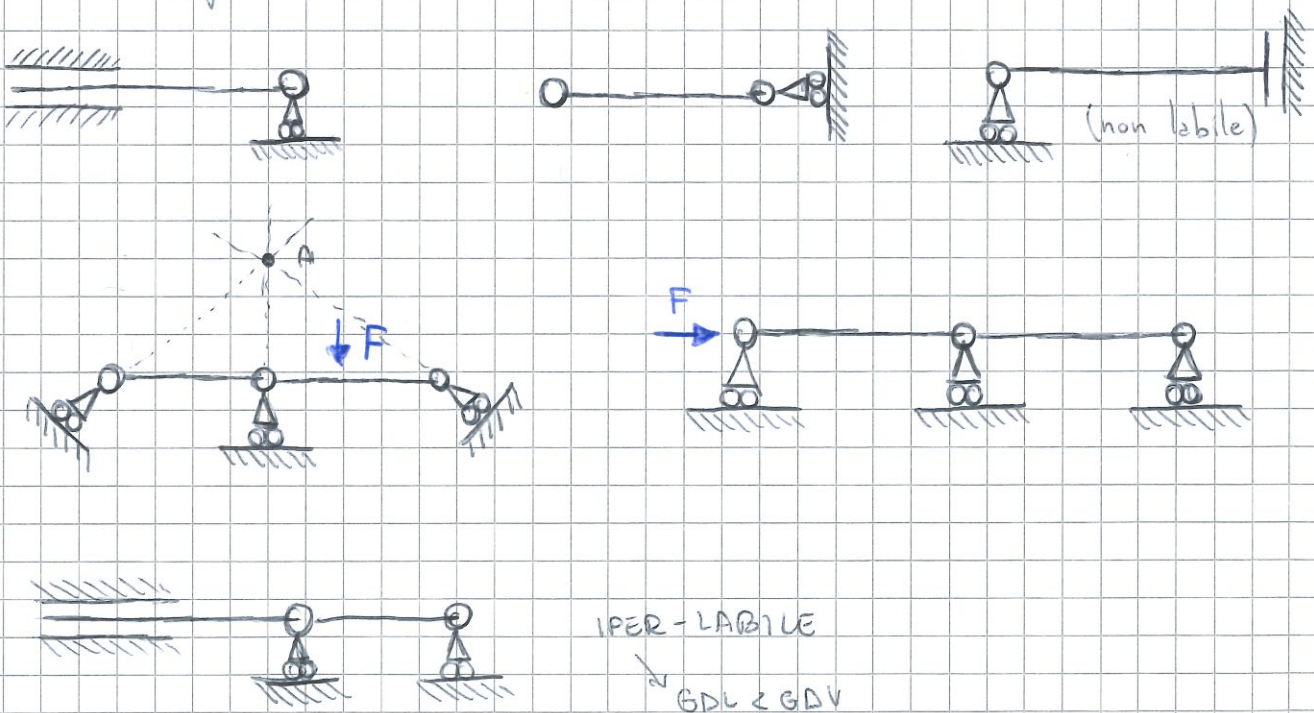
• **IPER-STATICI:** $GDL < GDI$ →



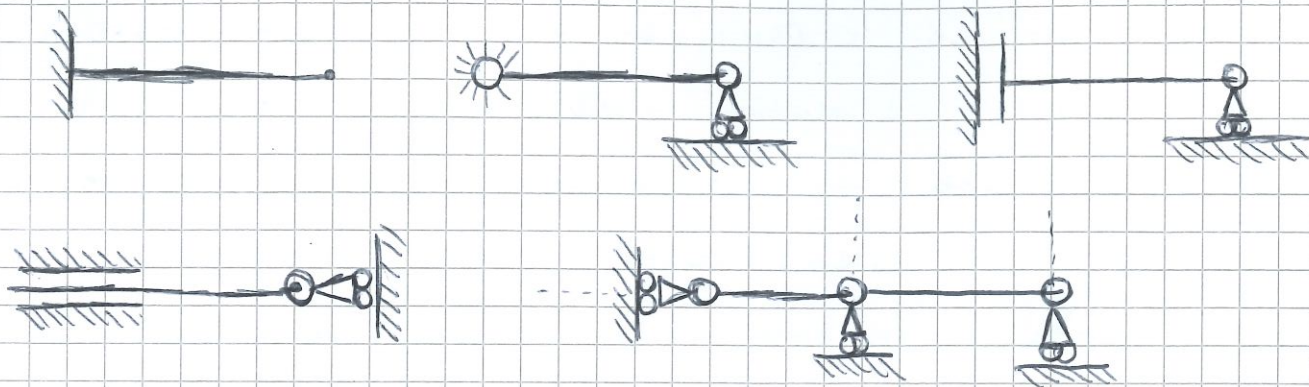
Andiamo ora a vedere diverse strutture e allermiamo se sono **labili** o **non labili**: nel primo caso sarà possibile un moto rigido e le reazioni vincolari sono concorrenti in un punto oppure sono tutte parallele → \exists un caso per cui le "Ecs" non sono verificate.

ESEMPI

Vediamo un paio di sistemi **LABILI**



Vediamo invece ora dei sistemi NON LABILI.

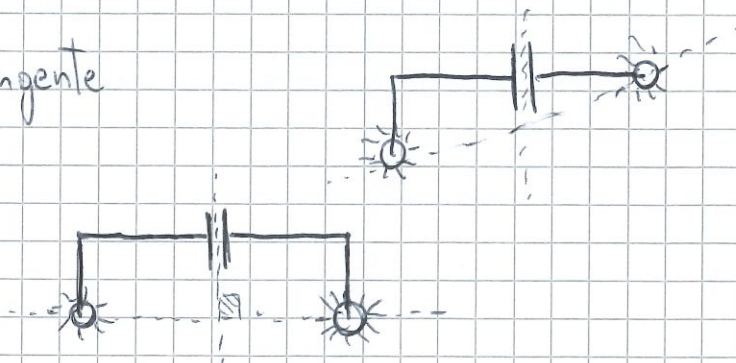


Vediamo ora l'ARCO A TRE CERNIERE: risulta non labile se non allineate e labile se allineate

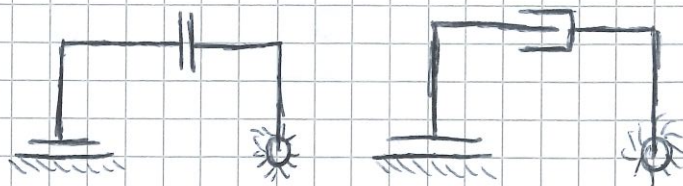


Analizziamo ora i VINCOLI IMPROPRI e numeriamoli

- $n=1$: non labile se la congiungente delle due cerniere \perp al piano di scorrimento e viceversa



- $n=2$: non labile se i vincoli impropri consentono scorrimento in direzioni diverse e viceversa



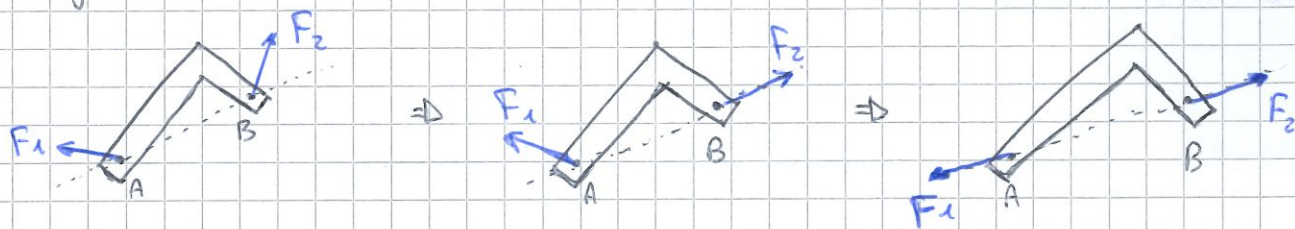
- $n=3$: sempre labile

ANALISI DELLO SCHEMA STATICO

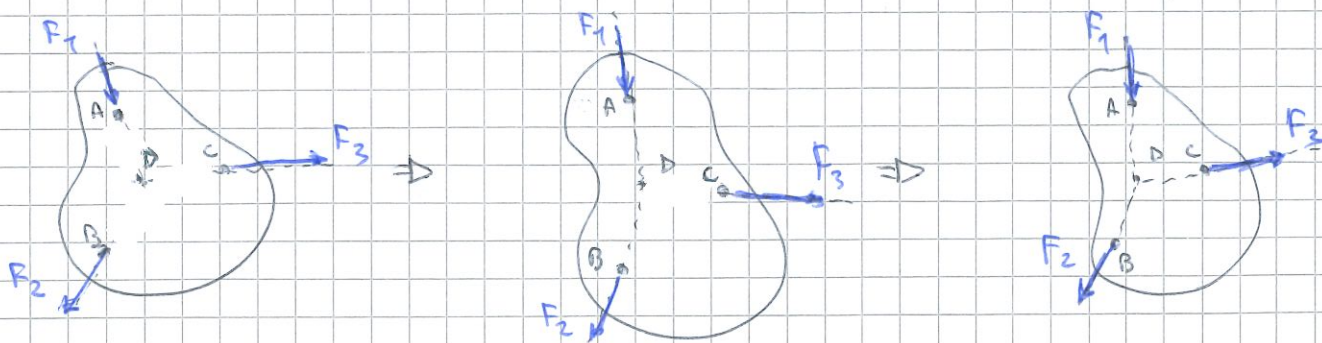
Entriamo ora nella vera e propria analisi che dovremo effettuare, per metterla in pratica dovremo passare da diversi steps:

- Analizzare le condizioni di equilibrio delle strutture vincolate mediante l'utilizzo delle ECS al fine di determinare le reazioni vincolari
- Tracciare i diagrammi di corpo libero mettendo in evidenza le reazioni vincolari
- Classificare le strutture in base al bilancio tra gradi di libertà e gradi di vincolo
- Analizzare la disposizione geometrica dei vincoli, verificando che questi impediscano i moti rigidi della struttura

Vediamo ora l'equilibrio di un **two-force body**, ipotizzando due forze in A e B per avere l'equilibrio statico dovremo avere che $\sum_A M = 0$ e $\sum_B M = 0$ pertanto, rispettivamente, F_2 dovrà giacere sul suo asse passante per A e viceversa F_1 con B:



Vediamo ora invece l'equilibrio di un **Three-force body**. Consideriamo A, B, C e un trio di forze F_1, F_2, F_3 : per ciascun trio diverso si trovano un punto D di intersezione delle forze. In D la somma dei momenti rispetto a ogni asse deve essere zero, le linee di azione delle forze devono essere o concorrenti o parallele



L'APPENDICE ISOSTATICA

Chiamiamo **appendici isostatiche** quelle strutture dove i vincoli a terra $V_f = 4$ ma i GDI sono divisi in parti disuguali tra le due aste ($3+r$). Questo nome viene dato all'asta con $V_f = 4$ che avrà l'altra come vincolo da $V_f = 3$.

"I carichi agenti sull'appendice isostatica vengono in parte trasmessi all'altra asta; il contrario non può avvenire"

Vediamo ora tre casistiche:

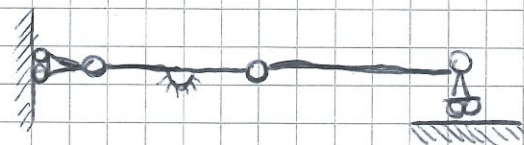
- AC mensola non labile
BC non labile



- AC mensola non labile
BC labile



- ADC asta continua, carrello labile
→ intera struttura labile



LE AZIONI INTERNE NELLE ASTE

Vediamo ora l'importanza del calcolo delle azioni interne e descriviamo le fasi del processo numerandole: (Analisi modello strutturale)

- **PRELIMINARE:** Struttura + carichi → Modello geometrico e di carico

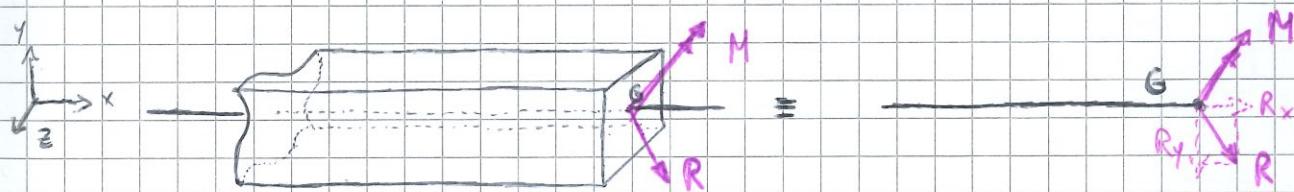
1. Controllo dell'equilibrio e calcolo delle reazioni vincolari, determinazione delle azioni interne ovvero delle forze che sollecitano punto per punto la struttura. Vediamo qualche concetto chiave da seguire nella definizione di queste ultime forze: esse sono forze trasmesse punto per punto della continuità dell'asta, posso essere definite come FORZA-COPPIA avente punto di applicazione nel baricentro della sezione trasversale dell'asta, queste forze obbediscono al principio di AZIONE-REAZIONE.

② Si passa ora al ribasso delle ipotesi di indeformabilità andando ad analizzare la ripartizione delle risultanti su ciascun punto della sezione trovando sforzi e deformazioni conseguenti. Questo ci permette di scegliere il MATERIALE tramite progettazione e verifica!!

Andiamo ora ad osservare più da vicino le azioni interne: partiamo subito dal metodo delle sezioni, ovvero:

"Se un sistema materiale è in equilibrio, allora lo è ogni sua parte, soggetta a quella parte di forze esterne che le competono e alle forze interne che le parti contigue le trasmettono"

Il sistema più generale di forze trasmesso dalla continuità è un sistema forza - coppia definito da una risultante e da un momento risultante: vediamo il modello dimensionale riferito al baricentro



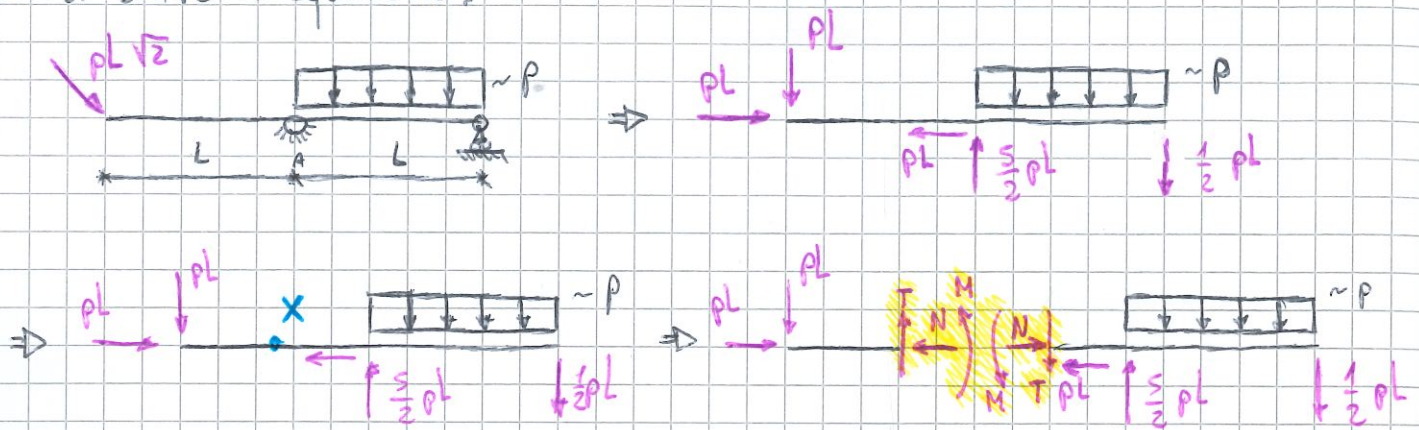
Nel riferimento locale dell'asse la risultante ha due componenti:

- azione assiale N ($= R_x$) diretta come l'asse dell'asta
- taglio T ($= R_y$) ovvero una normale all'asse dell'asta

Infine il momento avrà solo la componente M_z e pertanto si dirà momento flettente M .

Entriamo ora nella spiegazione del metodo delle sezioni: la struttura andrà divisa in due parti tramite una sezione operata nel punto P poi si evidenzieranno le azioni trasmesse dalla continuità, uguali e contrarie nelle due parti in esame.

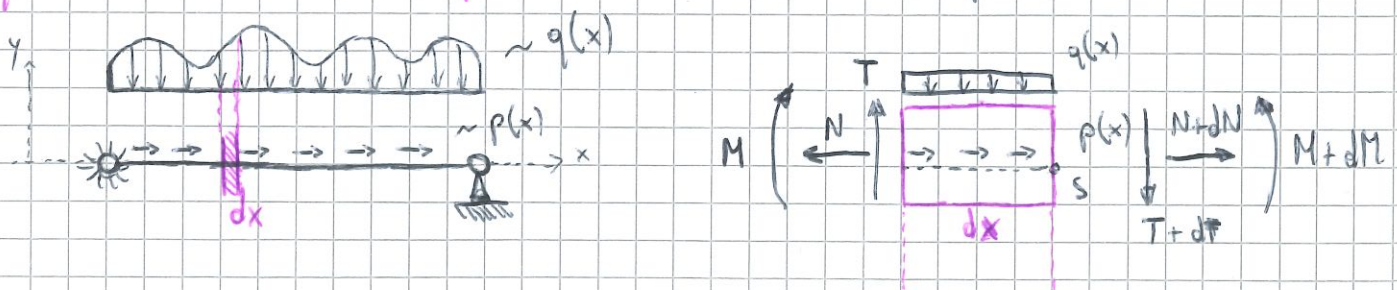
Ciascuna parte è un corpo rigido in equilibrio, sotto l'azione delle forze esterne e delle azioni interne incognite trasmesse dalla parte adiacente \Rightarrow valgono le ECS \Rightarrow le incognite sono in numero pari alle equazioni. Il conto deve essere fatto per tutte le sezioni dell'asta e il risultato non dipende dal lato su cui si scrive l'equilibrio.



Nel tratto che precede "X" le azioni interne sono dette EQUILIBRANTI mentre nel tratto a seguire sono dette RISULTANTI. Ci chiediamo ora se sia possibile ricavare una relazione generale che tenga conto delle azioni interne considerate (T, M) insieme al carico distribuito ($p(x)$)? Si è possibile ma prima vediamo le convenzioni di segno:

- $\leftarrow \boxed{+} \rightarrow$ $N > 0$ provoca trazione sul concio
- $\uparrow \boxed{+} \downarrow$ $T > 0$ promuove la rotazione oraria del concio
- $M \curvearrowright \boxed{+} \curvearrowleft$ No segno, si traccia della parte delle fibbre tese

Rispondendo ora alla domanda precedente andiamo a vedere le equazioni indefinite di equilibrio di asta rettilinea partendo da



Facciamo il calcolo con le Ecs:

$$\sum F_x = 0 : \quad -N + N + dN + p dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dN(x)}{dx} = -p(x)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad T - T - dT - q dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT(x)}{dx} = -q(x)$$

$$\sum M_s = 0 : \quad -M + M + dM - T dx + q dx \frac{L}{2} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dx} = T$$

Il che ci porta alla seguente

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} = -q(x)$$

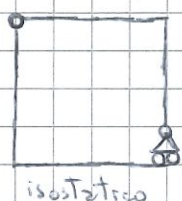
da cui osserviamo che

- $p=0 \Rightarrow W$ costante
- $q=0 \Rightarrow T$ costante $\Rightarrow M$ lineare
- q costante $\Rightarrow T$ lineare $\Rightarrow M$ parabolico
- q lineare $\Rightarrow T$ parabolico $\Rightarrow M$ cubico

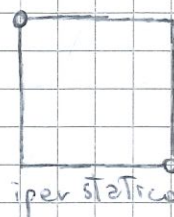
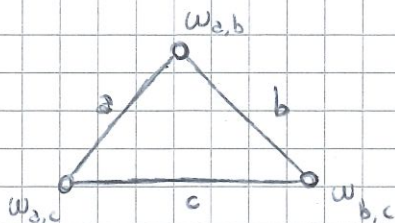
TRAVATURE RETICOLARI

Iniziamo questo capitolo parlando di **circolo chiuso isostatico**, ovvero una struttura di tre aste, collegate due a due da un vincolo doppio: tale circolo è un corpo RIGIDO poiché i collegamenti tra le aste non consentono loro movimenti relativi. L'analisi della labilità del circolo chiuso isostatico (c.c.i.) coincide con quella dell'arco a tre cerniere da cui può essere derivato,

"labile \Leftrightarrow le tre cerniere sono allineate"



isostatico

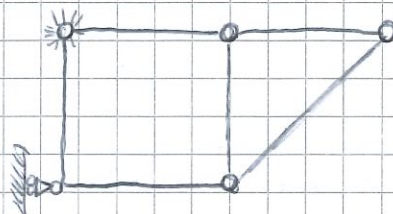


iperstatico

Le **strutture reticolari** (trusses) sono invece insiemi di aste rettilinee vincolate da cerniere e caricate/vincolate a terra solo nei nodi.

Definiamo ora i "Simple Truss" ovvero delle strutture ottenute per aggiunta di due aste e un nodo al triangolo reticolare di base.

In questi reticoli semplici abbiamo



$$m = 2n - 3$$

dove m è il numero di aste e n quello di nodi. Se aggiungiamo il termine V_e , ovvero dei vincoli a terra, possiamo dire che la struttura sia isostatica se

$$V_e + m = 2n$$

e, caso particolare, se $V_e = 3$ si tratta di "Simple Truss".

METODO DELL'EQUILIBRIO AI NODI

Le aste sono tutte bielle scaniche (two-force bodies) quindi trasmettono solo azione assiale (N). C'è una sola incognita per asta e si può considerare la struttura come un assemblaggio di nodi. Al pareggio di "gdl - gdl" le equazioni di equilibrio degli n nodi forniscono le incognite di azioni assiali e reazioni vincolari a terra.

- Calcoliamo le reazioni vincolari con ECS,
- Scriviamo le eqz. di equilibrio dei nodi in maniera da non accoppiare equazioni relative a nodi diversi,
- Partiamo da un nodo su cui convergono solo due aste e procediamo nella soluzione in modo da non avere mai più di **due** incognite per nodo



asta compressa: forze entrano nei nodi



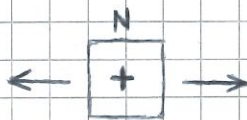
asta tesa: forze escono dai nodi

METODO DELLE SEZIONI DI RITTER

Col metodo precedente si propagano gli errori poiché si calcola nodo dopo nodo ma grazie a questa nuova tecnica superiamo le limitazioni precedenti utilizzando procedimenti tipici del calcolo delle azioni interne nei sistemi di aste multi-forza.

- Facciamo uso del metodo delle sezioni già utilizzato per le azioni interne,
- Tagliamo in due la struttura con una sezione che metta in evidenza solo tre incognite - quindi che "divida in due" **tre** aste,
- Utilizziamo le forme alternative delle ECS nel caso piano per scrivere tre equazioni disaccoppiate

Eventualmente si possono usare le ECS classiche. Vale la convenzione:



INTRODUZIONE ALLO STATO DI SFORZO

In questo capitolo iniziamo con l'analisi del modello strutturale al fine di definire lo sforzo e coglierne le differenze tra le diverse tipologie. Procediamo per fasi:

1. Ipotesi di piccoli spostamenti \Rightarrow aste assimilate a corpi rigidi
 - Controllo dell'equilibrio \Rightarrow verifica della disposizione dei vincoli
 - Calcolo delle reazioni vincolari; a partire da sostituzione dei vincoli con queste si scrivono le equazioni di equilibrio
 - Determinazione delle azioni interne
 - Come si ripartiscono sull'area della sezione trasversale?

2. Passiamo alla fase del rilascio dell'IPOTESI DI INDEFORMABILITÀ e analizziamo la ripartizione delle azioni interne. Introduciamo i concetti di **sforzo** e **deformazione** e caratterizziamo il comportamento meccanico del materiale (legame elastico) tramite deformabilità e resistenza. Sulla base di questi concetti ripartiremo N, M, T, M_r (e nei problemi piani) sulle sezioni trasversali. A questo punto si presentano il "problema di progetto", legato alla geometria di sezione, e il "problema di verifica", ovvero quello che si pone la domanda della verifica delle condizioni di sicurezza. Introduciamo così il FATTORE DI SICUREZZA (FS) e lo stress massimo (σ_u)

$$\sigma_u = \frac{P_u}{A} \longrightarrow FS = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}} = \frac{\text{ultimate stress}}{\text{allowable stress}}$$

vediamo una verifica di natura probabilistica della sicurezza:

- P_D = sollecitazione dei carichi permanenti ($\gamma_D > 1$)
 - P_L = sollecitazione dei carichi variabili ($\gamma_L > \gamma_D > 1$)
 - P_u = sollecitazione limite ($\phi < 1$)
- $$\left. \begin{array}{l} P_D \\ P_L \\ P_u \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_D P_D + \gamma_L P_L \leq \phi P_u$$

MECCANICA DEL CONTINUO

Abbandoniamo il concetto di indeformabilità e entriamo nella definizione di continuo deformabile, ciò implica:

- Mezzo continuo \Rightarrow materia distribuita con continuità nello spazio che occupa,
- Tale comportamento viene adottato perché predice bene le teorie che seguono la strada della "scala macroscopica",
- Ovviamente il limite è che il modello di continuo è applicabile solo se le dimensioni del corpo in studio sono molto maggiori della scala a cui la composizione molecolare della materia diventa importante.

La definizione matematica di continuo si basa sull'analisi delle forze esterne che agiscono sul corpo. Consideriamo un corpo di forma qualunque di volume " V " e delimitato da superficie " S "; tali forze agenti sono

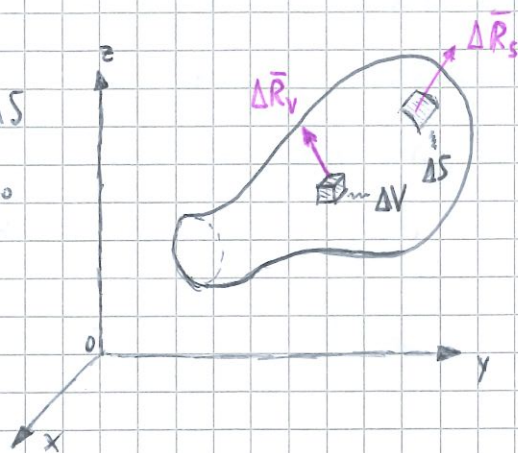
- FORZE DI VOLUME (\vec{F}): agiscono sull'elemento di volume all'interno del corpo e derivano da un'azione a distanza,
- FORZE DI SUPERFICIE (\vec{F}): sono "forze di contatto" che agiscono sulla porzione " S_p " della superficie esterna

Consideriamo un corpo qualunque dove ΔV , ΔS sono volume/superficie piccoli sui quali agiscono rispettivamente $\Delta \vec{R}_V$, $\Delta \vec{R}_S$ ovvero le risultanti delle forze di volume/superficie.

L'ipotesi di continuità di materia ci porta alle due conseguenze:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}_V}{\Delta V} = \vec{F}(x, y, z)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}_S}{\Delta S} = \vec{f}(x, y, z)$$



SFORZI NORMALI E TANGENZIALI

Per iniziare vediamo gli **sforzi normali**, ovvero l'intensità di una forza agente su una sezione \perp all'asse dell'elemento. Questa è la risultante delle azioni interne di un elemento caricato da AZIONE ASSIALE CENTRATA: scriviamo quindi tale sforzo (σ)

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

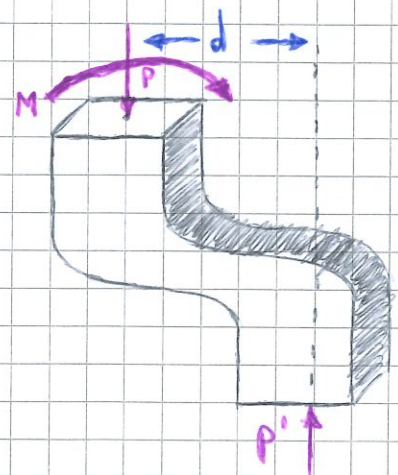
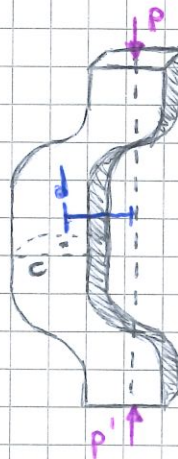
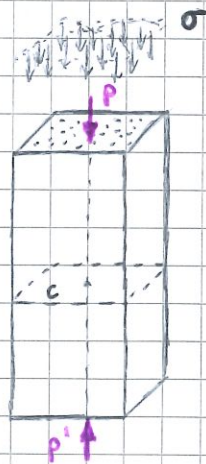
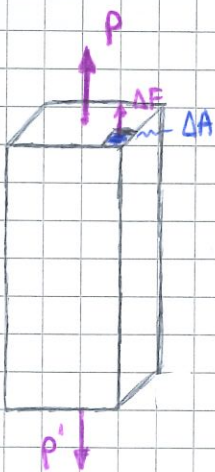
$$\sigma_{ave} = \frac{P}{A}$$

La tensione normale in un dato punto può non essere uguale alla tensione media poiché l'effettiva distribuzione di questi sforzi è "statisticamente indeterminata" con le sole eq. di equilibrio. Tuttavia la risultante della distribuzione delle tensioni deve soddisfare

$$P = \sigma_{ave} A = \int dF = \int_A \sigma dA$$

Una distribuzione uniforme di tensioni in una sezione implica che la risultante delle forze interne passi per il **BARICENTRO** della sezione ed è possibile solo se i carichi concentrati agenti sulle sezioni terminali dell'asta sono applicati al baricentro della sezione.

Se un'asta è caricata in maniera **eccentrica**, la distribuzione delle tensioni deve essere equivalente ad una forza assiale più una coppia e non può essere uniforme e simmetrica.



Vediamo invece ora gli sforzi tangenziali (τ) e chiamiamo TAGLIO la risultante della distribuzione delle forze interne tangenziali alla sezione, uguale al carico "P". La distribuzione della tensione tangenziale non può essere assunta uniforme

"taglio singolo" $\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A}$

"taglio doppio" $\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F}{2A}$

definiamo ora la tensione di riollamento (σ_{rf}) ovvero la risultante di forze di superficie su bulloni, rivetti e perni: è uguale e opposta alla forza esercitata sul perno, vediamo l'intensità media

$$\sigma_{rf} = \frac{P}{A} = \frac{P}{td}$$

SFORZI SU PIANO OBLIQUO

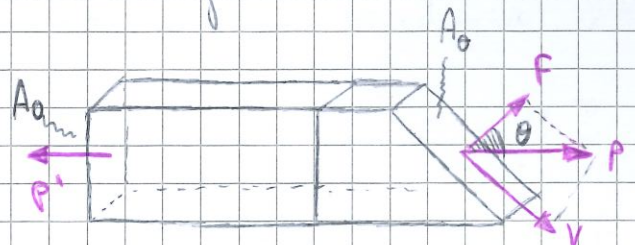
Tracciamo una sezione inclinata di un angolo θ con la sezione normale e consideriamo la risultante uguale a P, scomponiamola e otteniamo le seguenti formule per sforzi normali e tangenziali

$$F = P \cos \theta$$

$$V = P \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$

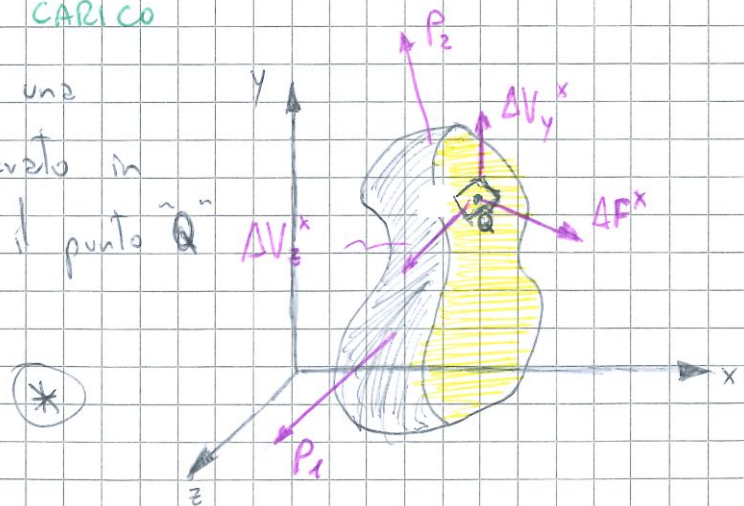
$$\tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$



I valori massimi si hanno rispettivamente per: $\theta_{\sigma_{max}} = 0^\circ$, $\theta_{\tau_{max}} = \pm 45^\circ$

SFORZI IN CONDIZIONI GENERALI DI CARICO

Si consideri un elemento soggetto a una combinazione generica di carichi separato in due parti da un piano passante per il punto \tilde{Q} e normale all'asse x



La distribuzione delle componenti della tensione interna può essere definita come:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y}{\Delta A}$$

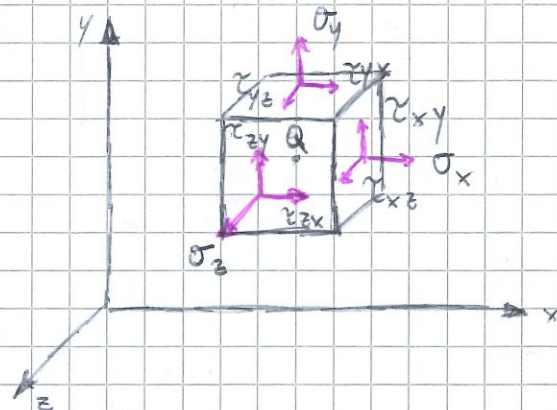
$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z}{\Delta A}$$

Considerazioni analoghe possono essere svolte sui piani orientati come normali gli assi y e z . Poi per il PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE e il rispetto delle condizioni di equilibrio, sull'altra porzione di elemento deve essere presente una distribuzione di tensioni uguale e opposta.

Definiamo le componenti di tensione per i piani perpendicolari agli assi x, y, z . Avremo sforzi positivi se diretti come gli assi di riferimento

$$(\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z)$$

$$(\tau_{xy}, \tau_{xz}; \tau_{yx}, \tau_{yz}; \tau_{zx}, \tau_{zy})$$



Dalla sommatoria dei momenti sull'elemento otteniamo che:

$$\sum M = 0 \Rightarrow (\tau_{xy} = \tau_{yx}), (\tau_{yz} = \tau_{zy}), (\tau_{zx} = \tau_{xz})$$

Le tensioni tangenziali non possono verificarsi su un solo piano e la stessa condizione di carico conduce a sforzi differenti su piani diversamente orientati.

SFORZO NELL'INTORNO DI UN PUNTO SECONDO CAUCHY

Consideriamo una giuntura come \otimes e vediamo direttamente le formule dove (\vec{p}) è lo sforzo e (\vec{n}) la normale

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \vec{p}_n$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta S} = \vec{0}$$

$$p_{-n} = -p_n$$

Se consideriamo 3 giaciture mutuamente ortogonali otteniamo che gli sforzi avranno queste componenti POSITIVE se dirette come gli assi

$$P_x = \begin{bmatrix} P_{xx} \\ P_{xy} \\ P_{xz} \end{bmatrix}$$

$$P_y = \begin{bmatrix} P_{yx} \\ P_{yy} \\ P_{yz} \end{bmatrix}$$

$$P_z = \begin{bmatrix} P_{zx} \\ P_{zy} \\ P_{zz} \end{bmatrix}$$

#

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEI CORPI DEFORMABILI

E.C.S. $\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_0 = \vec{0} \end{cases}$

Vediamo la c.n.s. per l'equilibrio del corpo deformabile dopo aver diviso la struttura in svariati volumetti piccoli con volume totale "V". Questa c.n.s. dice che in ogni parte del corpo deformabile di forma e dimensioni arbitrarie, devono essere verificate le E.C.S. sopra scritte

Vediamo ora il **tetraedro di Cauchy** al fine di calcolare lo sforzo generale a livello infinitesimo e non, sapendo lo stato di sollecitazione in un punto e verificare se il materiale si trova in condizioni di cedimento. Il tetraedro deve essere in EQUILIBRIO perciò si ottiene la relazione di Cauchy da " $\vec{R} = \vec{0}$ "

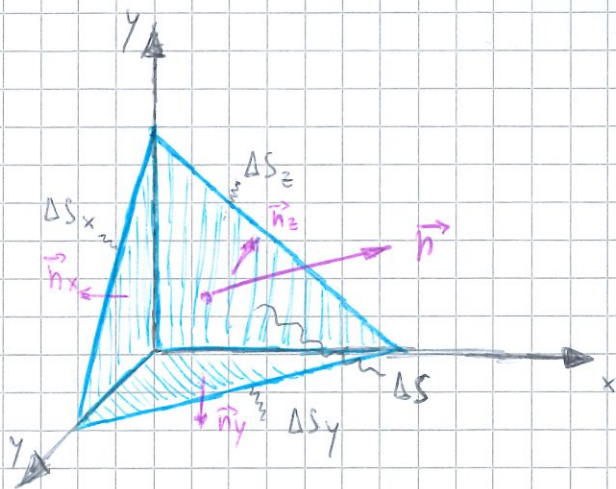
$$P_n = P_x n_x + P_y n_y + P_z n_z$$

se sostituiamo gli sforzi precedenti #

$$\Rightarrow P_n = \vec{n}^T \cdot \vec{T} = \vec{T}^T \cdot \vec{n}$$

dove si dice **tensore degli sforzi (T)** il

$$T = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix}$$



Oss (!): L'operazione con cui ricaviamo " P_n " da P_x, P_y, P_z è di natura TENSORIALE (e quindi matriciale/vettoriale) perciò " P_n " NON È la risultante. Dato che " P_n " è un vettore si possono applicare le operazioni di algebra dei vettori.

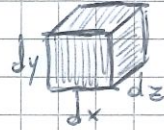
DIPENDENZA DALLA POSIZIONE

Ipotezziamo che lo stato di sforzo sia descritto da **funzioni continue** e per studiare la dipendenza dalla posizione applichiamo le condizioni di equilibrio del volume infinitesimo tramite le ECS.

$$\begin{cases} R=0 \\ M=0 \end{cases}$$

$$p_{ik} = p_{ik}(x, y, z)$$

$$i, k = x, y, z$$



Se consideriamo l'incremento per espansione di Taylor come in meccanica dei fluidi otteniamo:

$$R=0 \rightarrow F dV + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz dx dy = 0$$

$$M=0 \rightarrow M_z = (p_{xy} dy dz) dx - (p_{yz} dx dz) dy = 0 \Rightarrow [p_{xy} = p_{yx}; p_{xz} = p_{zx}; p_{yz} = p_{zy}]$$

Sulla porzione " S_f " della superficie libera agiscono le forze di superficie note $f(x, y, z)$ e gli sforzi " p " agenti nei punti di tale superficie, sul piano tangente alla superficie individuato dalla normale n , devono essere uguali alle forze " f ":

$$p_n = f \quad \text{su } S_f \quad \Rightarrow \quad f = p_x n_x + p_y n_y + p_z n_z$$

consideriamo poi " S_v " come la porzione di superficie esterna vincolata, allora qua le reazioni vincolari non sono note appronte e le trovo quando conosco lo stato di sforzo su tutto il solido

$$p_n = r \quad \text{su } S_v$$

PROBLEMA STATICO

Definiamo "problema statico" il problema della determinazione dello stato di sforzo di un corpo continuo di volume V , delimitato dalla superficie S , date le forze (di volume e di superficie) agenti su di esso. Le incognite sono le 6 equazioni / funzioni indipendenti che compaiono nel tensore degli sforzi

$$P_{ik} = P_{ik}(x, y, z)$$

dove l'equazione differenziale che governa l'equilibrio nel problema è:

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + F = 0 \quad \forall dV \in V$$

con le condizioni al contorno sulla superficie esterna

$$f = P_x n_x + P_y n_y + P_z n_z \quad \forall dS \in S_f$$

In caso di corpo IPERSTATICO il sistema di equazioni non è determinabile e perciò non si ottiene univocamente lo stato di tensione. Vediamo ora le proprietà di sforzi e direzioni principali:

$$P_n = \sigma \cdot n = P_x n_x + P_y n_y + P_z n_z = T^T \cdot n \quad (\text{Non ecc. } n_x = n_y = n_z = 0 !)$$

se riarrangiamo otteniamo

$$\begin{vmatrix} (P_{xx} - \sigma) & P_{yx} & P_{zx} \\ P_{xy} & (P_{yy} - \sigma) & P_{zy} \\ P_{xz} & P_{yz} & (P_{zz} - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

e gli sforzi principali sono le radici (reali) dell'equazione:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

dove I_i , $i=1,2,3$ si ottiene calcolando per l'appunto il determinante della matrice precedente.

Le direzioni lungo cui esistono gli sforzi principali prendono il nome di **direzioni principali** e sono definite da tre versori n_I, n_{II}, n_{III} , soluzione del sistema di equazioni in cui $\sigma = \sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$.
Se le tre radici " σ " sono distinte:

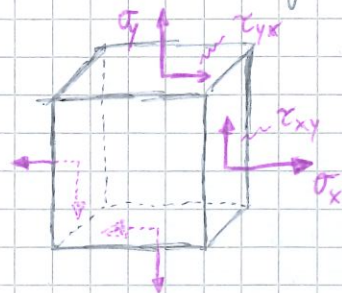
- rango della matrice del sistema = 2 \Rightarrow quindi è possibile determinare solo due incognite dato un valore arbitrario alla terza.
- possono essere determinate Tre direzioni principali e si può dimostrare queste siano tra loro perpendicolari e possono essere scelte in modo da formare una terna destra.

Sforzi e direzioni principali sono **autovalori** e **autovettori** della matrice " T ".

IL CERCHIO DI MOHR

In questo capitolo descriviamo gli **stati di sforzo piano** e la loro rilevanza e ricaviamo uno strumento per determinare le componenti normali e tangenziali dello sforzo in questi stati. Deriviamo e applichiamo poi le equazioni del cerchio di Mohr con costruzioni grafiche.

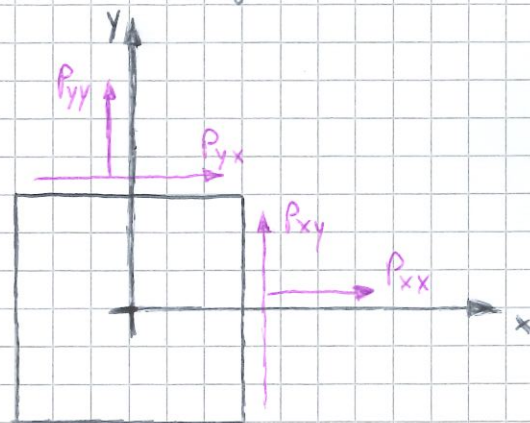
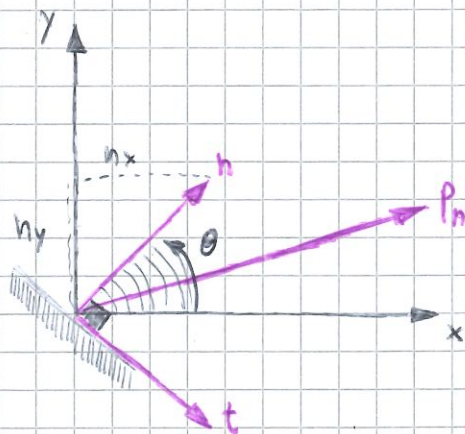
Nel caso di stato piano di sforzo si considera che gli sforzi agiscono su un piano bidimensionale. Ciò significa che le uniche componenti significative sono



σ_x, σ_y (sforzi NORMALI)

τ_{xy} (sforzo di taglio TANGENZIALE)

L'obiettivo è determinare " σ_1, σ_2 " detti sforzi principali e " τ_{max} " ovvero lo sforzo massimo di taglio, inoltre bisognerà chiarire l'orientazione delle direzioni principali rispetto agli assi x e y .



Vediamo tramite queste immagini lo stato di sforzo piano e troviamo le relazioni geometriche e il valore degli sforzi t.c.

• GEOMETRIA:
$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad ; \quad t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_y \\ -n_x \end{bmatrix}$$

• SFORZI:
$$P_{xx} \neq 0, P_{yy} \neq 0, P_{xy} \neq 0 \quad ; \quad P_{xz} = P_{yz} = P_{zz} = 0$$

ricordiamo che " t " è in ritardo di 90° su " n "

DERIVAZIONE ANALITICA CERCHIO DI MOHR

Stabiliamo innanzitutto delle uguaglianze puramente simboliche

$$(\sigma, \tau) \equiv (\sigma_n, \tau_n) \quad | \quad (p_{xx}, p_{yy}) \equiv (\sigma_x, \sigma_y) \quad | \quad (p_{xy}) \equiv (p_{yx}) \equiv (\tau_{xy})$$

Ora partiamo con le premesse:

$$p_n = p_x n_x + p_y n_y \quad \text{con} \quad \begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx} n_x + p_{yx} n_y = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ p_{ny} &= p_{xy} n_x + p_{yy} n_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{aligned}$$

da ciò scriveremo:

$$(\sigma_n \equiv \sigma) = p_n \cdot n = p_{nx} n_x + p_{ny} n_y = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y$$

$$\begin{aligned} (\tau_n \equiv \tau) &= p_n \cdot t = p_{nx} t_x + p_{ny} t_y = p_{nx} n_y - p_{ny} n_x \\ &= (\sigma_x - \sigma_y) n_x n_y - \tau_{xy} (n_x^2 - n_y^2) \end{aligned}$$

se sostituiamo n con $n(\theta)$ abbiamo poi

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta$$

$$\tau_n = (\sigma_x - \sigma_y) \cos \theta \sin \theta - \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

per mezzo delle formule trigonometriche otterremo le seguenti

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

Se quadriamo e sommiamo, dopo qualche riarrangiamento, membro a membro otteniamo l'equazione di una circonferenza all'interno del nostro "Piano di Mohr" (σ, τ) t.c. potremo così calcolare gli sforzi per mezzo delle relazioni date dalla matematica

L'equazione del cerchio di Mohr è la seguente

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

perciò nel piano (σ, τ) il centro sarà sull'asse delle ascisse e raggio R :

$$(\sigma - C)^2 + \tau^2 = R^2 \Rightarrow C = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad ; \quad R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

In base all'angolo " θ " troviamo i punti dove $(\tau_n = 0)$ e troviamo che si ottiene

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \theta_{p,1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad ; \quad \theta_{p,2} = \theta_{p,1} + \frac{\pi}{2}$$

gli sforzi principali appaiono sulle facce aventi come normale le direzioni principali \Rightarrow sono i valori estremi degli sforzi normali. Si ricavano ponendo " $\tau = 0$ " quindi: $(\dots)_{1,2} \equiv \dots_{I,II}$

$$\sigma = C \pm R \Rightarrow \sigma_I = C + R \quad ; \quad \sigma_{II} = C - R$$

Ora troviamo invece la massima tensione tangenziale, ricordando il " θ_p " precedente, annullando la derivata di τ rispetto a θ :

$$\frac{d\tau}{d\theta} = 2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta_s) + 2\tau_{xy} \sin(2\theta_s) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(2\theta_s) = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = - \frac{1}{\tan(2\theta_p)} = - \cot(2\theta_p)$$

$$\Rightarrow 2\theta_s = 2\theta_p - \frac{\pi}{2}$$

A questo punto otteniamo " τ_{max} " ponendo " $\sigma - C = 0$ ", ovvero:

$$\tau_{max} = \pm R = \pm \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$$

INTRODUZIONE ALLO STATO DI DEFORMAZIONE

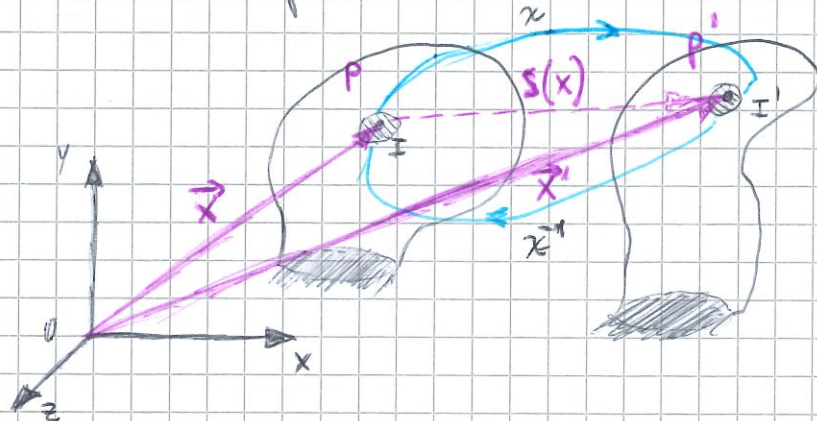
In questo capitolo tratteremo in modo più approfondito il tema delle **deformazioni**. Innanzitutto riaccenniamo alla cinematica del corpo rigido, più in particolare a TRASLAZIONE e ROTAZIONE, e integriamo tutte le nozioni di Fisica Sperimentale all'interno del contesto.

Diciamo subito che faremo solo considerazioni geometriche. La configurazione è l'insieme delle posizioni di tutti i punti del corpo solido che, quando si deforma, si modifica perché, a seguito di uno spostamento dei suoi punti, è variata la posizione assoluta o relativa dei punti appartenenti al corpo.

Consideriamo un corpo rigido di volume V e superficie S e tratteremo l'interno dei due punti P e P'

$$S = S_f \cup S_a$$

superficie totale



(\vec{x}, \vec{x}')
Vettori posizione

La trasformazione è descritta dalla funzione $\chi' = \chi(x)$ che è arbitraria ma soddisfa delle relazioni di regolarità, ovvero:

- $\chi(x)$ è BIUNIVOCA tra P e $P' \Rightarrow$ dotata di inversa $\chi^{-1}(x)$
- $\chi(x)$ è funzione continua con le sue derivate prime (no punti angolosi nelle deformate)

La variazione di configurazione è descritta dal campo di spostamenti

$$S(x, y, z) = x' - x$$

Il campo di spostamenti che soddisfa le stesse condizioni di regolarità viene detto **internamente congruente** quindi

• NO LACERAZIONI

• NO COMPENETRAZIONI



Si dice invece **esternamente congruente** se nella parte vincolata della superficie S_u gli spostamenti rispettano le condizioni imposte dai vincoli

$$S(x, y, z) = \bar{S}(x, y, z)$$

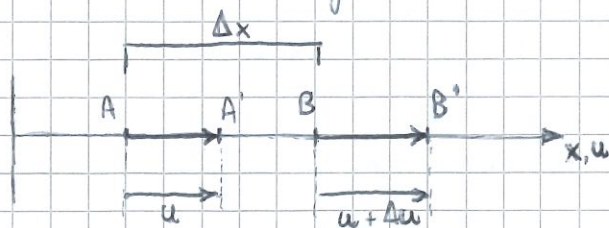
Vediamo ora l'ipotesi dei **"PICCOLI SPOSTAMENTI"**:

- In statica è possibile scrivere le equazioni di equilibrio nella configurazione indeformata
- In cinematica, questa tipologia della variazione di configurazione è tale per cui:
 - è lecito confondere gli spostamenti con la loro parte del primo ordine e trascurare i gradienti dello spostamento rispetto all'unità;
 - la misura della deformazione è fatta rispetto alla configurazione iniziale indeformata (analoga con l'ipotesi in statica)

MISURA ELEMENTARE DELLE DEFORMAZIONI

Vediamo per prima cosa il caso 1D e consideriamo un segmento rettilineo soggetto a soli spostamenti:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$



Misura della deformazione del segmento Δx è il rapporto ϵ_x (adimensionale):

- la variazione di lunghezza $\Delta l = (l_{fin} - l_{iniz.}) = (\Delta x + \Delta u) - \Delta x = \Delta u$
- la sua lunghezza iniziale Δx

Vediamo ora il caso 2D di un elemento piano soggetto a spostamenti [con $w=0$ (vettore in z)]:

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$$

e si considera in questo **primo caso** che

$u = u(x)$ e $v = v(y)$, perciò si ottengono con le stesse considerazioni analoghe al caso monodimensionale

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} (=0)$$

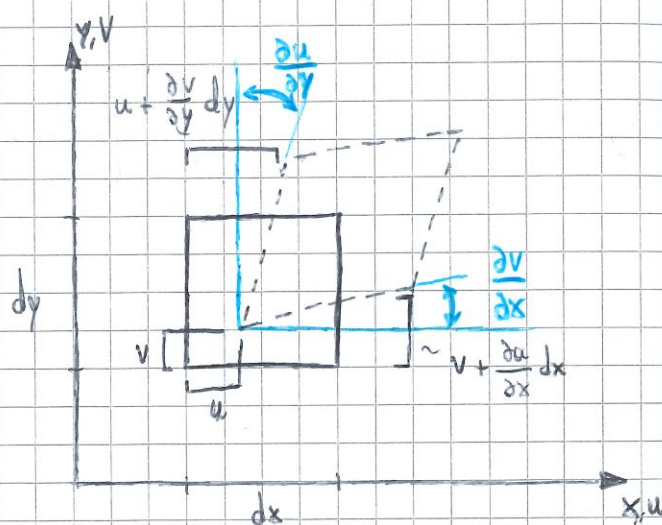
Se invece ora scambiamo le funzioni

e si considera $u = u(y)$ e $v = v(x)$.

L'inclinazione dei segmenti paralleli vale:

$$\alpha \equiv \tan \alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\beta \equiv \tan \beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$



Scriviamo ora i valori netti di deformazione

angolare per tutti e tre gli assi, dove il primo sarà riferito al caso orientato

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Da questi nuovi elementi introdotti vedremo le seguenti

- Unità di misura $[L/L] \equiv$ numeri puri adimensionali
- Deformazioni ANGOLARI misurate in radianti $[rad]$
- Deformazioni ESTENSIONALI misurate anche in percentuale $[\%]$

DILATAZIONE
(lunghezze)

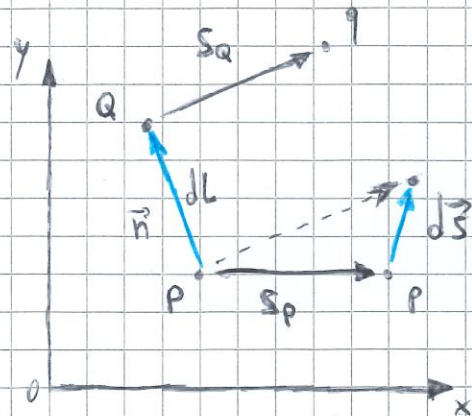
DISTORSIONE
(forme)

IL TENSORE DELLE PICCOLE DEFORMAZIONI

Nello scorso capitolo abbiamo appurato che se vale l'ipotesi di piccoli spostamenti i contributi si sommano e le deformazioni sono espresse da un tensore doppio simmetrico. Qui vedremo diversi tipi di tensore: iniziamo da qui

TENSORE GRADIENTE DI SPOSTAMENTO

Trattiamo prima il caso 2D e notiamo subito la geometria del problema



$$\begin{aligned} dx &= x_Q - x_P \\ dy &= y_Q - y_P \\ dL &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ n &= \begin{bmatrix} dx/dL \\ dy/dL \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il che ci fa ottenere lo spostamento relativo, anche unitario, causa deformazione

$$ds = s_Q - s_P = \begin{bmatrix} ds_x \\ ds_y \end{bmatrix} \quad \left| \quad \frac{ds}{dL} = \frac{s_Q - s_P}{dL} = \begin{bmatrix} ds_x/dL \\ ds_y/dL \end{bmatrix} = s_n$$

Facciamo ora qualche altra considerazione:

$$\frac{ds_x}{dL} = \frac{\partial s_x}{\partial x} \frac{dx}{dL} + \frac{\partial s_x}{\partial y} \frac{dy}{dL} \quad \left| \quad \frac{ds_y}{dL} = \frac{\partial s_y}{\partial x} \frac{dx}{dL} + \frac{\partial s_y}{\partial y} \frac{dy}{dL}$$

otteniamo così il tensore (ψ) , scritto te. $\psi_{ji} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j}$

$$\frac{ds}{dL} = s_n = \psi^T \cdot n = \psi_n = \psi_x n_x + \psi_y n_y$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{ds_x}{dL} \\ \frac{ds_y}{dL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{\partial s_x}{\partial y} \\ \frac{\partial s_y}{\partial x} & \frac{\partial s_y}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dx}{dL} \\ \frac{dy}{dL} \end{bmatrix}$$

NOTA:
 $\psi_{-n} = -\psi_n$

Si può integrare la terza dimensione seguendo gli stessi criteri

TENSORE DELLE PICCOLE DEFORMAZIONI (2D)

Procediamo alla decomposizione della matrice gradiente di spostamento in somma di una parte simmetrica e di una antisimmetrica

$$\Psi^T = E^T + \Omega^T \quad \text{con} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(\Psi_{ij} + \Psi_{ji}) \quad ; \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\Psi_{ij} - \Psi_{ji})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{\partial S_x}{\partial y} \\ \frac{\partial S_y}{\partial x} & \frac{\partial S_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial S_y}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_x}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

dove possiamo tranquillamente osservare

$$\mathbf{E}^T = \begin{bmatrix} E_x & E_{yx} \\ E_{xy} & E_y \end{bmatrix} \Rightarrow E_{xy} = E_{yx}$$

TENSORE DI DEFORMAZIONE

$$\Omega^T = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{yx} \\ \Omega_{xy} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Omega_{xy} = -\Omega_{yx}$$

TENSORE DI ROTAZIONE

Traiamo ora le varie misure di deformazione, ovvero:

- Variazione unitaria di lunghezza di un segmento dx :

$$\begin{cases} L_{\text{in}} = dx \\ L_{\text{fin}} = (1 + \varepsilon_x) dx \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L_{\text{in}}} = \frac{L_{\text{fin}} - L_{\text{in}}}{L_{\text{in}}} = \frac{dx(1 + \varepsilon_x) - dx}{dx} = \varepsilon_x$$

- Variazione unitaria di area di un elemento piano $dx dy$:

$$\begin{cases} A_{in} = dx \cdot dy \\ A_{eff} = (1 + \epsilon_x) dx (1 + \epsilon_y) dy \end{cases} \Rightarrow \frac{dA}{A_{in}} = \frac{A_{eff} - A_{in}}{A_{in}} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_x \cdot \epsilon_y \approx \epsilon_x + \epsilon_y$$

- Deformazione volumetrica di un parallelepipedo $dx dy dz$

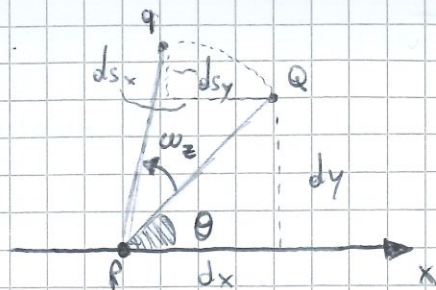
$$\left\{ \begin{array}{l} V_{in} = dx dy dz \\ V_{fin} = V_{in} \sum (1 + \epsilon_{y,x,z}) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_{in}} = \frac{V_{fin} - V_{in}}{V_{in}} = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1 \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Inoltre possiamo dire che "Exy" è lo scorrimento ANGOLARE dove

$$\cos \alpha = 2 \epsilon_{xy} = \gamma_{xy}$$

TENSORE IN ROTAZIONE (2D)

Vediamo ora la rotazione senza variazione di lunghezza con " $\overline{PQ} = dL$ ":



$$ds_x = (x_q - x_p) = dL \cos(\omega_z + \theta) - dL \cos \theta = dL (\cos \omega_z \cos \theta - \sin \omega_z \sin \theta) - dL \cos \theta$$

$$ds_y = (y_q - y_p) = dL \sin(\omega_z + \theta) - dL \sin \theta = dL (\cos \omega_z \sin \theta + \sin \omega_z \cos \theta) - dL \sin \theta$$

Se ω_z è piccolo risulta " $\cos \omega_z \approx 1$ " e " $\sin \omega_z \approx \omega_z$ "

$$\begin{cases} \frac{ds_x}{dL} = (\cos \omega_z - 1) \cos \theta - \sin \omega_z \sin \theta \\ \frac{ds_y}{dL} = (\cos \omega_z - 1) \sin \theta + \sin \omega_z \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{ds_x}{dL} \\ \frac{ds_y}{dL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_z - 1 & -\sin \omega_z \\ \sin \omega_z & \cos \omega_z - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{ds_x}{dL} \\ \frac{ds_y}{dL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dL} \\ \frac{dy}{dL} \end{bmatrix}$$

Abbiamo trovato precedentemente che

$$\frac{S_Q - S_P}{dL} = S_n = \epsilon^T \cdot n + \omega^T \cdot n$$

$$\Rightarrow S_Q = S_P + \epsilon^T \cdot n dL + \omega^T \cdot n dL = S_P + \epsilon^T \cdot dx + \omega^T \cdot dx$$

per tanto i contributi deformativi **si sommano** e si ottiene che le deformazioni sono fornite dalla variazione del campo di spostamenti dx cui viene sottratta la rotazione rigida

$$\epsilon^T \cdot dx = (S_Q - S_P) - \omega^T \cdot dx$$

TENSORE GRADIENTE DI SPOSTAMENTO (3D)

Facciamo la decomposizione di $\frac{ds}{dt} = s_n = \gamma^T \cdot n$ poiché anche nel caso tridimensionale il tensore viene scomposto in due parti:

$$\gamma^T = \epsilon^T + \Omega^T$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{ij} - \gamma_{ji})$$

PICCOLE DEFORMAZIONI:

$$\epsilon^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial s_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial s_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

ROTAZIONE RIGIDA:

$$\Omega^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

IL PROBLEMA CINEMATICO

Consideriamo lo schema standard (punto, punto P, vettore x): dal campo di spostamenti $S(x) = (x, y, z)$ si ricavano per derivazione le 6 componenti di deformazione $\epsilon_{ij}(x)$ della matrice ϵ^T .
Avremo due tipologie:

- INVERSO: da $S(x)$ dedurre $\epsilon(x)$ ed esso congruente
- DIRETTO: da $\epsilon(x)$ + cond. contorno su S_u dedurre $S(x) \Rightarrow$ impossibile perché 6 eq. diff. e solo 3 funzioni incognite

Il continuo di Cauchy è detto **cinematicamente impossibile** poiché il vincolo di continuità è sovrabbondante. All'incirca il problema diretto ammetta soluzione occorre che esistano ulteriori relazioni che prendono il nome di EQUAZIONI DI CONGRUENZA.

LE EQUAZIONI DI CONGRUENZA

Bypassando la dimostrazione, ricordiamo solamente le funzioni di deformazione da cui partiamo

$$\bullet \quad \underline{\epsilon_x = \frac{\partial s_x}{\partial x}} \quad ; \quad \underline{\epsilon_y = \frac{\partial s_y}{\partial y}} \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial s_z}{\partial z}$$

$$\bullet \quad \underline{\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x}} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y}$$

le equazioni di congruenza sono condizioni necessarie e sufficienti per l'integrabilità del campo di deformazione. Partiamo da 2D (xy):

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2}$$

queste erano le principali, dopo ulteriori passaggi si ottiene anche

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

PROPRIETÀ DELLO STATO DI DEFORMAZIONE

Ricerca delle direzioni lungo cui la deformazione è diretta come il segmento su cui è calcolata: ancora un problema autovalori (def. princ.) e autovettori (direz. princ.) REALI

$$\bar{\epsilon}_n = \epsilon \cdot \bar{n}$$

Troviamo le tre radici reali: $\epsilon_I, \epsilon_{II}, \epsilon_{III}$ deformazioni principali, cui associamo tre vettori mutuamente perpendicolari che forniscono le direzioni principali. I passaggi seguono così

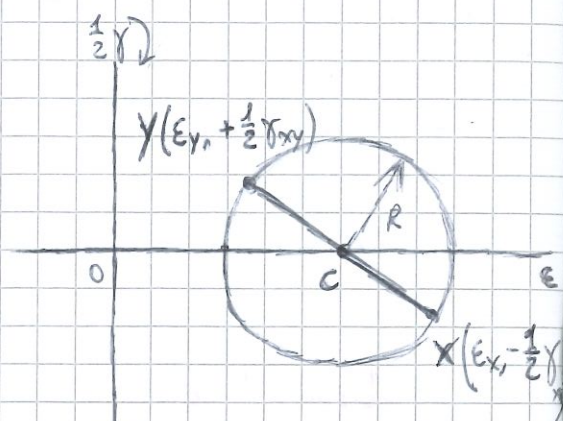
$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} I_{1\epsilon} &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \\ I_{2\epsilon} &= \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x + \\ &\quad - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \end{aligned}$$

$$\epsilon^3 - I_{1\epsilon} \cdot \epsilon^2 + I_{2\epsilon} \cdot \epsilon - I_{3\epsilon} = 0$$

$$I_{3\epsilon} = \det(\epsilon)$$

STATO PIANO DI DEFORMAZIONE

Le equazioni per la trasformazione delle deformazioni piane hanno la stessa forma delle equazioni per la trasformazione delle tensioni piane, vale la tecnica del cerchio di Mohr dove avremo:



$$\epsilon_{ave} = C = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad ; \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Convenzioni di segno:

- $\epsilon_x > 0 \Rightarrow$ allungamenti
- $\gamma_{xy} > 0 \Rightarrow$ rotazione oraria

Assi principali di deformazione e deformazioni principali:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon_{max} &= \epsilon_{ave} + R \\ \epsilon_{min} &= \epsilon_{ave} - R \end{aligned} \right.$$

Massimo scorrimento angolare nel piano:

$$\gamma_{max} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

IL COMPORTAMENTO MECCANICO DEI MATERIALI

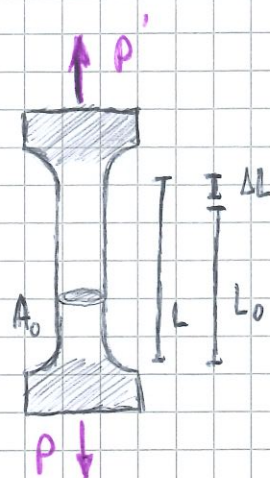
In questo capitolo descriveremo le modalità di prova miranti alla determinazione del comportamento meccanico dei materiali e ne vedremo i principali comportamenti, in quello elastico osserveremo le costanti

LA PROVA A TRAZIONE MONOASSIALE

Trattiamo la prova a trazione su un asta e misuriamo la deformazione sul tratto "L", avremo:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A_0}$$



Osserviamo ora il diagramma sforzo-deformazione nel caso di materiali **duttili** (es.: materiali metallici) e definiamo

σ_y = sforzo di snervamento e σ_u = sforzo ultimo

- Tratto **elastico-lineare** (AB) reversibile dove

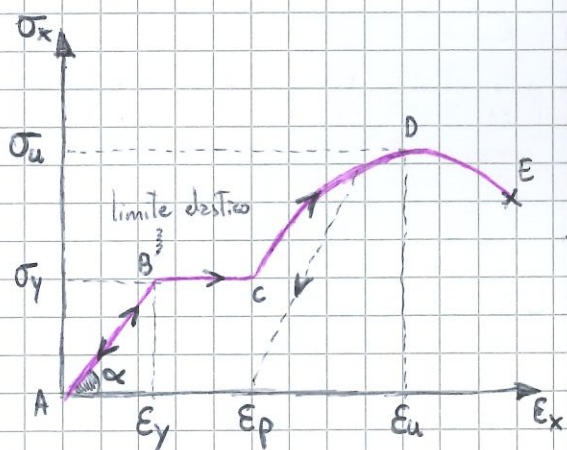
$$\sigma = \tan \alpha \cdot \epsilon = E \cdot \epsilon$$

con "E = modulo di Young" [GPa]

- Tratto di **snervamento**, ingresso nel campo plastico. Allo scarico si avrà una deformazione plastica (ϵ_p) (BC) (limite di proporzionalità)

- Tratto di **incrudimento** (CD)

- Tratto finale di **strizione** (DE) e conseguente **rottura** (E)

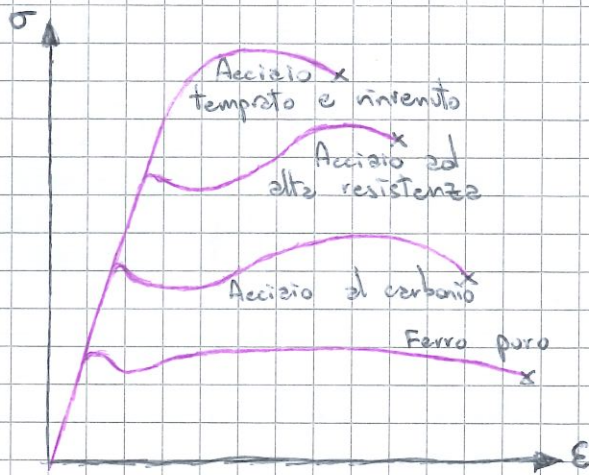
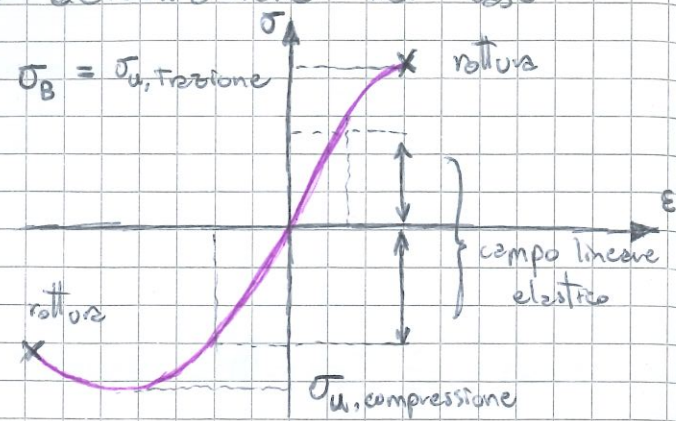


Vediamo le misure standard di **DUTTILITÀ** (L_B = lunghezza provino a rottura)

$$\Rightarrow \text{Allungamento percentuale} = 100 \cdot \frac{L_B - L_0}{L_0}$$

$$\Rightarrow \text{Riduzione percentuale dell'area} = 100 \cdot \frac{A_B - A_0}{A_0}$$

Osserviamo ora il diagramma sforzo-deformazione nel caso di materiali **fragili**: la rottura avviene appena superato il limite di elasticità, oltre il quale restano deformazioni permanenti. Questi materiali hanno un comportamento diverso a trazione e compressione.



Tornando ai materiali dotti avremo, al di sotto della tensione di snervamento, che:

$$\sigma = E \epsilon \quad (E = \text{modulo di elasticità normale})$$

La resistenza cambia con i processi di lega, i trattamenti termici e i processi di fabbricazione (laminazione, estrusione) ma la rigidità, ovvero il modulo di Young, non è influenzata da questi fattori.

LE COSTANTI ELASTICHE DEI MATERIALI ISOTROPI

Iniziamo dando qualche definizione:

- **Materiale ISOTROPO**: stesso comportamento meccanico in tutte le direzioni
- **Materiale OMOGENEO**: stesso comportamento meccanico in tutti i punti

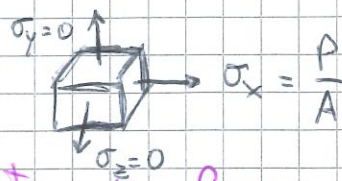
La legge di Hooke esprime in termini matematici la linearità esistente tra sforzi e deformazioni in campo elastico, ad esempio nella prova a trazione monoassiale:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

dove il modulo di Young (E) ha le stesse dimensioni dello sforzo (σ)

Per una barra snella caricata assialmente si hanno quelle formule precedenti, l'allungamento in direzione x è accompagnato da una contrazione nelle altre direzioni. Se il materiale è isotropo:

$$\epsilon_y = \epsilon_z \neq 0$$



di conseguenza introduciamo il coefficiente di Poisson (adimensionale; essenzialmente positivo), definito come:

$$\nu = \left| \frac{\text{deformazione trasversale}}{\text{deformazione assiale}} \right| = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

Consideriamo tre distinti stati di sforzo monoassiali, in cui un solo sforzo normale, per volta, è diverso da zero:

$$\bullet \sigma_x \neq 0 : \left[\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} ; \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} ; \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \right]$$

$$\bullet \sigma_y \neq 0 : \left[\epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} ; \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} ; \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \sigma_z \neq 0 : \left[\epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E} ; \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} ; \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \right]$$

Vediamo ora Legge di Hooke GENERALIZZATA: per un elemento soggetto a un carico pluriassiale le componenti normali di deformazione generate dalle componenti di tensione possono essere determinate tramite il principio di sovrapposizione degli effetti. Questo necessita delle seguenti condizioni:

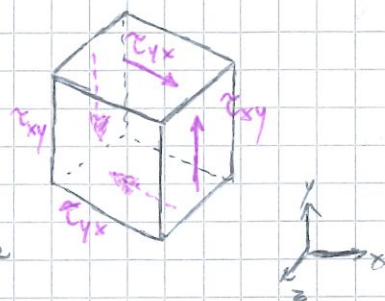
- ① la deformazione varia LINEARMENTE con la tensione
- ② le deformazioni sono piccole

Sotto queste condizioni:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \begin{bmatrix} 1 + 4 + 7 \end{bmatrix} = +\frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= \begin{bmatrix} 2 + 5 + 8 \end{bmatrix} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= \begin{bmatrix} 3 + 6 + 9 \end{bmatrix} = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned}$$

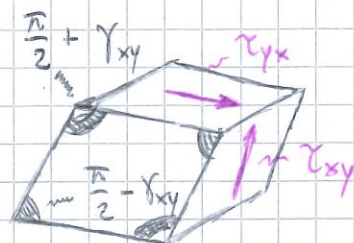
Affrontiamo ora il tema degli **scorrimenti**

angolari: un elemento cubico soggetto a tensioni tangenziali tenderà a deformarsi divenendo un parallelepipedo obliquo. La deformazione tangenziale è definita in termini di scorrimento angolare



$$\tau_{xy} = f(\gamma_{xy})$$

Il diagramma " τ - γ " ha lo stesso andamento di quello " σ - ϵ ", eccetto per il fatto che la resistenza è circa la metà. Per piccole deformazioni si ha:



$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

dove si introduce il **modulo di elasticità tangenziale** (G) del materiale [GPa].

Se gli sforzi restano al di sotto del limite di proporzionalità, la legge di Hooke generalizzata ci fornisce le deformazioni prodotte dal più generale stato di sforzo in un materiale isotropo:

LIMITI DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI ELASTICHE

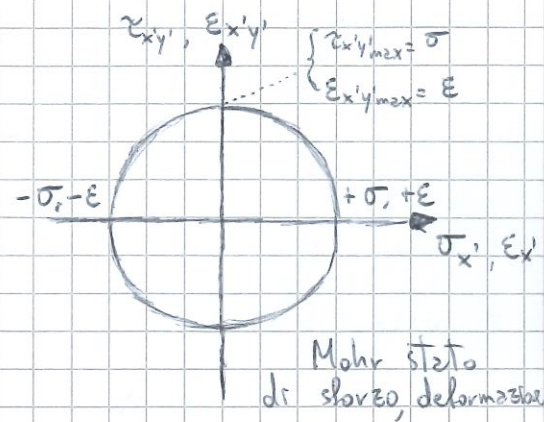
Una barra snella caricata assialmente si contrae nelle direzioni laterali e si allunga in direzione assiale: l'elemento \perp con le linee a (x,y) si deforma in un parallelepipedo rettangolo \Rightarrow deformazione NORMALE, mentre quello orientato in maniera diversa ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) si deforma divenendo un rombo \Rightarrow scorrimento ANGOLARE. La **relazione** tra le componenti di deformazione normale e tangenziale implica una relazione tra le costanti elastiche:

$$\frac{E}{2G} = (1 + \nu)$$

Stato di sforzo piano con sforzi principali uguali in modulo e di segno opposto ci portano alle seguenti deformazioni nel piano (le altre sono nulle)

$$\begin{aligned} \sigma_I = \sigma, \sigma_{II} = -\sigma, \sigma_{III} = 0 \\ \Rightarrow \begin{aligned} \epsilon_I &= \frac{\sigma_I}{E} - \nu \frac{\sigma_{II}}{E} = \epsilon \\ \epsilon_{II} &= \frac{\sigma_{II}}{E} - \nu \frac{\sigma_I}{E} = -\epsilon \end{aligned} \quad \text{con} \quad \epsilon = \sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) \end{aligned}$$

A 45° dalle direzioni principali degli sforzi:
tensioni tangenziali $\tau = \sigma$ con $\gamma = \tau/G$ e
deformazioni $\gamma/2 = \epsilon$



$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma}{G} = 2\epsilon = 2\sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) \quad \left\{ \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \right.$$

La variazione di VOLUME per unità di volume
-dilatazione- generata dallo stato tensionale $\bar{\epsilon}$:

$$\bar{\epsilon} = [(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z)] \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Per un elemento soggetto a pressione idrostatica $(-p)$ uniforme:

$$\bar{\epsilon} = -p \frac{3(1-2\nu)}{E} = -\frac{p}{K} \quad \text{con} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (\text{modulo di volume})$$

Senza la dimostrazione (su slide) vediamo i limiti delle costanti e il legame diretto matriciale

$$\begin{aligned} 1) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &\leq \nu < \frac{1}{2} \\ \frac{E}{3} &\leq G \leq \frac{E}{2} \end{aligned} \right. \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(\nu+1)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da altre considerazioni energetiche: ($E > 0$ $-1 < \nu < 0,5$ $G > 0$) e

se $\nu = -1$ le ultime due relazioni perdono di significato:

con coefficiente di Poisson negativo si parla di MATERIALI AUXETICI
ovvero si dilatano in senso trasversale alla sollecitazione
di trazione applicata

FENOMENI DIPENDENTI DAL TEMPO

Quanto visto precedentemente si riferisce a prove monotone quasi-statiche: la velocità di carico è tale per cui ogni volta l'incremento di carico viene applicato quando il provino ha raggiunto la configurazione di equilibrio.

Prove di carico molto veloci (carichi impulsivi), danno luogo a comportamenti differenti. Altre dipendenze del tempo sono quelle legate al fenomeno della **fatica** (carichi ripetuti un numero elevato di volte), e ai fenomeni della **viscosità** e del **rilassamento** (carichi costanti applicati per tempi molto elevati).

La resistenza a fatica decresce al crescere del valore dello sforzo e si descrive nei diagrammi S-N (sforzo - numero di cicli); inoltre quando lo sforzo è al di sotto di un valore noto come limite di fatica, non si ha collasso a valore di "N".

IL LEGAME ELASTICO E IL PROBLEMA DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

In questo capitolo presenteremo la formulazione matematica del problema del legame sforzi-deformazioni e mostreremo delle equazioni al fine di risolvere il problema elastico

IL LEGAME ELASTICO: DEFINIZIONI GENERALI

Materiale **elastico**: la generica componente p_{ij} dello stato di sforzo:

- all'istante t ,

- nel punto P che in un certo sistema di riferimento ha vettore posizione \vec{x}

è data da una funzione F_{ij} del punto e delle componenti del tensore di deformazione nel medesimo punto e al medesimo istante:

$$p_{ij}(\vec{x}, t) = F_{ij}(\epsilon(\vec{x}, t); \vec{x}) \quad i, j = x, y, z$$

$$p_{ij}(\vec{x}, t) = F_{ij}(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}, \epsilon_{xy}; x_p, y_p, z_p)$$

Se il materiale è omogeneo la funzione non dipende esplicitamente dalla posizione del punto, quindi:

$$p_{ij}(\vec{x}, t) = F_{ij}(\epsilon(\vec{x}, t)) = F_{ij}(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}, \epsilon_{xy})$$

Le funzioni F_{ij} descrivono una corrispondenza **BIUNIVOCa** e **MONOTONAMENTE CRESCENTE** tra il valore degli sforzi e quello delle deformazioni. Analizziamo ora il comportamento lineare:

- ogni sforzo è linearmente dipendente da ciascuna deformazione
- la relazione che lega il singolo sforzo con la singola componente di deformazione non dipende dalla presenza contemporanea delle altre componenti

In questo caso le funzioni \hat{F}_{ij} si riducono ad una combinazione lineare delle E_{kl} :

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_{ijkl} E_{kl}$$

dove "D" è il TENSORE QUADRUPO a 81 componenti, "solo" 36 indipendenti per la simmetria di sforzi e deformazioni

$$D_{ijkl} = D_{jikl}$$

$$D_{ijkl} = D_{ijlk}$$

Tenendo conto della simmetria di sforzi e deformazioni, la relazione si semplifica se allineiamo le componenti indipendenti di sforzo e deformazione in un vettore:

La matrice dei coefficienti D_{ijkl} si trasforma in una matrice d 6×6

$$\bar{p} = \bar{d} \cdot \bar{\epsilon}$$

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{zz} \\ P_{zy} \\ P_{zx} \\ P_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}; \quad \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ E_{zy} \\ E_{zx} \\ E_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}$$

Ciascuna delle 6 componenti

di sforzo \bar{p} è correlata con le 6 di deformazione tramite la matrice d :

$$P_{xx} = d_{11} E_{xx} + d_{12} E_{yy} + d_{13} E_{zz} + d_{14} E_{zy} + d_{15} E_{zx} + d_{16} E_{xy}$$

$$P_{yy} = d_{21} E_{xx} + d_{22} E_{yy} + d_{23} E_{zz} + d_{24} E_{zy} + d_{25} E_{zx} + d_{26} E_{xy}$$

$$P_{zz} = d_{31} E_{xx} + d_{32} E_{yy} + d_{33} E_{zz} + d_{34} E_{zy} + d_{35} E_{zx} + d_{36} E_{xy}$$

$$P_{yz} = d_{41} E_{xx} + d_{42} E_{yy} + d_{43} E_{zz} + d_{44} E_{zy} + d_{45} E_{zx} + d_{46} E_{xy}$$

$$P_{zx} = d_{51} E_{xx} + d_{52} E_{yy} + d_{53} E_{zz} + d_{54} E_{zy} + d_{55} E_{zx} + d_{56} E_{xy}$$

$$P_{xy} = d_{61} E_{xx} + d_{62} E_{yy} + d_{63} E_{zz} + d_{64} E_{zy} + d_{65} E_{zx} + d_{66} E_{xy}$$

Vista la bivanocità del legame elastico la relazione diretta può essere invertita:

$$\bar{\epsilon} = \bar{d}^{-1} \bar{p} = \bar{c} \cdot \bar{p}$$

IL LEGAME ELASTICO PER I MATERIALI ISOTROPO.

Vediamo un paio di definizioni

- **Materiale ANISOTROPO**: i coefficienti c_{ij} dipendono dal sistema di riferimento (in generale 36 coefficienti)
- **Materiale ISOTROPO**: coefficienti c_{ij} indipendenti dall'orientamento del sistema di riferimento (bastano due coefficienti)
- **Piano di simmetria elastica**: un materiale possiede un piano di simmetria elastica X, Y se ogni deformazione simmetrica rispetto al piano induce delle tensioni simmetriche rispetto allo stesso piano.
La presenza di un piano di simmetria elastica riduce i coefficienti indipendenti a 13. I materiali ORTOTROPI hanno tre piani di simmetria elastica mutuamente perpendicolari (legno, compositi): sono sufficienti 9 coefficienti

Per la costruzione del tensore avremo delle cose da rispettare:

- Gli sforzi normali non possono generare deformazioni tangenziali
- Gli sforzi tangenziali non possono generare deformazioni normali
- Gli sforzi tangenziali possono generare solo deformazioni tangenziali di pari indice

Detto ciò otteniamo le seguenti uguaglianze imposte dall'ISOTROPIA

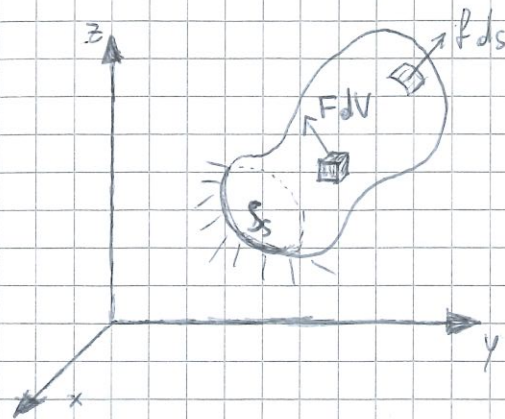
$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{bmatrix}$$

IL PROBLEMA DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

Corpo continuo di volume V delimitato da una superficie S di materiale omogeneo e comportamento elastico lineare. Sono assegnate le forze di volume F su V .

Sulla superficie S si distinguono:

- una porzione S_f su cui sono assegnate le forze di superficie f ,
- una porzione S_s su cui sono applicati i vincoli e assegnati gli spostamenti "s"



Problema: determinare sforzi, deformazioni e spostamenti

$$P_{ij} = P_{ij}(x, y, z) \quad ; \quad i, j = x, y, z \quad 6 \text{ funz. indipendenti (tensore simmetrico)}$$

$$E_{ij} = E_{ij}(x, y, z) \quad ; \quad i, j = x, y, z \quad 6 \text{ funz. indipendenti (tensore simmetrico)}$$

$$S_i = S_i(x, y, z) \quad ; \quad i = x, y, z \quad 3 \text{ funz. indipendenti}$$

Vediamo le diverse equazioni per diverse condizioni:

• EQUILIBRIO:
$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad \forall dV \in V$$

$$f_i = \sum_{j=1}^3 P_{ji} n_j \quad \text{su } S_f$$

• CONGRUENZA:
$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall dV \in V \quad (s=0 \text{ su } S_s)$$

• LEGAME ELASTICO:
$$p = d \cdot e$$

Si può dimostrare che la soluzione del problema elastico **ESISTE** e gode delle seguenti proprietà:

- è espressa in funzione dei valori limite dei carichi esterni
- Vale il principio di sovrapposizione degli effetti
- la soluzione è **UNICA** (Teorema di Kirchhoff) se vale l'ipotesi di piccoli spostamenti nelle due facce statica/cinematica

■ L'effetto combinato di più sistemi di forze che agiscono contemporaneamente sul corpo è pari alla somma degli effetti prodotti da ciascuno sistema applicato singolarmente sul corpo (a, b costanti in \mathbb{R})

$$F_i^A, f_i^A \rightarrow P_{ij}^A, \varepsilon_{ij}^A, S_i^A \quad F_i^B, f_i^B \rightarrow P_{ij}^B, \varepsilon_{ij}^B, S_i^B$$

$$\left. \begin{aligned} F_i &= a F_i^A + b F_i^B \\ f_i &= a f_i^A + b f_i^B \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} P_{ij} &= a P_{ij}^A + b P_{ij}^B \\ \varepsilon_{ij} &= a \varepsilon_{ij}^A + b \varepsilon_{ij}^B \\ S_i &= a S_i^A + b S_i^B \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial P_{ij}^A}{\partial x_j} + F_i^A = 0 \quad ; \quad \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial P_{ij}^B}{\partial x_j} + F_i^B = 0$$

$$\Rightarrow \sum_j \left(a \frac{\partial P_{ij}^A}{\partial x_j} + b \frac{\partial P_{ij}^B}{\partial x_j} \right) + a F_i^A + b F_i^B = 0$$

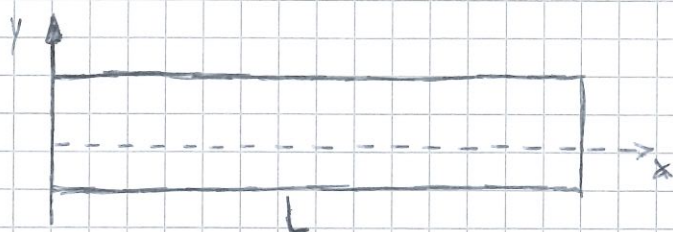
IL PROBLEMA DI DE SAINT VENANT

In questo capitolo presenteremo i solidi di De Saint Venant e definirne geometria, materiale e carichi; vedremo poi il postulato

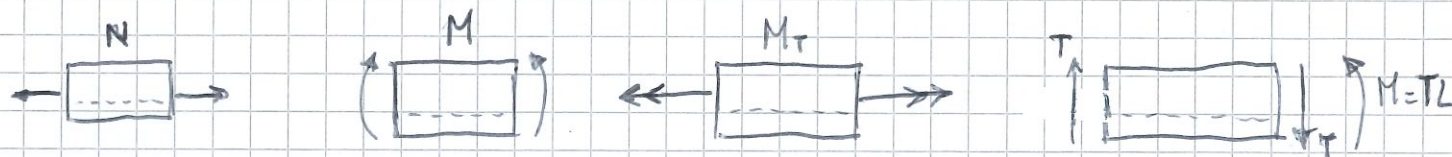
IL SOLIDO DI DE SAINT VENANT

Il **solido** di De Saint Venant è un modello matematico di un'asta:

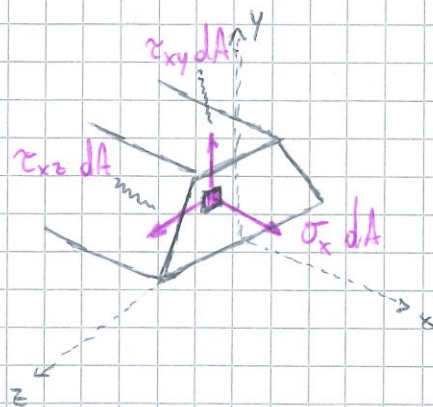
- prisma rettilineo di lunghezza molto maggiore delle dimensioni trasversali
- materiale omogeneo, isotropo, elastico lineare
- caricato solo sulle basi, superficie laterale scissa, forze di volume nulle.



Vediamo i sistemi di forze sulle basi (M_T = momento torcente)



L'asse x è diretto come l'asse geometrico dell'asta e gli altri assi y, z sono gli assi principali d'inerzia della sezione. Gli sforzi sui piani delle sezioni rette sono uno sforzo normale (diretto come x) e due sforzi tangenziali (diretti come y, z).



La distribuzione degli sforzi in ciascuna sezione deve essere in grado di riequilibrare le azioni interne agenti. Occorre imporre l'uguaglianza di risultanti e momenti risultanti.

Scriviamo le varie equazioni:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad \left\{ \quad T_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad \right\} \quad T_z = \int_A \tau_{xz} dA$$

$$M_T = M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \quad \left\{ \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad \right\} \quad M_z = \int_A -\sigma_x y dA$$

Sulle basi devono essere soddisfatte le condizioni al contorno:

$$f_i = \sum_{j=1}^3 p_{ji} n_j \quad \text{con} \quad [n_x = 1; n_y = n_z = 0]$$

quindi si avrà soltanto:

$$f_i = p_{xi} \Rightarrow f_x = \sigma_x; \quad f_y = \tau_{xy}; \quad f_z = \tau_{xz}$$

LE PROCEDURE DI SOLUZIONE

- Forma diretta: dati i carichi, trovare sforzi, deformazioni e spostamenti; complicazione matematica elevatissima
- Forma inversa: dati gli spostamenti, trovare deformazioni, sforzi e carichi corrispondenti; facile ma inutile
- Forma semi-inversa: qualche ipotesi a priori sulla soluzione, senza determinarla completamente. Se tutte le equazioni che governano il problema sono soddisfatte, la soluzione trovata è quella effettiva. Si assegnano a priori $(F=0, f=0)$ e $(\sigma_y = \sigma_z = \tau_{zy} = 0)$ e sono invece affidate alla soluzione la distribuzione delle forze sulle basi e $(\tau_{xy}, \tau_{xz}; \sigma_x)$ le componenti di spostamento

La metodologia di soluzione non considera la presenza di carichi sulla superficie laterale e la distribuzione di forze sulle basi del solido di fronte della distribuzione interna degli sforzi

IL POSTULATO DI DE SAINT VENANT

" Se si sostituisce ad una distribuzione S qualunque di forze, agente su una porzione di superficie di un corpo, una distribuzione differente S_1 , agente sulla stessa porzione, gli **effetti** delle due distribuzioni sulle parti del corpo sufficientemente lontane dalla regione di applicazione delle forze **sono gli stessi**, purché le due distribuzioni S e S_1 siano **staticamente equivalenti** (abbiano cioè la stessa risultante e lo stesso momento risultante) "

I carichi trasmessi attraverso **PIASTRE RIGIDE** \Rightarrow distrib. uniforme di tensioni e deformazioni mentre se si hanno dei carichi **CONCENTRATI** \Rightarrow generano picchi di tensione nelle immediate vicinanze del punto d'applicazione:

" La distribuzione della tensione può essere considerata **indipendente** dai dettagli delle modalità di applicazione del carico, eccetto nelle immediate **vicinanze** di questi punti di applicazione "

FORMULAZIONE MATEMATICA DEL PROBLEMA

Come accennato precedentemente facciamo delle assegnazioni a priori: eq. indefinite di equilibrio e condizioni al contorno su superficie laterale ($n_x = 0$)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}}$$

$$\bullet \quad f = 0 = p_y n_y + p_z n_z \Rightarrow \begin{cases} \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = 0 \\ \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z = 0 \\ \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = 0 \end{cases}$$

Equazioni di congruenza (inalterate):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \right\} \quad i, j, k = x, y, z \quad (3 \text{ eq.})$$

Note: equazioni del secondo ordine, sicuramente soddisfatte da campi di deformazione costanti o variabili linearmente.

Legge di Hooke generalizzata per i materiali isotropi.

Osserviamo la STRATEGIA DI SOLUZIONE: complicazione ancora elevata! ma la soluzione del problema elastico è unica (th. Kirchhoff) perciò se si è in grado, in base a considerazioni intuitive o basate sull'osservazione sperimentale, di fornire un'espressione per le p_{ij} ed una per le ε_{ij} tali:

- le p_{ij} e le ε_{ij} siano legate dalla **legge di Hooke generalizzata**
- le p_{ij} soddisfino le **eq. indefinite di equilibrio** e le condizioni al contorno sulla superficie laterale e sulle basi
- le ε_{ij} soddisfino le **eq. di congruenza**

si può dedurre che le p_{ij} e le ε_{ij} ipotizzate siano la vera e unica soluzione del problema

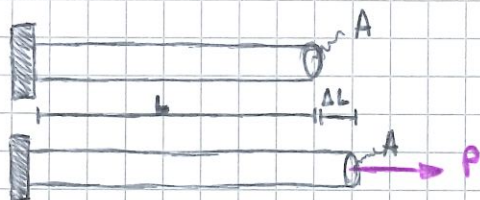
IL CASO DI DE SAINT VENANT DELL'AZIONE ASSIALE

Gli obiettivi di questo capitolo saranno principalmente legati all'azione assiale e agli spostamenti, inoltre vedremo l'effetto delle variazioni termiche in termini deformativi e tensionali.

DETERMINAZIONE DI SFORZI E DEFORMAZIONI

L'osservazione sperimentale mostra che un'asta soggetta a una forza **normale** al piano della sezione e passante per il baricentro:

- non si inflette
- subisce una variazione di lunghezza, direttamente proporzionale al carico applicato e alla lunghezza dell'asta.



$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \text{tensione}$$

$$\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \text{deformazione}$$

Il fenomeno dell'**INFISSIONE** è un fenomeno quasi esclusivamente legato a carichi in compressione, quelli a trazione raddrizzano l'asta. Gli sforzi tangenziali non sono necessari per l'equilibrio e la risultante degli sforzi normali deve passare per "G" ed essere costante lungo l'asta, che non deve inflettersi.

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

$$p_{xx} = \sigma_x = K = \text{costante incognita}$$

Ne deriva che le eq. di equilibrio, legge elastica e congruenza sono soddisfatte:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad \left| \quad \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{K}{E} \quad \left| \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} = -\frac{\nu K}{E} \right.$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$$

Vediamo l'equilibrio sulle basi

$$f_x = P_{xx} = \sigma_x \quad f_y = \tau_{xy} = 0 \quad f_z = \tau_{xz} = 0$$

risultante degli sforzi in direzione "x" e "y, z":

$$\bullet R_x = N = \int_A f_x dA = \int_A k dA = k \cdot A \Rightarrow K = \sigma_x = \frac{N}{A}$$

$$\bullet R_y = 0 = \int_A \tau_{yz} dA = 0 \quad ; \quad R_z = 0 = \int_A \tau_{xz} dA = 0$$

osserviamo ora il MOMENTO risultante degli sforzi:

$$M_x = 0 = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = 0$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z dA = \int_A k \cdot z dA = k \int_A z dA = k \cdot S_y = 0$$

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y dA = \int_A k \cdot y dA = k \int_A y dA = k \cdot S_z = 0$$

sono tutti nulli perché i momenti statici baricentrici sono pari a zero:

Dopo tutte queste premesse vediamo le prossime equivalenze, ovvero

$$\bullet \text{ legge di Hooke } \rightarrow \sigma_x = E \varepsilon_x, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{AE}$$

$$\bullet \text{ defin. deformazione estensionale } \rightarrow \text{ con } \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\Rightarrow \Delta L = \frac{NL}{AE}$$

$$\Delta L = \sum_i \frac{N_i L_i}{A_i E_i}$$

se variazioni di carico, sezione, materiale allora ↗

LE ASTE IPERSTATICHE

Entriamo ora nel merito dei problemi staticamente indeterminati: le strutture in queste condizioni non rendono possibile la determinazione delle forze interne e delle reazioni vincolari con sole equazioni di equilibrio. Sono staticamente indeterminate se " $GDV > GDL$ ".

Vogliamo una procedura di soluzione che ci consenta di calcolare le incognite iperstatiche separatamente dalle altre reazioni vincolari, note queste incognite le R.V. si possono trovare con le ECS

Osserviamo la procedura di soluzione:

- le reazioni iperstatiche sono sostituite con forze incognite che, insieme con gli altri carichi, devono produrre spostamenti rispettosi delle condizioni imposte dai vincoli.
- gli spostamenti causati dai carichi dati e dalle reazioni iperstatiche sono determinati separatamente e poi sommati (principio di sovrapposizione degli effetti)

CONGRUENZA: $\delta = \delta_L + \delta_R = 0$

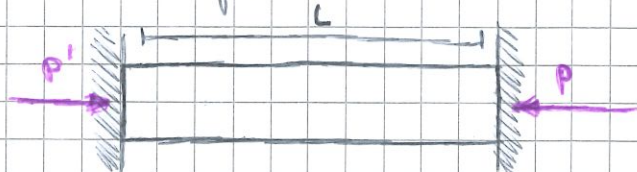
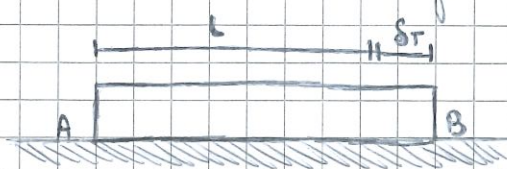
con " δ_L " spostamento dato dal carico e " δ_R " dato dalla reazione vincolare

L'EFFETTO DELLE VARIAZIONI TERMICHE

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T$$

$$\delta_T = \alpha (\Delta T) L$$

dove " α " è il coefficiente di dilatazione termica, ovvero variazione di lunghezza di un segmento unitario per effetto di una variazione termica unitaria. Potremo avere allungamento libero e impedito



Un cambio di temperatura determina un cambio di lunghezza ovvero una deformazione termica. Non vi è alcuna tensione associata alle deformazioni termiche a meno che l'allungamento non sia impedito dai vincoli.

Trattiamo il vincolo addizionale come iperstatico (P') e applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \rightarrow \delta_P = \frac{NL}{AE} \quad N = -P$$

La deformazione termica e la deformazione dovuta alla reazione iperstatica devono essere compatibili (δ_T e δ_P sono opposte)

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha(\Delta T)L + \frac{NL}{AE} = 0 \\ N = -AE\alpha(\Delta T) \\ \sigma = \frac{N}{A} = -E\alpha(\Delta T) \end{cases}$$

LA FLESSIONE: IL CASO DI DE SAINT VENANT

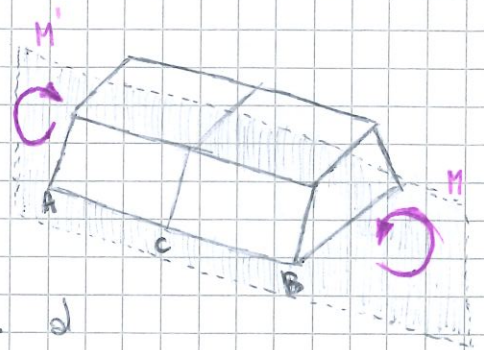
Durante questo capitolo impareremo a trattare i vari casi di flessione e ne calcoleremo gli sforzi derivanti, anche in eccentrica.

Inanzitutto parliamo della **flessione semplice**: elementi prismatici soggetti a coppie uguali ed opposte agenti nello stesso piano longitudinale. Vediamo qualche tipologia di **CARICHI**.

- **CARICO ECCENTRICO**: una forza assiale non applicata nel baricentro G della sezione genera un momento di trasporto.
- **CARICO TRASVERSALE**: un carico trasversale concentrato o distribuito produce sollecitazioni interne equivalenti ad una forza di taglio e ad una coppia.
- **PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE**: lo sforzo normale dovuto alla flessione semplice si può combinare con quello dovuto all'azione assiale e con la tensione tangenziale dovuta al taglio.

Vediamo un elemento simmetrico in flessione semplice:

- Le forze sulle basi (e in ogni sezione trasversale) sono equivalenti ad una coppia in un piano \perp alle sezioni rette, il cui momento è detto **flettente**.
- **$R = 0$**
- Il momento è lo stesso rispetto a qualunque asse \perp al piano della coppia e nullo rispetto a qualunque asse contenuto nel suo piano.
- Il vettore coppia è un "free vector" \Rightarrow si considera applicato in G .
- Definiamo **asse di sollecitazione** la retta intersezione tra il piano della sezione e il piano che contiene la coppia.



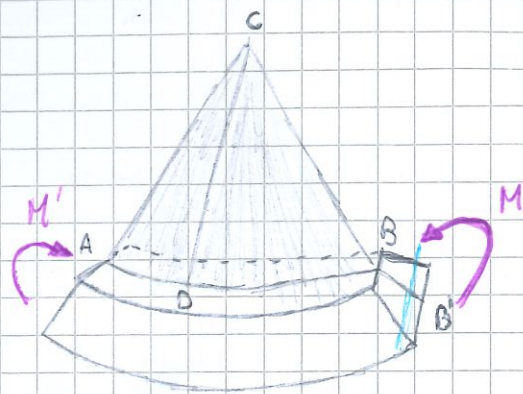
Analizziamo per primo il caso dove questo asse di sollecitazione è l'asse di simmetria di una sezione simmetrica.

LA FLESSIONE RETTA

1 L'elemento rimane simmetrico

2 Si inflette uniformemente a formare un arco di circonferenza ($M = \text{cost.} \Rightarrow \text{curvatura} = \text{cost.}$)

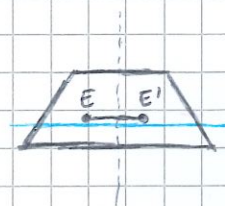
La trave si deforma nel piano in cui è sollecitata: "ABC piano di flessione" (\Rightarrow linea elastica)



3 La sezione trasversale si mantiene piana e passa per il centro dell'arco. Ipotesi di Bernoulli-Navier, conservazione sezioni piane, è:

"Le sezioni rette della trave a deformazione avvenuta rimangono piane e normali all'asse geometrico della trave nella configurazione deformata"

e gli spostamenti dei punti in direzione dell'asse geometrico devono sia soddisfare la condizione di planarità sia quella di simmetria \Rightarrow sono costanti sulla generica corda parallela a "z".



4 La sezione trasversale si mantiene piana e passa per il centro dell'arco. L'ipotesi di planarità implica che le deformazioni tangenziali siano tutte nulle, ovvero

$$\gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{array} \right\}$$

5 La parte superiore si accorcia e quella inferiore si allunga perciò \exists una superficie neutra // a lunghezza costante

6 La traccia delle fibre neutre sul piano della sezione è detto "asse neutro"

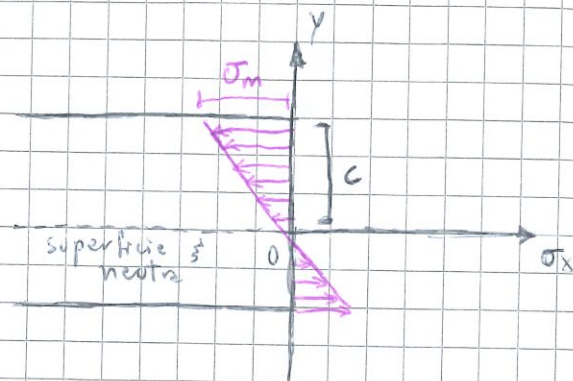
7 La direzione dell'asse neutro è nota per la simmetria

Senza la dimostrazione vediamo ora gli sforzi dovuti alla flessione retta: osserviamo quindi la formula di Navier

$$\sigma_x = - \frac{M_z \cdot y}{I_z} \rightarrow \epsilon_x = - \frac{M_z \cdot y}{E I_z}$$

con i valori di massima z :

$$\sigma_{max} = \frac{M_z \cdot c}{I_z}, \quad \epsilon_{max} = \frac{M_z \cdot c}{E \cdot I_z}$$



gli sforzi sono costanti con "z" e variano solamente con "y".

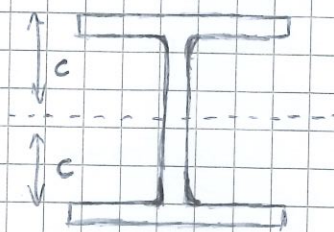
Se la medesima sezione venisse pure INFLESSA da un momento M_y il risultato è analogo:

- l'asse "z" diventa l'asse di sollecitazione
- l'asse "y" diventa l'asse neutro, \perp a "z" in virtù dell'annullarsi di I_{yz} perché y e z sono assi principali di inerzia

PROGETTO DI TRAVI INFLESSE

La tensione normale massima dovuta alla flessione

$$\sigma_m = \frac{M c}{I} = \frac{M}{S} \quad \text{con} \quad \begin{cases} I = \text{momento di inerzia della sezione} \\ S = \frac{I}{c} = \text{modulo di resistenza della sezione} \end{cases}$$



una sezione con modulo di resistenza più grande avrà tensione massima minore.

Si consideri una sezione RETANGOLARE:

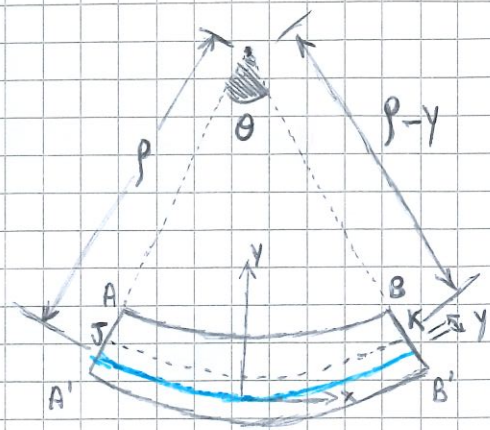
$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{h/2} = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} A h$$

quindi, a parità di area, la sezione più alta sarà più efficace nel resistere alla flessione.

Le travi strutturali in acciaio sono progettate in modo da avere un elevato modulo di resistenza della sezione

DEFORMAZIONI DOVUTE ALLA FLESSIONE

Segmento di trave di lunghezza L e deformazione avvenuta la lunghezza della superficie neutra rimane L . Per le restanti fibre longitudinali:



$$L' = (\rho - y) \theta$$

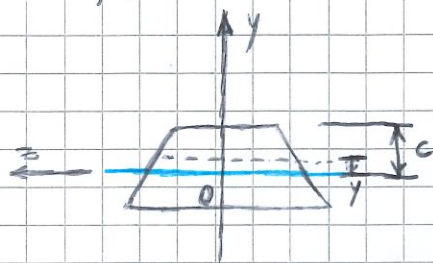
$$\delta = L' - L = (\rho - y) \theta - \rho \theta = -y \theta$$

$$\Rightarrow \epsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y \theta}{\rho \theta} = -\frac{y}{\rho} \quad \left| \quad \epsilon_{\max} = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_{\max} \right.$$

possiamo poi dedurre le altre formule:

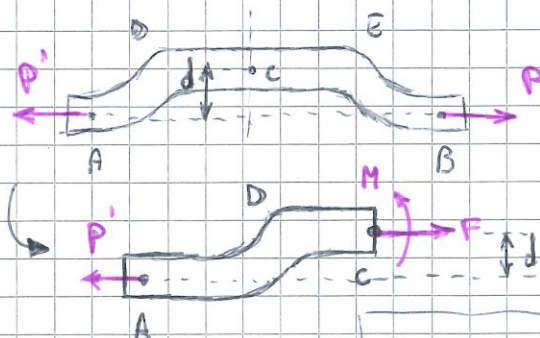
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_{\max}}{c} = \frac{1}{E c} \cdot \frac{M_z c}{I_z} = \frac{M_z}{E I_z}$$

$$\theta = \frac{L}{\rho} = \frac{M_z L}{E I_z}$$



AZIONE ASSIALE ECCENTRICA

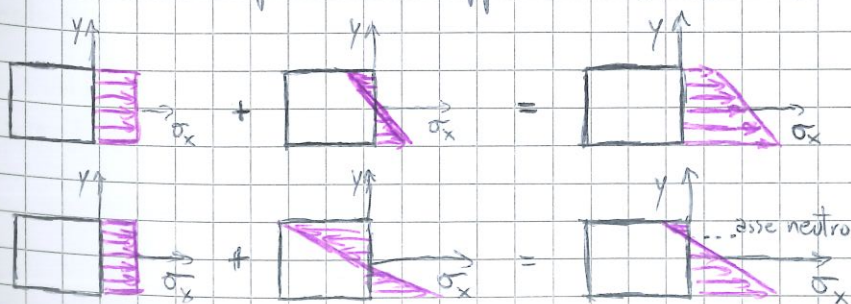
Le tensioni dovute a un carico eccentrico si trovano sovrapponendo le tensioni uniformi dovute al carico centrato e le tensioni lineari dovute al momento di trasporto



$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{centrato}} + (\sigma_x)_{\text{flessione}} = \frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z}$$

Carico eccentrico:
 $N = F = P$
 $M = Fd$

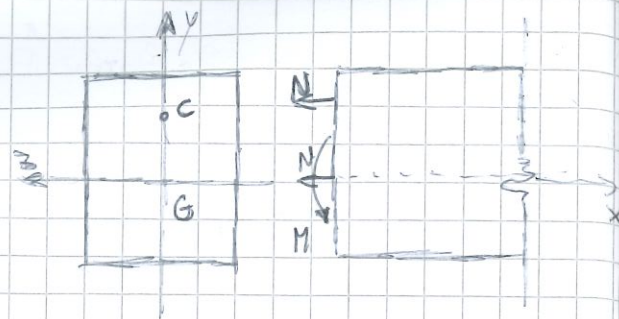
relazione valida se sforzo \ll limite proporzionalità, piccole deformazioni e lontano dai punti di applicazione del carico.



$N \ll \text{grande}$
 $M \ll \text{piccolo}$

$N \ll \text{piccolo}$
 $M \ll \text{grande}$

"C" viene definito CENTRO DI PRESSIONE
e l'asse di sollecitazione è l'intersezione
tra il piano della sezione e il piano che
contiene il momento \Rightarrow retta CG



$$M_z = -y_c N \quad \sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y$$

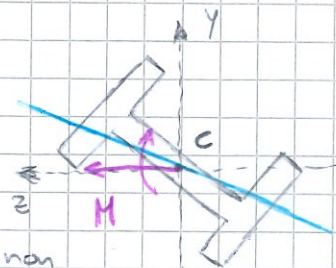
$$M_y = z_c N \quad \sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_y) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z$$

L'asse neutro non è mai baricentrico!!!

FLESSIONE DEVIATA

L'analisi della flessione semplice è stata limitata a travi soggette a
coppie flettenti agenti in un piano di simmetria \Rightarrow (asse neutro = asse coppia)
ma se le coppie flettenti non agiscono in un piano di simmetria
allora non possiamo assumere che la trave si infletta nel piano delle coppie.
In generale l'asse neutro della sezione
non coincide con l'asse della coppia.

Se l'ASSE DI SOLLECITAZIONE non coincide
con un asse principale d'inerzia, l'asse neutro non
è ortogonale all'asse di sollecitazione e la flessione si dice deviate.



La generica sezione retta della trave ruota attorno a un asse
che forma un angolo ϕ non nullo ($\neq 0$) con l'asse del vettore momento;
la trave si inflette in un piano che è diverso dal piano in cui è sollecitata.
Determiniamo le condizioni t.c. "asse neutro = asse della coppia":

- l'asse neutro passa per il baricentro \bar{G} : $S_z = \int y \, dA = 0$
- definisce la distribuzione delle tensioni: $M_z = \frac{\sigma_{max} I_z}{c}$, $I_z = \int y^2 \, dA$
- il vettore momento deve essere diretto lungo un asse centrale
principale d'inerzia $I_{yz} = \int yz \, dA = 0$
dove "I_{yz}" è il MOMENTO CENTRIFUGO

L'asse neutro (e.n.) è individuato dalle condizioni di nullo di:

- momento statico della sezione rispetto all'e.n.

$$\int_A \eta \, dA = S_n = 0$$

- momento d'inerzia centrato rispetto agli assi n-n e s-s

$$\int_A \eta \cdot z \, dA = J_{sn} = 0$$

" $J_{sn}=0$ " fornisce l'inclinazione dell'asse neutro n-n rispetto a una retta ortogonale all'asse di sollecitazione s-s: in generale i due, n-n e s-s, non sono ortogonali fra loro. Calcoliamo gli sforzi:

$$\epsilon_x = k \cdot \eta \quad \sigma_x = E \cdot \epsilon_x = E \cdot k \cdot \eta$$

$$\Rightarrow M_z \cos \phi = - \int_A \sigma_x \eta \, dA = - E \cdot k \int_A \eta^2 \, dA = - E \cdot k \cdot I_n$$

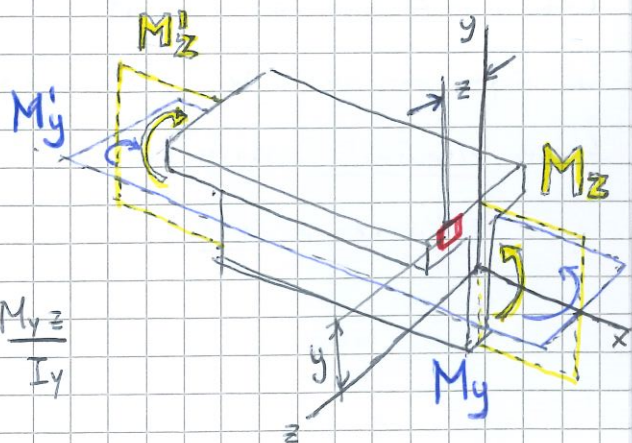
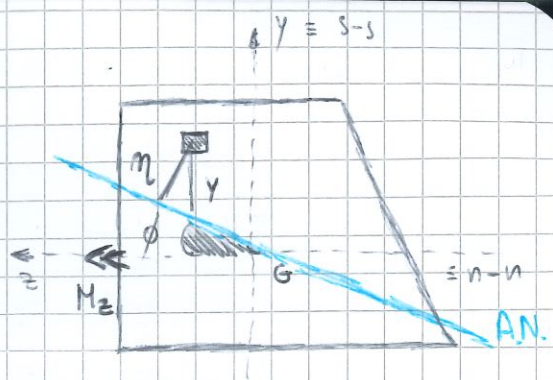
$$\Rightarrow k = \frac{-M_z \cos \phi}{E \cdot I_n} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = E \cdot k \cdot \eta = \frac{-M_z \cdot \eta \cdot \cos \phi}{I_n} \\ \eta = y \cdot \cos \phi \end{array} \right.$$

$$J = \int_A y^2 \, dA = \frac{1}{\cos^2 \phi} \cdot \int_A \eta^2 \, dA = \frac{I_n}{\cos^2 \phi} \quad \Rightarrow \quad I_n = J \cdot \cos^2 \phi$$

$$\Rightarrow \sigma_x = - \frac{M_z \cdot y \cos \phi \cdot \cos \phi}{J \cos^2 \phi} = - \frac{M_z \cdot y}{J}$$

Applichiamo la sovrapposizione per determinare le tensioni nel caso generale di flessione non simmetrica. Scomponiamo e sovrapponiamo:

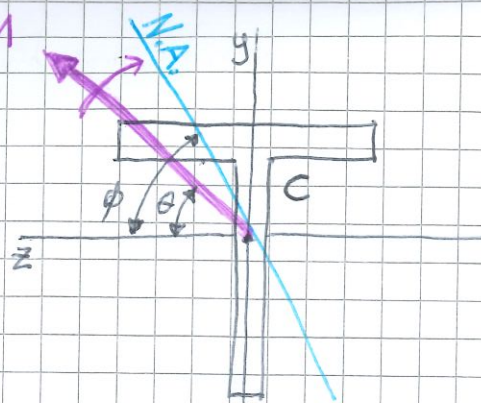
$$M_z = M \cos \theta \quad M_y = M \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$



Lungo l'asse neutro invece avremo

$$\sigma_x = 0 = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = -\frac{M \cos \theta y}{I_z} + \frac{M \sin \theta z}{I_y}$$

$$\Rightarrow \tan \phi = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$



Vediamo la convenzione di segno nel calcolo degli sforzi

- M_u e $M_v > 0$ se vettore momento (\vec{M}) diretto come l'asse
- (u, v) coordinate del punto, dotate di segno
- $\sigma_x > 0$ è di trazione

Posizione del vettore momento in un riferimento non principale: sono noti $M_y, M_z, I_y, I_z, I_{yz}$

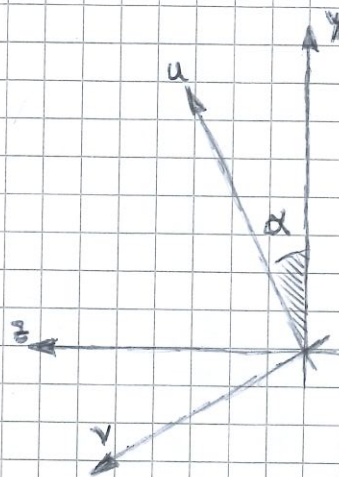
$$M_u = M_y \cos \alpha + M_z \sin \alpha$$

$$M_v = -M_y \sin \alpha + M_z \cos \alpha$$

$$u = y \cos \alpha + z \sin \alpha$$

$$v = -y \sin \alpha + z \cos \alpha$$

$$I_u, I_v = c \pm r$$



con i seguenti presupposti:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

$$c = \frac{I_y + I_z}{2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

PRESSOFLESSIONE DEVIATA

Consideriamo una trave rettilinea soggetta a

forze eccentriche uguali ed opposte. Tale

forza è uguale a 1 forza centrata e 2 coppie:

$$P = \text{forza centrata} = N$$

$$M_y = Pa$$

$$M_z = Pb$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti: la distribuzione di tensioni è

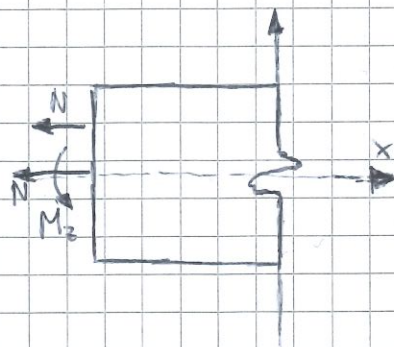
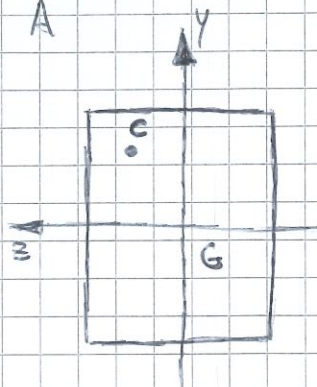
$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

e l'asse neutro può essere determinato dalla condizione

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = \frac{N}{A}$$

Vediamo il **CASO GENERALE**:

il punto C su cui è applicata l'azione assiale eccentrica ha entrambe le coordinate diverse da zero



$$M_y = N z_c \quad M_z = -N y_c$$

- Se y e z sono assi principali d'inerzia, si può applicare immediatamente il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_y) + \sigma_x(M_z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

- Se y e z non sono assi principali d'inerzia, dopo aver determinato i momenti di trasporto si segue la seguente procedura:

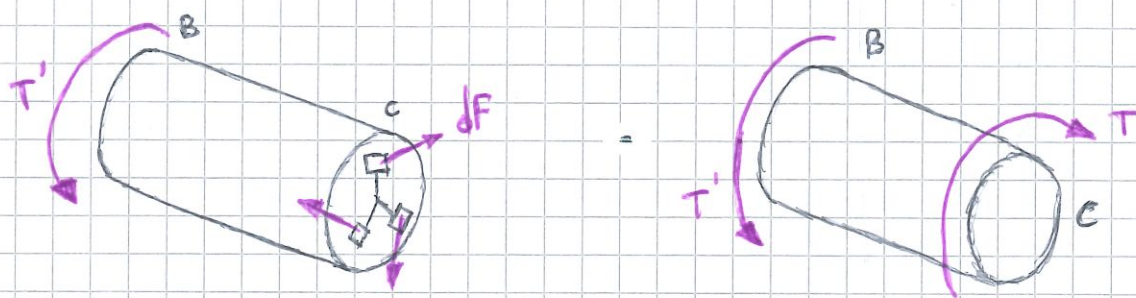
- si determina l'angolo α di cui gli assi principali u, v sono ruotati rispetto al riferimento di partenza
- si determinano i momenti principali di inerzia I_u e I_v
- si determinano i momenti flettenti M_u e M_v
- si determinano le coordinate dei punti di cui si vuole calcolare lo sforzo normale
- si calcola lo sforzo nel riferimento principale

$$\sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_u) + \sigma_x(M_v) = \frac{N}{A} + \frac{M_u}{I_u} v - \frac{M_v}{I_v} u$$

LA TORSIONE: IL CASO DI DE SAINT VENANT.

Dopo questa lezione sapremo affrontare il caso della torsione e riusciremo a calcolarne gli sforzi derivanti.

Vediamo i **carichi torsionali** su aste circolari: vogliamo determinare le tensioni e le deformazioni in alberi circolari soggetti a momenti torcenti. La turbina esercita una coppia torcente T e l'albero la trasmette al generatore, il quale reagisce con l'uguale e opposta T' .



Il momento risultante delle tensioni tangenziali è una coppia interna, uguale ed opposta alla coppia applicata.

$$T = \int \rho \, dF = \int \rho (\tau \, dA)$$

La distribuzione delle tensioni tangenziali:

- non è nota
- è staticamente indeterminata: occorre considerare le deformazioni prodotte dal momento torcente

Diversamente dalla tensione normale dovuta a carichi assiali, la distribuzione delle tensioni tangenziali dovuta a carichi torsionali non può essere assunta uniforme.

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE E CALCOLO DEGLI SFORZI

Il momento torcente produce tensioni tangenziali sulle facce perpendicolari all'asse dell'albero.

La simmetria di queste implica che \exists tensioni analoghe sulle facce perpendicolari.

Se consideriamo un albero formato da asticelle separate, quando si applicano due coppie uguali alle estremità, si osserva uno scorrimento tra le varie asticelle.

L'angolo di torsione dell'albero è proporzionale a torsione e lunghezza

$$\phi \propto T \quad \phi \propto L$$

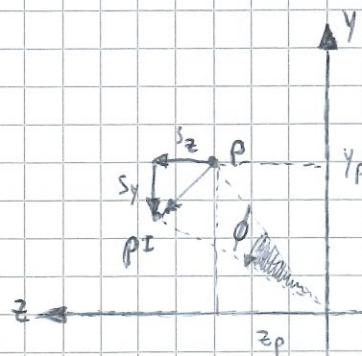
mentre le sezioni trasversali rimangono piane e indeformate poiché tale sezione è **assial simmetrica** \rightarrow quelle che non lo sono (es. quadrate) subiscono deformazioni fuori piano, detti ingobbamenti.

Analizziamo la deformazione NEL PIANO DELLA SEZIONE: (ripassiamo facendo analogia con rotazione in 2D e tensore vettore):

$$\phi = \alpha \cdot x \quad S_x = 0$$

$$S_y = -z \cdot \phi = -\alpha \cdot x \cdot z$$

$$S_z = +y \cdot \phi = +\alpha \cdot x \cdot y$$



Vediamo l'analogia con la rotazione 2D;

- w_z corrisponde a ϕ
- z_P corrisponde a $n_y dL$
- y_P corrisponde a $n_x dL$

Le deformazioni estensionali sono tutte nulle:

$$E_x = E_y = E_z = 0$$

Non c'è necessità di verificare le equazioni di congruenza!!!

Vediamo gli sforzi sul piano della sezione, note le deformazioni del legame elastico otterremo le seguenti, dove la soluzione dipende dal parametro **angolo di torsione unitario** (α):

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -G \cdot \alpha \cdot z$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = +G \cdot \alpha \cdot y$$

Se controlleremo le eq. indefinite di equilibrio noteremo sono VERIFICATE!
Dalle condizioni al contorno otterremo: (formule senza dimostrazione)

$$R_y = R_z = 0$$

$$J_p = \frac{\pi c^4}{2}$$

$$\alpha = \frac{M_t}{G J_p}$$

$$\tau_{xy} = - \frac{M_t}{J_p} \cdot z$$

$$\tau_{xz} = \frac{M_t}{J_p} \cdot y$$

$$\tau_{xs} = \frac{M_t}{J_p} \cdot r$$

$$\phi = \alpha \cdot L = \frac{M_t L}{G \cdot J_p}$$

dove "s" è un'ascissa curvilinea perpendicolare al raggio

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE E CALCOLO DEGLI SFORZI

Sezione interna di un'asta: quando si applica il momento torcente, un elemento quadrato all'interno del cilindro si trasforma in un rombo. Le sezioni di estremità rimangono piane: lo scorrimento angolare è uguale all'angolo tra le linee AB e A'B. Se "r" piccolo, la lunghezza AA':

$$L \gamma = \rho \phi \quad \text{oppure} \quad \gamma = \frac{\rho \phi}{L}$$

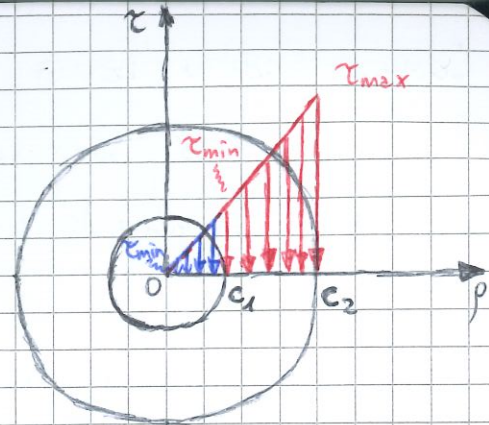
Lo scorrimento angolare è proporzionale all'angolo di torsione e al raggio

$$\rightarrow \gamma_{\max} = \frac{c \phi}{L} \quad \text{e inoltre} \quad \gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$

dove "ρ" è il raggio variabile in coordinate polari

Se si moltiplica la precedente per il modulo di elasticità tangenziale e tenendo conto della legge di Hooke ($\tau = G\gamma$) otterremo

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\max} \Rightarrow \tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$



Se nel disegno è letto " $c_1 = 0$ " allora $c_2 = c$ e lo sforzo minimo sarà " τ_{\min} ", mentre se " $c_1 \neq 0$ " allora sarà " τ_{\min} "; si avranno due formule collegate da usare nei due casi:

$$J = \frac{1}{2} \pi c^4 \quad \text{oppure} \quad J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4)$$

Ricordiamo che la somma dei momenti delle forze elementari esercitate su ogni sezione è uguale al momento torcente agente sull'albero:

$$T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{c} J$$

i seguenti risultati sono conosciuti come **formule della torsione elastica**

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \Rightarrow \tau = \frac{T\rho}{J}$$

da tutte le precedenti troviamo che

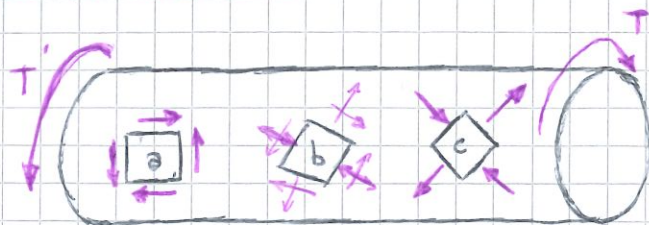
$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad \left[\pm \right] \quad \tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{JG}}$$

Se M_t o la sezione dell'albero variano con " x ", l'angolo di torsione è la somma algebrica delle rotazioni dei singoli tratti dell'albero mentre, se la sezione varia con continuità, l'angolo di torsione è dato da un integrale:

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \quad \vdots \quad d\phi = \frac{T dx}{JG} \Rightarrow \phi = \int_0^L \frac{T dx}{JG}$$

COMPORTAMENTO DELLE ASTE SOGGETTE A TORSIONE

Gli elementi "a" sono soggetti solo a tensioni tangenziali e sono in PURO TAGLIO.

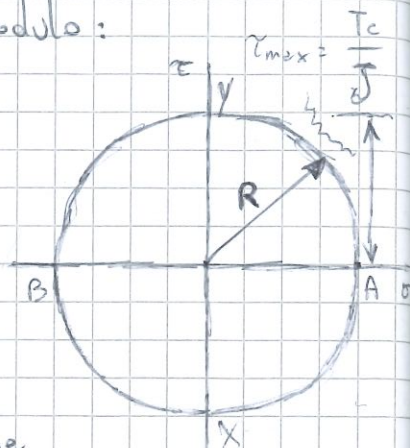


L'elemento "c" è soggetto a trazione su due facce e a compressione sulle altre due \rightarrow l'elemento "b" è una combinazione. Tutte le tensioni agenti su "a" e "c" hanno lo stesso modulo:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$

$$\sigma_{45^\circ} = \pm \frac{Tc}{J}$$

A lato notiamo il cerchio di Mohr per la torsione



I materiali duttili cedono per taglio mentre i materiali fragili sono più deboli se sottoposti a trazione. I primi cedono nel caso "a" e i secondi in "c".

TORSIONE DI ASTE AVENTI SEZIONE NON CIRCOLARE

Le precedenti formule della torsione sono valide per alberi con sezioni assialsimmetriche o circolari. Le sezioni trasversali piane di un'asta non circolare non rimangono piane e la distribuzione delle tensioni e delle deformazioni non varia linearmente.

Per sezioni trasversali rettangolari uniformi:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 a b^2}$$

$$\phi = \frac{TL}{c_2 a b^3 G}$$

dove c_1, c_2 sono coefficienti per barre rettangolari in torsione, cosa approssimabile per grandi valori di a/b .

Vediamo il caso di alberi cavi con parete sottile: sommando le forze nella direzione x esercitate su AB otteniamo il flusso di taglio (q)

$$\sum F_x = 0 = \tau_A (t_A \Delta x) - \tau_B (t_B \Delta x)$$

$$\Rightarrow q = \tau t \quad (\tau_A t_A = \tau_B t_B)$$

La tensione tangenziale varia inversamente con lo spessore. Calcoliamo il momento torcente dell'albero dall'integrale dei momenti dovuti alle tensioni tangenziali

$$dM_o = \rho dF = \rho \tau (t ds) = q (\rho ds) = 2 q dA$$

$$T = \oint dM_o = \oint 2 q dA = 2 q A \Rightarrow \tau = \frac{T}{2 t A}$$

L'angolo di rotazione vale invece:

$$\phi = \frac{TL}{4 A^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

IL TAGLIO: IL CASO DI DE SAINT VENANT

Il taglio nasce per effetto delle forze trasversali ed è sempre accompagnato da un momento flettente. Lavoriamo nell'ipotesi di taglio agente lungo un asse di simmetria retta.

Un'asta può sperimentare un valore di taglio in un punto $O(x_0, y_0)$, con assi u, v e origine in G , portandosi dietro un momento flettente e un momento torcente. Verrà chiamato **centro di taglio** tale punto O scelto in maniera tale che non si abbiano deformazioni di tipo torsionale all'interno del solido di De Saint Venant: se la trave ha un asse di simmetria retta, il centro di taglio vi giace sopra.

Vediamo le CONDIZIONI DI EQUILIBRIO: la distribuzione delle tensioni normali e tangenziali deve soddisfare

$$F_x = \int \sigma_x dA = 0$$

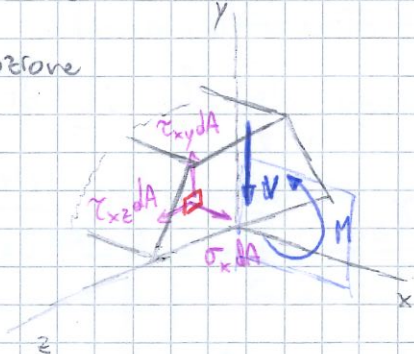
$$M_x = \int (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA = 0$$

$$F_y = \int \tau_{xy} dA = -V$$

$$M_y = \int z \sigma_x dA = 0$$

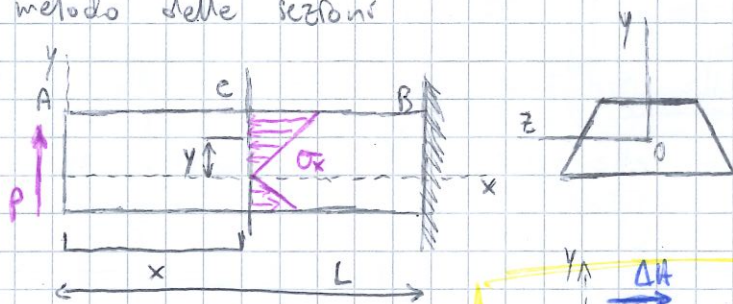
$$F_z = \int \tau_{xz} dA = 0$$

$$M_z = \int (-y \sigma_x) dA = M$$



Gli sforzi tangenziali possono essere determinati in base alle condizioni di equilibrio, facendo uso del metodo delle sezioni.

$$M_z = T_y x$$

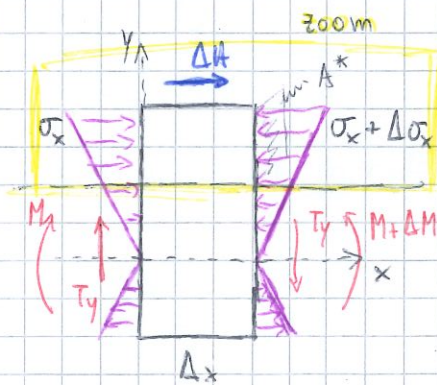


Andiamo a trovare tramite diversi passaggi la formula dello **spostamento angolare** ($\Delta\theta$):

$$\Delta M_z = T_y \Delta x \Rightarrow \Delta \sigma_x = - \frac{\Delta M_z}{I_z} - y = - \frac{T_y \Delta x}{I_z} - y$$

$$\Delta\theta = \int_{A^*} (\sigma_x + \Delta\sigma_x) dA - \int_{A^*} \sigma_x dA = \frac{T_y}{I_z} \Delta x \int_{A^*} y dA$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{T_y \cdot S_z^*}{I_z} \cdot \Delta x$$



Più che spostamento angolare si tratta di una forza, sull'unità di lunghezza, che deve essere sviluppata dalla trave affinché non si presenti lo spostamento/scorrimento delle fibre del materiale (S_z^* = momento statico) e il flusso del taglio (q), con $S_z = Q_z$, vale

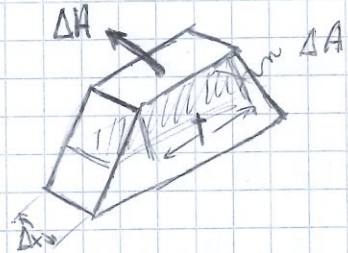
$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{V_y Q_z}{I_z} \quad \leftarrow \quad Q_z = \int_A y \, dA, \quad I_z = \int_{A+A'} y^2 \, dA$$

inoltre si può notare che $\Delta A = -\Delta A'$, $q = -q'$

CALCOLO DELLE TENSIONI TANGENZIALI

La tensione tangenziale media sulla faccia orizzontale dell'elemento si ottiene dividendo la forza orizzontale sull'elemento per l'area della faccia vediamo la formula di Jourawsky, ovvero:

$$\tau_{ave} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{q \Delta x}{\Delta A} = \frac{V_y Q_z}{I_z} \frac{\Delta x}{\Delta A} = \frac{V_y Q_z}{I_z t}$$



$$\Delta H = \frac{T_y \cdot S_z^*}{I_z} \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad \Delta A = \Delta x \cdot \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} \, dz = \Delta x \cdot t \cdot \bar{\tau}_{xy} \quad (\text{con } \tau_{xy} = \tau_{yx})$$

L'integrale è il valor medio di τ_{yx} che varia con " S_z^*/t ": massima al baricentro, nulla ai lembi estremi. Convenzione di segno: $\tau_{xy} > 0$ entra nella porzione di sezione isolata.

In sezione rettangolare, di uso comune, avremo ($c = \frac{1}{2}b$) [□]

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3}bc^3 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \frac{V_y Q_z}{I_z b} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \Rightarrow \tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A}$$

stesso discorso per i profilati a doppio t [I]

$$\tau_{xy, ave} = \frac{V_y Q_z}{I_z t} \quad \tau_{xy, max} = \frac{V_y}{A_{web}}$$

TENSIONE TANGENZIALE SU UNA SEZIONE ARBITRARIA

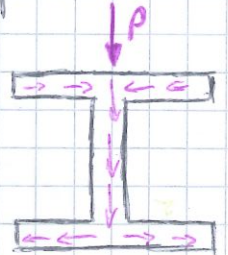
Abbiamo esaminato solo componenti verticali come τ_{xy} , vediamo ora quella orizzontale τ_{xz} : se consideriamo un elemento curvilineo, non squadrato, delimitato dalla superficie esterna fatto da CAD'C' :

$$\sum F_x = 0 = \Delta H + \int_a (\sigma_D - \sigma_C) dA$$

Tra cui che per la differenza relativa all'area di integrazione, è lo stesso risultato ottenuto prima che conduce alle formule precedenti.

Idem per il caso di doppia T a pareti sottili, dove:

$$\tau_{xy} \approx 0 \quad \text{per le ali} \quad \text{e} \quad \tau_{xz} \approx 0 \quad \text{nell'anima}$$

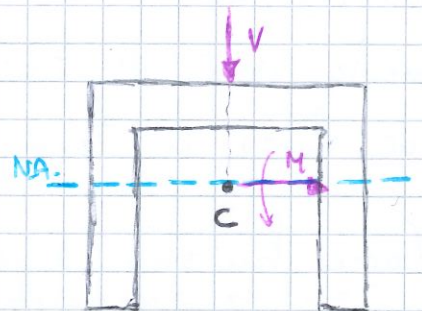


CENTRO DI TAGLIO

- Una trave caricata in un piano verticale di simmetria si deforma nel piano di simmetria SENZA TORCERSI

$$\sigma_x = - \frac{M_z y}{I_z}$$

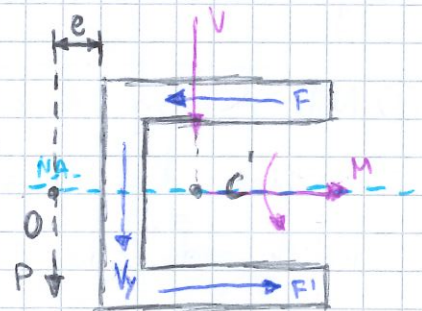
$$\tau_{ave} = \frac{V_y Q_z}{I_z t}$$



- Travi prive di un piano verticale di simmetria in generale si INFLETTONO e si TORCONO sotto il carico

$$\sigma_x = - \frac{M_z y}{I_z}$$

$$\tau_{ave} \neq \frac{V_y Q_z}{I_z t}$$



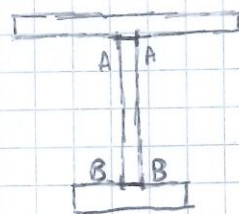
Se il taglio è applicato f.d. la trave non si torce, la distribuzione delle tensioni tangenziali deve soddisfare la condizione

$$\tau_{ave} = \frac{V_y Q_z}{I_z t} ; \quad \underline{V_y} = \int_B^D q \, ds ; \quad \underline{F} = \int_A^B q \, ds = - \int_D^E q \, ds = - \underline{F'}$$

F e F' formano una coppia "Fh" per cui è necessario applicare un momento torcente in appoggio al taglio: $Fh = Ve$. Se il carico P è applicato in D la trave si inflette e non si torce \Rightarrow questo punto è detto CENTRO DI TAGLIO.

CRITERI DI VERIFICA

Consideriamo una sezione a "doppio T" ad ali disuguali e vediamo la co-presenza di sforzi normali e tangenziali:



- Sul baricentro $\sigma_x = 0$ e τ_{xy} massima
- ai lembi estremi delle ali σ_x massima e $\tau_{xy} = 0$
- Nelle sezioni A-A e B-B valori elevati sia di σ_x sia di τ_{xy}

Al lembo inferiore e superiore devo controllare che sia

$$\sigma \leq \sigma_{amm}$$

$$\tau \leq \tau_{amm}$$

sul baricentro invece. Nelle sezioni A-A, B-B dove ho contemporaneamente valori di questi due sforzi elevati posso analizzare lo stato di sforzo in termini di sforzi principali.

Come facciamo a valutare il limite di una struttura e un suo margine di sicurezza? **Metodo delle tensioni ammissibili:**

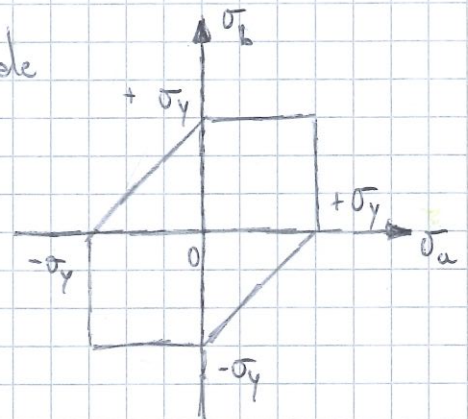
1. Noti gli sforzi in ciascun punto della struttura è possibile scegliere una funzione degli sforzi principali $f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ da assumere come indice del grado di sollecitazione
2. Per ciascun materiale di costruzione si determinano sperimentalmente i valori limite degli sforzi nel materiale:
 - per i materiali FRAGILI sono gli sforzi di rottura, a trazione $\sigma_{R,t}$ e a compressione $\sigma_{R,c}$;
 - per quelli duttili sono gli sforzi allo snervamento, a trazione $\sigma_{sn,t}$ e a compressione $\sigma_{sn,c}$;

③ I valori ammissibili degli sforzi - a trazione $\sigma_{amm,t}$ e a compressione $\sigma_{amm,c}$ - si ottengono dividendo i valori limite per un **fattore di sicurezza** $\rightarrow F.S. \geq 1$

④ È possibile quindi determinare e calcolare la funzione $f(\sigma_{amm,t}, \sigma_{amm,c})$ da confrontare con la funzione precedente

Vediamo direttamente i criteri di snervamento per materiali duttili:

• Criterio di **Guest-Tresca**: un componente strutturale è in sicurezza finché la massima tensione tangenziale, che si ha in un provino soggetto a prova di trazione monassiale allo snervamento, è maggiore della massima tensione tangenziale

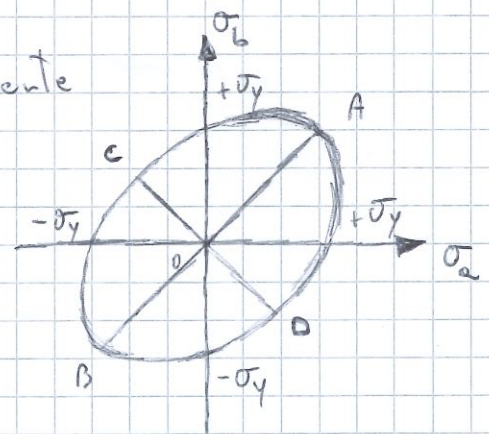


$$\tau_{max} < \tau_y = \frac{\sigma_y}{2}$$

Se σ_a e σ_b hanno segni uguali oppure opposti, rispettivamente avremo

$$\tau_{max} = \left| \frac{\sigma_a}{2} \right| \text{ or } \left| \frac{\sigma_b}{2} \right| < \frac{\sigma_y}{2} \quad \left\{ \quad \tau_{max} = \frac{|\sigma_a - \sigma_b|}{2} < \frac{\sigma_y}{2} \right.$$

• Criterio di **Huber-Hencky-von Mises**: un componente strutturale è in sicurezza anche l'energia di distorsione per unità di volume è minore di quella che si ha in un provino sottoposto a prova di trazione all'atto dello snervamento



$$u_d < u_y$$

$$\frac{1}{6G} (\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2) < \frac{1}{6G} (\sigma_y^2 - \sigma_y \cdot 0 + 0^2) \rightarrow \sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_y^2$$