SERIE NUMERICHE

data una successione di numeri reali a_n, chiamiamo serie di termine generale a_n l'operazione che indichiamo nel seguente modo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

la successione S_n seguente è detta somma parziale:

$S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; ... ; $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$; ...

Una serie può essere convergente, divergente positivamente o negativamente e infine oscillante se tale è la successione delle sue somme parziali. Una serie NON oscillante è anche detta regolare.

Se una serie è regolare, il limite della successione delle sue somme parziali è detto somma della serie, e si indica nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

Studiare il carattere della serie significa capire che andamento ha la serie. Per farlo applichiamo dei criteri (che dipendono dal tipo di serie che abbiamo).

SERIE DI MENGOLI $\rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

OPERAZIONI CON LE SERIE

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = A + B$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n) = \lambda A$

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA

Se la serie è convergente la successione a_n è infinitesima

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ CONVERGE} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

SERIE GEOMETRICA → $\sum_{m=0}^{+\infty} h^m$

considerando la successione delle somme parziali

$S_0 = 1$, $S_1 = 1+h$, $S_2 = 1+h+h^2, \dots,$ $S_n = 1+h+h^2+\dots+h^m, \dots$

$$S_n = \begin{cases} m & \text{se } h=1 \\ \frac{1+h^{m+1}}{1-h} & \text{se } h\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{m\to+\infty} S_m = \sum_{m=1}^{+\infty} h^m = \begin{cases} +\infty & \text{se } h\geq 1 \\ \frac{1}{1-h} & \text{se } |h|<1 \end{cases}$$

SERIE ARMONICA → $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m}$

questa serie ha termine generale infinitesimo, ma diverge positivamente. Per dimost. questo si verifica che $\lim_{m\to+\infty} S_n = +\infty$

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA → $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha}$

- $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha}$ CONVERGE SE $\alpha>1$
- $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha}$ DIVERGE POSITIVAMENTE SE $\alpha\leq 1$

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI → $\sum_{m=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n\geq 0$

è detta serie a termini non negativi la serie il cui termine generale è maggiore uguale a zero. Essa è regolare, ovvero converge o diverge positivamente.

↳ CRITERI DI CONVERGENZA PER LE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

1) CRITERIO DEL CONFRONTO

$\sum_{m=1}^{+\infty} a_n$ $(a_n\geq 0)$; $\sum_{m=1}^{+\infty} b_n$ $(b_n\geq 0)$ con $a_n\leq b_n$. Allora valgono le seguenti implicazioni:

- $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n$ CONVERGE
- $\sum a_n$ DIVERGE POSITIVAMENTE $\Rightarrow$ $\sum b_n$ DIVERGE POSITIVAMENTE

2) CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

date due serie a termini non negativi, se $\lim_{m\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in]0;+\infty[$ allora le due serie hanno lo stesso carattere

3) CRITERIO DEGLI INFINITESIMI

data una serie a termini non negativi, se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = L \in]0;+\infty[$$; allora avremo che:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ CONVERGE SE $\alpha > 1$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ DIVERGE POSITIVAMENTE SE $\alpha \leq 1$

4) CRITERIO DELLA RADICE

data una serie a termini non negativi (t. generale a_n), se esiste il seguente limite:

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, valgono le seguenti implicazioni:

- $a > 1 \Rightarrow$ la serie è convergente
- $a < 1 \Rightarrow$ la serie diverge positivamente
- $a = 1 \Rightarrow$ nulla si può dire sul carattere della serie, occorre usare un'altro criterio

5) CRITERIO DEL RAPPORTO

data una serie a termini non negativi (t. generale a_n), se esiste il seguente limite:

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, valgono le seguenti implicazioni:

- $a > 1 \Rightarrow$ la serie diverge positivamente
- $a < 1 \Rightarrow$ la serie è convergente
- $a = 1 \Rightarrow$ nulla si può dire sul carattere della serie, occorre usare un'altro criterio

SERIE A SEGNI ALTERNI → $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ con $a_n \geq 0$

l'unico modo per studiare il carattere della serie a segni alterni è sfruttare:

IL CRITERIO DI LEIBNITZ

↳ data una serie a segni alterni, se la successione $\{a_n\}$ è non negativa, decrescente e infinitesima, allora la serie converge.

Inoltre, la successione delle somme parziali S_n e quella della serie S, risulta:

$S_{2n} \leq S_{2n+2}$, $S_{2n-1} \geq S_{2n+1}$, $|S_n - S| \leq a_{n+1}$

- la serie armonica a segni alterni è convergente, poiché sono banalmente verificate tutte le ipotesi del teorema di Leibnitz.

- la serie è detta assolutamente convergente se è convergente la serie del valore assoluto (o modulo) del termine generale.
  se la serie è assolutamente convergente è anche convergente (il viceversa NON VALE).