

DINAMICA ROTAZIONALE

Studio il moto di sistemi che ruotano attorno a un punto fisso (polo) e l'effetto dei momenti delle forze applicate al sistema

• MOMENTO ANGOLARE

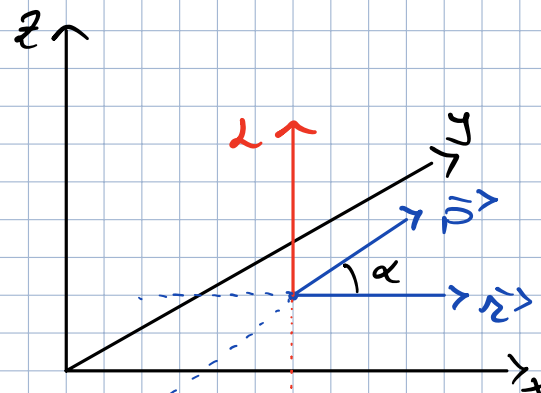
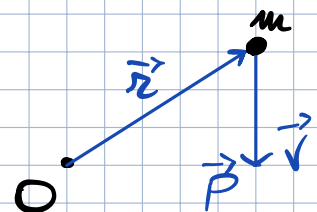
• $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ quantità di moto

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

mom. ang. di un punto materiale di massa m che muove a velocità \vec{v} rispetto a un punto O

prodotto vettoriale

- \vec{L} :
- Modulo $L = r \cdot p \cdot \sin(\alpha)$
 - direzionale \perp sia a \vec{r} che a \vec{p}
 - Verso secondo la regola della mano destra
 - Unità di misura $[L] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$



... per un sistema composto da n punti materiali...

$$\vec{L}_{\text{TOT}} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n$$

Il momento angolare totale è la somma dei mom. ang.

• \vec{L} se il punto si muove di moto circolare

Nel moto circolare la velocità \vec{v} è tangenziale
da cui è sempre \perp a \vec{r} , inoltre nei

moti circ. unif. $v_t = \omega \cdot r$

per cui: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$

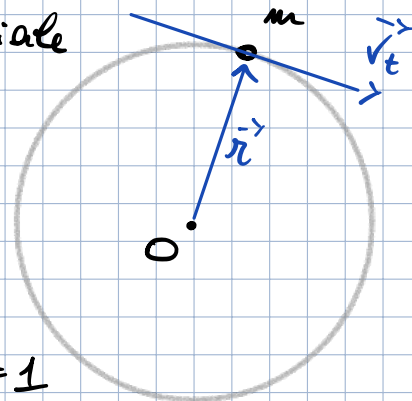
$\rightarrow L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin(\alpha)$, con $\alpha = 90^\circ \rightarrow \sin(90^\circ) = 1$

$L = r \cdot m \cdot v = m \cdot r^2 \cdot \omega$

\uparrow
 $v = \omega \cdot r$

$\rightarrow L = m r^2 \omega$

* Valida per punti materiali che si muovono di moto circolare uniforme



MOMENTO D'INERZIA

Il momento d'inerzia di un corpo rigido misura la sua "resistenza" alla variazione del suo moto angolare

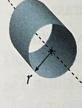




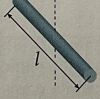
Per un punto materiale di massa $m \rightarrow I = m \cdot r^2$ ← distanza dell'asse di rotazione
 Unità di misura: $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
 mom. d'inerzia

Per corpi rigidi notevoli, il momento d'inerzia ha diverse formule che si trovano tabellate

Momento angolare (L) in funzione del momento d'inerzia (I):

$$L = I \cdot \omega$$

"Il momento d'inerzia dipende da come è distribuita la massa (o le masse) del corpo rigido attorno all'asse di rotazione"

	Guscio cilindrico, rispetto all'asse $I = mr^2$		Guscio cilindrico, rispetto a un diametro passante per il centro $I = \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2$
	Cilindro pieno, rispetto all'asse $I = \frac{1}{2} mr^2$		Cilindro pieno, rispetto a un diametro passante per il centro $I = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2$
	Sfera piena, rispetto a un diametro $I = \frac{2}{5} mr^2$		Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per il centro $I = \frac{1}{12} ml^2$

Leggi di variazione e conservazione del momento angolare

Conservazione: "Se il momento totale delle forze esterne ($\sum \vec{M}_{\text{ext}}$) su un corpo rigido, rispetto a un punto fisso O , è nullo, allora il momento angolare del corpo rispetto a O si conserva ($\Delta \vec{L} = 0$)"

$$\rightarrow \sum \vec{M}_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0 \quad (\vec{L}_f = \vec{L}_i) \quad \text{conservazione di } \vec{L}$$

Variazione: "Se le forze esterne sul corpo rigido producono un momento, rispetto a un punto O fisso, non nullo, allora il momento angolare rispetto a O non si conserva"

$$\rightarrow \sum \vec{M}_{\text{ext}} = \vec{M} \Rightarrow \Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t$$

↪ intervallo di tempo per cui sono applicate le forze

• II legge di Newton per moti rotatori

"Dalla legge di variazione del momento angolare è facilmente ottenibile la legge che lega la sommatoria dei momenti applicati a un corpo rigido ($\sum \vec{M}_{ext} = \vec{M}$), all'accelerazione angolare che acquirisce il corpo"

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t, \quad L = I \cdot \omega \rightarrow \Delta L = I \cdot \Delta \omega$$

diva: $I \cdot \Delta \omega = M \cdot \Delta t \rightarrow M = I \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \leftarrow \alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$

$M = I \cdot \alpha$ II legge Newton moti rotatori ($F = m \cdot a$ per moti trasl.)
con α accelerazione angolare

• Energie nei moti rotatori

Energia cinetica di rotazione: $K_{rot.} = \frac{1}{2} I \omega^2$

Lavoro nel moto rotatorio

$$W = M \cdot \Delta \theta$$

\uparrow spost. angolare

Potenza nel moto rotatorio

$$P = M \cdot \omega$$

Moti traslatori

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$W = F \cdot \Delta s$$

$$P = F \cdot v$$

Moto di Rotolamento

Moto di un corpo rigido circolare che è composizione di un moto rotatorio a velocità ang. ω e di un moto traslatorio a velocità v .

(con $v = \omega \cdot r$)

Ogni punto del corpo ha velocità che è la somma delle velocità dovute ai due moti.

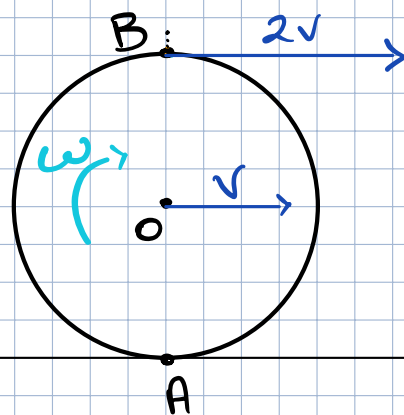
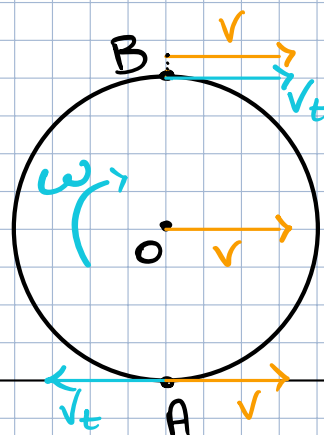
Moto rotatorio ($v_t = \omega \cdot r = v$)

↳ Impone velocità v_t positiva in B, nulla in O, negativa in A

Moto traslatorio

↳ Impone velocità v positiva in A, B, O

quindi $\vec{v}_B = 2 \cdot \vec{v}$, $\vec{v}_O = \vec{v}$, $\vec{v}_A = 0$



L'energia cinetica di rotolamento è la somma di quella traslatoria ($\frac{1}{2} m v^2$) e di quella rotatoria ($\frac{1}{2} I \omega^2$)

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad \leftarrow \begin{matrix} \omega = v \cdot r \\ v = \omega / r \end{matrix} \rightarrow K = \frac{1}{2} (I + m r^2) \cdot \omega^2$$

FORMULARIO Dinamica Rotazionale

• Momento Angolare: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, prodotto vettoriale

$$|L| = |r| \cdot m \cdot |v| \cdot \sin(\alpha), \quad \alpha \text{ angolo tra } \vec{r} \text{ e } \vec{v}$$

• Se il moto è circolare uniforme $L = m r^2 \omega$

• Momento di Inerzia: $I = m r^2$ (per una massa puntiforme)
tabellato per figure notevoli

$$(L = I \cdot \omega)$$

• Conservaz. / Variaz. Mom. Angolare

$$\sum \vec{M}_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0 \quad / \quad \sum \vec{M}_{\text{ext}} = \vec{M} \Rightarrow \Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t$$

• II legge di Newton mot: rotatori $M = I \cdot \alpha$

• Energie Mot: Rotatori:

$$\begin{cases} K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \\ W_{\text{rot}} = M \cdot \Delta \theta \\ P_{\text{rot}} = M \cdot \omega \end{cases}$$

• Rotolamenti "Moto Translatorio + Moto Rotatorio"

$$K_{\text{rotolamenti}} = K_{\text{rot.}} + K_{\text{transl.}}$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (I + m r^2) \cdot \omega^2$$

