PRODOTTO SCALARE

$\langle \bar{v}, w \rangle = \sqrt{\langle \bar{v} \cdot \bar{v} \rangle}$ moltiplica le varie componenti

se prod scal $= 0 \rightarrow$ vett $\perp$

ANGOLO TRA 2 VETTORI:

$$\cos(v \wedge w) = \frac{\langle \bar{v} . w \rangle}{\underbrace{|\bar{v}||w|}_{\text{moduli}}}$$

- $v \parallel w$ sono concordi $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$
- $v \parallel w$ sono discordi $\bar{v} \cdot \bar{w} = \pi$

SEGNO PRODOTTO SCALARE:

- $\langle v w \rangle > 0$ s.se $\widehat{vw} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ANGOLO ACUTO
- $\langle v w \rangle < 0$ s.se $\widehat{vw} \in [\pi/2, \pi]$ ANGOLO OTTUSO

PROIEZIONE ORTOGONALE:

$$w_\perp = \bar{w} - \bar{w}_\parallel = \bar{w} - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} \bar{v}$$

PRODOTTO VETTORIALE

$\bar{v} \times \bar{w}$

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

NB Area Triangolo dati 3 punti A, B, C

$$Area = \frac{1}{2} (B - A) \times (C - A)$$

PRODOTTO MISTO:

$\langle \bar{u}, \bar{v} \times \bar{w} \rangle$

$= 0$ se uno dei vett $= 0$

$= 0$ se u e v sono $\parallel$

$= 0$ se 3 vett sono complanari

VOLUME:

$$Vol\ tetraedro = \frac{1}{3} Area(\Delta_{ABC}) \cdot h$$

$$Area(\Delta_{ABC}) = \frac{1}{2} (B - A)(C - A)$$

$$\Rightarrow vol = \frac{1}{6} \langle D - A, B - A \times C - A \rangle |$$

NB

RETTE:

RETTE COMPLANARI = se sono
- coincidenti
- incedenti in 1 punto
- sono // distinte

= CONTENUTE IN UNO STESSO PIANO

complanari contrario di sghembe

se ho A e B $\Rightarrow$ $A(x_A, y_A, z_A)$ $B(x_B, y_B, z_B)$

come ottengo le eq parametriche della retta r passante per A e B

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}$$

eq parametriche della retta r passante per il punto $R = (x_0, y_0)$ e // al vett. $\vec{v} = l\,\vec{i} + m\,\vec{j}$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

es: $r \subset S_2$ // a $\vec{v} = (2, 4)$ e pass per $R = (-1, -1)$

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$$

PIANI

eq parametriche del piano α passante per punto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e // ai vett $\Rightarrow$ $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$

$$\begin{cases} x = x_A + v_x t + w_x u \\ y = y_A + v_y t + w_y u \\ z = z_A + v_z t + w_x u \end{cases}$$

$t, u \in \mathbb{R}$

calcolare il piano α a partire da 3 punti

$A=(x_A, y_A, z_A) \quad B=(x_B, y_B, z_B) \quad C=(x_C, y_C, z_C)$

$B-A=(x_B-x_A)\bar{i}+(y_B-y_A)\bar{j}+(z_B-z_A)\bar{k}$

$C-A=(x_C-x_A)\bar{i}+(y_C-y_A)\bar{j}+(z_C-z_A)\bar{k}$

$$\begin{cases} x=x_A+(x_B-x_A)t+(x_C-x_A)u \\ y=y_A+(y_B-y_A)t+(y_C-y_A)u \\ z=z_A+(z_B-z_A)t+(z_C-z_A)u \end{cases}$$

EQ CARTESIANE DIRETTE E PIANI

eq cartesiana del piano α passante per il punto $A=(x_A, y_A, z_A)$ e $\perp$ al vettore $\bar{v}=a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$

$$ax+by+cz=d$$

es:

$$A=\begin{array}{c} x\ \ y\ \ z \\ (1,2,3) \end{array} \in S_3$$

$$\bar{v}=2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k} \in V_3(O)$$

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$\to 2(x-1)+1(y-2)-3(z-3)=0$$

ovvero $2x+y-3z=-5$

NB se risolvo un sistema con eq di 2 piani (α, γ)

se $\alpha \cap \gamma=\emptyset \to$ PIANI $\parallel$

se $\alpha \cap \alpha=$ num $\to$ PIANI SI INTERSECANO

POSIZIONI RELATIVE DI DUE PIANI

$\alpha: ax+by+cz=d \qquad \alpha': a'x+b'y+c'z=d'$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c & d' \end{pmatrix}$$

Allora

- $\alpha = \alpha'$ s.se $rk(A) = 1 = rk(A|B)$;
- α e α' sono // e distinti s.se $rk(A)=1$, $rk(A|B)=2$;
- α e α' si intersecano lungo una retta s.se $rk(A)=2=rk(A|B)$

POSIZIONI PIANO - RETTA

NB → se ho una retta in forma param e un piano, sostituisco x, y, z in forma param nell'eq del piano e controllo l'identità

Possiamo descrivere un piano a partire da 3 punti

es: $A=(x_A, y_A, z_A)$ $\quad B=(x_B, y_B, z_B)$ $\quad C=(x_C, y_C, z_C)$

$$B-A = (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B + z_A)\bar{k}$$
$$C-A = (x_C - x_A)\bar{i} + (y_C - y_A)\bar{j} + (z_C - z_A)\bar{k}$$

Un punto $P(x,y,z)$ giace su un piano α s.se

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} \quad \det = 0$$

es:

$$\begin{array}{c} \text{x y o} \\ A(1,1,0) \end{array} \quad B(1,0,1) \quad C=(0,1,1)$$

$B-A = -\bar{j}+\bar{k}$

$C-A = -\bar{i}+\bar{k}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z^{0} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x+1-y+1+1-z$$

come calcolare il det

EQ. CARTESIANE RETTE

1) r come intersezione tra 2 piani

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$$rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \quad \text{sì}$$

Per calcolare un $\bar{v}$ vettore // a r

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \bar{v} = (2i + \bar{j} - 3k) \times (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) = \\ = 4\bar{i} - 5\bar{j} + \bar{k}$$

2) retta PASSANTE PER 1 PUNTO e // AD UN vett:

es. $D(-2, 2, 1)$ e // a $\bar{v} = 4i - 5j + \bar{k}$

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Dall' eq parametrica
esplicitando il parametro t

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

POSIZIONI RELATIVE RETTE e PIANO

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \qquad \alpha: a''x + b''y + c''z = d''$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

- $r \subseteq \alpha$ s.se $rk(A) = 2 = rk(A|B)$
- $r \cap \alpha = \emptyset$ s.se $rk(A) = 2$ e $rk(A|B) = 3$
- r e α si intersecano in 1 punto s.se $rk(A) = 3 = rk(A|B)$

METODO DEL FASCIO:

$$\lambda(ax + by + cz - d) + \mu(a'x + b'y + c'z - d') = 0$$

POSIZIONI RELATIVE 2 RETTE NELLO SPAZIO

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \qquad r': \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

- $r = r'$ s.se $rk(A) = 2 = rk(A|B)$
- r e r' sono // e distinte s.se $rk(A) = 2$ $rk(A|B) = 3$
- r ed r' si intersecano in un punto s.se $rk(A) = 3 = rk(A|B)$
- r ed r' sono SGHEMBE s.se $rk\, A = 3$ e $rk(A|B) = 4$ ↳ max