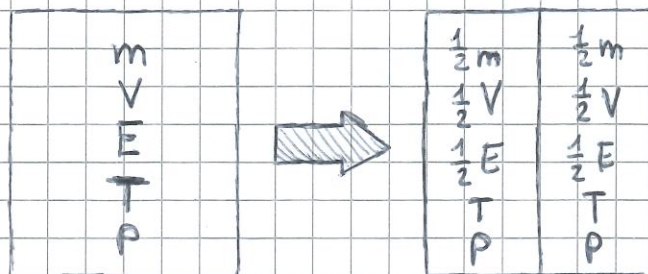


INTRODUZIONE E CONCETTI FONDAMENTALI

Innanzitutto in questo corso affronteremo il concetto di **trasporto** ma, prima di ciò, occorre richiamare le leggi di conservazione. Analizziamo allora ancor prima un SISTEMA e le sue PROPRIETÀ: queste si dividono in

• **INTENSIVE**: m, V, E

• **EXTENSIVE**: T, P



Le prime non dipendono dalla massa del sistema mentre le seconde dipendono anche dalle dimensioni. Stiamo parlando di massa, volume, energia, temperatura e pressione ma siamo anche consapevoli del fatto di poter rendere intensive delle proprietà estensive rendendole **MASSICHE**.

Ricordiamo inoltre che i sistemi possono essere:

APERTI

CHIUSI

ISOLATI

Facciamo un ulteriore approfondimento sulla **pressione** (P): questa grandezza è definita come il modulo della forza esercitata da un fluido sull'unità di superficie, ortogonalmente a questa da cui

$$P = \frac{F_{\perp}}{A} \quad \longrightarrow \quad 1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

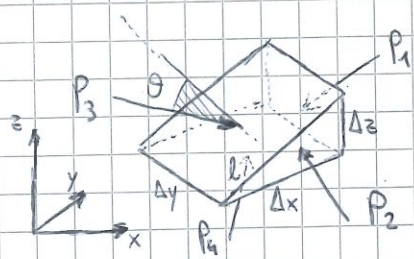
Inoltre notiamo che $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ e $1 \text{ atm} = 1,01325 \text{ bar}$.

Spesso in questo corso si ricorrerà alla **pressione relativa** (P_r) ovvero la differenza tra quella assoluta e quella atmosferica

$$P_r = P_{\text{ass}} - P_{\text{atm}}$$

dove la pressione assoluta sia tale da essere ≥ 0 sempre e
Teniamo conto che questa grandezza è uno scalare

Consideriamo il seguente solido in equilibrio subacqueo ($\Rightarrow F_{tot} = 0$)



x: $p_1 \Delta z \Delta y - p_3 l \sin \theta \Delta y = 0$

y: $\frac{1}{2} p_2 \Delta x \Delta z = 0$

z: $p_4 \Delta x \Delta y - p_3 l \cos \theta \Delta y - \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z = 0$

LE EQUAZIONI DI BILANCIO

Queste equazioni sono relazioni quantitative, indispensabili per ogni tipo di calcolo concernente impianti o apparecchiature. Poiché in un impianto chimico non si tratteranno mai sostanze pure allora per ogni **specie** contenuta si usa l'indice / appendice **-i**.
La forma primitiva delle equazioni di bilancio è:

$$\left(\begin{array}{c} \text{accumulo nel volume} \\ \text{nell'unità di tempo} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{quantità risultante trasportata} \\ \text{o trasferita nell'unità di tempo} \\ \text{del dominio attraverso S o} \\ \text{flusso netto Totale} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{generazione} \\ \text{complessiva} \end{array} \right)$$

espresso anche come equazione: $\frac{d\Psi}{dt} = \dot{\Psi} + \dot{\Psi}_G$
dove Ψ è una generica grandezza all'interno del volume, mentre il corrispettivo $\dot{\Psi}$ è il flusso netto della grandezza (energia \rightarrow potenza).

Trattiamo ora il **bilancio di materia** sia generale, con corrispettivo caso stazionario, ovvero:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}, \quad \text{stazionario} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out}$$

sia per specie poiché un composto può formarsi tramite reazione e perciò si inserisce un fattore di generazione (\dot{R}_i = velocità, W_i = peso mol, V = volume)

$$\frac{dm_i}{dt} = \dot{m}_{i,in} - \dot{m}_{i,out} + V \dot{R}_i W_i, \quad \sum_{i=1}^N \dot{R}_i W_i = 0$$

A differenza di quello di massa, il bilancio **MOLARE** non è conservativo e

Infatti, pensando ad esempio a una polimerizzazione, possiamo verificare questa cosa dato che la velocità di generazione molecolare \dot{R}_i può essere variabile a seconda della reazione:

$$\frac{dM_i}{dt} = \dot{M}_{i,in} - \dot{M}_{i,out} + V \dot{R}_i, \quad \sum_{i=1}^N \dot{R}_i \neq 0$$

Consideriamo ora il caso del **bilancio di energia** dove quest'ultima si conserva dal seguente principio $\Delta E = Q - L$. Facciamo ora una legenda su cosa si intende come energia e come la si scrive: energia meccanica (E) che comprende potenziale (ϕ) e cinetica (K) mentre l'energia interna (U) è a parte. Avremo

$$K = \frac{1}{2} m v^2, \quad \phi = m g z$$

mentre l'energia interna raccoglie diversi contributi dati da energia:

- **sensibile**: vibrazioni, traslazioni e rotazioni oc T
- **latente**: forze intermolecolari per stati solido, liquido, gas
- **chimica**: forze intramolecolari, legami chimici
- **nucleare**: forze intranucleari di protoni, elettroni, neutroni

Fatte queste premesse esprimiamo il bilancio a lavoro di $\frac{dE}{dt}$ ovvero la potenza in accumulo/perdita, l'ultima va divisa in tre contributi a sé stanti per dare

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out} + \dot{L}_{in} - \dot{L}_{out}$$

Se poniamo una tilde "~" su un tipo di energia stiamo parlando della variante massica (es: $\tilde{U} = \frac{U}{m}$) $\Rightarrow (\dot{E} = m \dot{\tilde{E}})$. Ricordando ora che il lavoro si divide tra quello dovuto alle forze viscose e tra quello di pulsione ($\dot{L}_p = m \frac{P}{\rho}$) e che l'entalpia si scrive come $\tilde{h} = \tilde{U} + \frac{P}{\rho}$ possiamo dire la nostra sulla formula

La formulazione generale pertanto sarà la seguente:

$$\frac{d}{dt} [m(\tilde{U} + \tilde{K} + \tilde{\Phi})] = \dot{m}_{in}(\tilde{U} + \tilde{K} + \tilde{\Phi})_{in} - \dot{m}_{out}(\tilde{U} + \tilde{K} + \tilde{\Phi})_{out} + \dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out} + \dot{L}_{in} - \dot{L}_{out}$$

$$\frac{d}{dt} [m(\tilde{U} + \tilde{K} + \tilde{\Phi})] = \dot{m}_{in} \left(\tilde{U} + \frac{p}{\rho} + \tilde{K} + \tilde{\Phi} \right)_{in} - \dot{m}_{out} \left(\tilde{U} + \frac{p}{\rho} + \tilde{K} + \tilde{\Phi} \right)_{out} + \dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out} + \dot{L}_{in}^0 - \dot{L}_{out}^0$$

$$\frac{d}{dt} [m(\tilde{U} + \tilde{K} + \tilde{\Phi})] = \dot{m}_{in}(\tilde{h} + \tilde{K} + \tilde{\Phi})_{in} - \dot{m}_{out}(\tilde{h} + \tilde{K} + \tilde{\Phi})_{out} + \dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out} + \dot{L}_{in}^0 - \dot{L}_{out}^0$$

Passiamo ora a quello che è il bilancio di quantità di moto nel quale tiriamo in ballo Newton, in pratica abbiamo:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dQ}{dt}, \quad F=0 \rightarrow Q = \text{costante}$$

così facendo descriviamo la conservazione della quantità di moto tramite un bilancio di forze che ne descrivono le differenze

$$\frac{d(mv)}{dt} = \dot{m}v_{in} - \dot{m}v_{out} + F_r + F_p + F_g$$

dove vi sono termini "diffusivi" risultanti dagli sforzi viscosi tangenziali (F_r), quelli delle forze di superficie legati alla pressione (F_p) e quelli delle forze di campo agenti sul volume (F_g) gravitazionali. Ricordiamo inoltre che è equivalente scrivere

$$\frac{d(mv)}{dt} = (\rho \dot{V} v)_{in} - (\rho \dot{V} v)_{out} + F_r + F_p + F_g$$

LE PROPRIETÀ DEI FLUIDI

Parliamo innanzitutto di grandezze come la densità e il suo opposto detto volume specifico ($\rho = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$, $\tilde{V} = \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$) per sfociare nella densità relativa, spesso è quella dell'acqua a 4°C

$$\rho_a = 1000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] : \quad \rho_r = \frac{\rho}{\rho_a} \quad [\text{adimensionale}]$$

Notiamo che se si parla di miscele allora si avrà \tilde{V}_i e w_i ovvero volume specifico e frazione massica $\left[\frac{\text{kg}_i}{\text{kg}_{\text{tot}}} \right]$ di ogni specie t.c.

$$\tilde{V}_{\text{mix}} = \sum_{i=1}^N \tilde{V}_i w_i = \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{\rho_i}$$

Il peso specifico invece è uguale a

$$\gamma = \frac{mg}{V} = \rho g$$

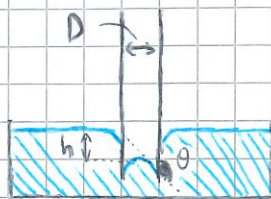
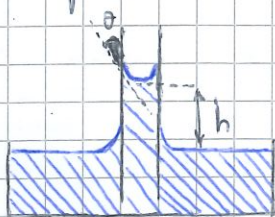
TENSIONE SUPERFICIALE E CAPILLARITÀ

La tensione superficiale è quella proprietà che consente alle molecole superficiali di essere spinte all'interno comportandosi come una membrana elastica sotto tensione. Questa proprietà diminuisce all'aumentare della temperatura e si annulla al punto critico oppure per mezzo di sostanze come i tensioattivi. Nel caso di gocce vi è una differenza di pressione tra i due lati dell'interfaccia e si trova tramite:

$$\pi r^2 \Delta p = 2\pi r \sigma \rightarrow \Delta p = \frac{2\sigma}{r}$$

È evidente che l'effetto di " σ " è importante per raggi piccoli ma ora analizziamo il fenomeno della **capillarità**, ovvero l'innalzamento o l'abbassamento del livello di liquido all'interno di un tubo piccolo di diametro, rispetto al pelo libero del liquido stesso.

Ciò è dovuto alla bagnabilità del materiale che è quantificata in base all'angolo θ che la tangente alla superficie del liquido forma con la superficie di contatto del tubo.



Notiamo che in situazione statica di " $F_{tot} = 0$ " dovremo avere un bilancio di forze tra la forza peso e la componente verticale, inclinata dell'angolo θ , della tensione superficiale (con $2r = D$)

$$\rho g \frac{\pi D^2 h}{4} = \pi D \sigma \cos \theta \Rightarrow h = \frac{4\sigma}{\rho g D} \cos \theta$$

TENSIONE DI VAPORE

La tensione di vapore di un liquido, generalmente indicata con " p_v ", è la pressione esercitata dal suo vapore in equilibrio con il liquido stesso ad una data temperatura, pertanto $\propto T$ e al suo aumentare, aumenterà anch'essa. Per il calcolo della tensione di vapore esistono diverse correlazioni, tuttavia una delle più utilizzate è la formula di Antoine:

$$\log_{10} p_v(T) = A - \frac{B}{T+C}$$

dove A, B e C sono i tre parametri specifici di ciascuna sostanza e reperibili in letteratura

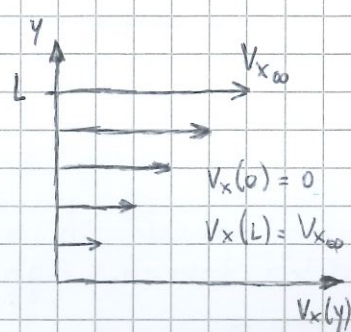
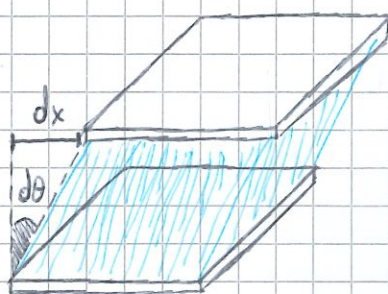
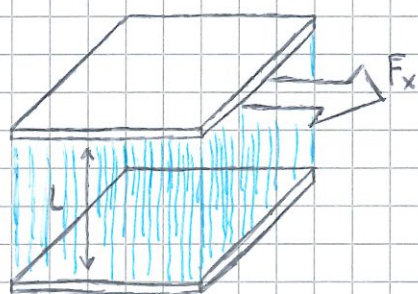
VISCOSITÀ

Consideriamo un fluido interposto tra due piani e applichiamo a solo uno di questi una forza F_x costante: dopo un tempo determinato il piano smette di accelerare e si muove a v_x costante. Ne deriva che gli strati di fluido si muoveranno a velocità mano a mano decrescente

più si è vicini al piano fermo e perciò identifichiamo lo sforzo (τ) come la forza per unità di superficie necessaria a far muovere il piano sopra di velocità V_x contro la resistenza del fluido. La legge che correla sforzo e velocità è la seguente e utilizza come costante di proporzionalità la viscosità dinamica (μ), avremo quindi

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Osserviamo la schematizzazione seguente:



In condizioni di moto ragionevolmente lento e meglio se in regime laminare, possiamo esprimere i procedimenti

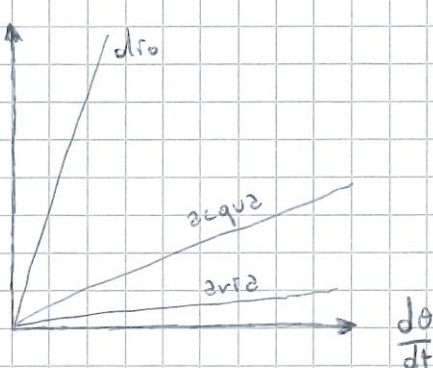
$$V_x = y \frac{V_{x\infty}}{L} \xrightarrow{D} \frac{dv_x}{dy} = \frac{V_{x\infty}}{L} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{F_x}{A} \propto \frac{dv_x}{dy}$$

Introduciamo ora il concetto di deformazione angolare, applicabile solo a fluidi newtoniani; diciamo che a seguito di uno spostamento vi è una rotazione delle particelle di fluido di angolo infinitesimo " $d\theta$ ":

$$dx = V_{x\infty} dt \rightarrow d\theta \approx \tan \theta = \frac{dx}{L} = \dots = \frac{dv_x}{dy} dt$$

$$\rightarrow \text{con } \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_x}{dy} \text{ e perciò}$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \mu \frac{d\theta}{dt}$$



Affrontiamo ora i fluidi non Newtoniani: distinguiamoli innanzitutto dal fatto che dipendono o meno dal tempo e poi consideriamo una viscosità apparente (μ_{app}) che sostituisce la precedente. Trattiamo ora quelli indipendenti dal tempo:

- FLUIDI PLASTICI ALLA BINGHAM: da solidi a liquidi in dipendenza dallo sforzo ($\tau < \tau_0 = \text{solidi}$) $\Rightarrow \tau = \tau_0 + \mu_{app} \frac{dv}{dy}$
- FLUIDI PSEUDOPLASTICI: μ_{app} decresce all'aumentare della velocità di deformazione quindi il fluido presenta una forte resistenza al moto per piccole velocità $\Rightarrow \mu_{app} = k \left(\frac{dv}{dy} \right)^{n-1}$ ($n < 1$)
- FLUIDI DILATANTI: hanno comportamento opposto a quelli pseudoplastici aumentando la resistenza proporzionalmente alla velocità; la formula è la stessa (tranne per $n > 1$)

Ora invece approfondiamo quelli dipendenti dal tempo:

- FLUIDI TIXOTROPICI: con $\frac{dv}{dy} = \text{costante}$ lo sforzo diminuisce gradualmente tendendo a un valore limite dove si comporta come newtoniano (es. Ketchup)
- FLUIDI REOGETICI: hanno un comportamento simile, ma dove rispetto ai precedenti, ovvero lo sforzo aumenta fino a un valore limite nel tempo (es. maionese)
- FLUIDI VISCOELASTICI: questi hanno caratteristiche e proprietà elastiche tipiche dei solidi e si tratta di un comportamento complesso e non facilmente esprimibile (es. alcuni bitumi)

STATICA DEI FLUIDI

La statica dei fluidi si occupa dei fluidi in quiete e delle azioni che questi esercitano sulle pareti o parti di queste con cui vengono in contatto. Faremo riferimento a fluidi incompressibili o considerabili come tali, cioè a densità circa costante.

Allorché l'oggetto non trasli verticalmente:

$$p_2 \Delta x \Delta y - p_1 \Delta x \Delta y - \rho g \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

dividendo il tutto per un fattore $\Delta x \Delta y$ si ha

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta z = \rho g (z_1 - z_2)$$

Da ciò ricaviamo che la differenza di pressione tra due punti del medesimo fluido a densità costante è data dalla **Legge di Stevino** o la pressione \propto alla profondità:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \Rightarrow z + \frac{p}{\rho g} = \text{costante}$$

Questa legge viene anche definita come "equazione della statica dei fluidi incompressibili in campo gravitazionale" e introduce termini come quota piezometrica, quota geodetica e altezza piezometrica. Sapendo che la pressione al pelo libero della superficie è quella atmosferica possiamo dire che in un punto B immerso è

$$p_B = p_{atm} + \gamma (z_A - z_B) = p_{atm} + \gamma L_{AB} \quad (\gamma = \rho g)$$

$$\Rightarrow p_B = p_{atm} + p_{rB} \rightarrow p_{rB} = \gamma L_{AB}$$

Definiamo ora il piano dei carichi idrostatici assoluti il cosiddetto piano dove $p_B = 0 \Rightarrow p_{rB} = -1 \text{ atm}$. La differenza con quello relativo è

$$0 + \gamma z_A = p_{atm} + \gamma z_r \Rightarrow z_A - z_r = \frac{p_{atm}}{\gamma}$$

È opportuno anche sottolineare che la pressione in un punto non dipende dalla forma del recipiente che contiene il fluido.

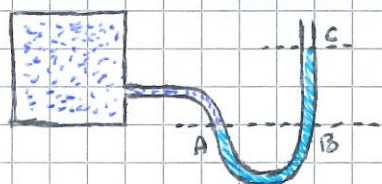
Un'altra espressione della legge di Stevino è quella di Pascal, la quale afferma che "un incremento di pressione applicato a un volume finito di fluido fa aumentare la pressione della stessa quantità in tutto il volume".

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

La forza applicata sul cilindro più piccolo viene moltiplicata per il rapporto tra le superfici e trasmessa al secondo cilindro.

I MANOMETRI

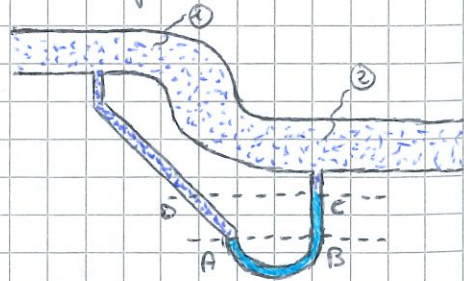
Esistono diversi strumenti di misurazione tra cui il piezometro, per pressioni medio-basse, mentre il manometro semplice per cerchi più elevati formato da un tubo a U contenente un fluido ad alta



densità detto fluido manometrico. Si crea un dislivello \overline{BC} e le pressioni devono essere uguali, da cui: $P_A = P_B = P_{atm} + \rho g \overline{BC}$.

Il manometro differenziale è invece ideale a misurare la differenza di pressione tra due contenitori o tra due differenti punti di un condotto.

Consiste in un tubo a U collegato ai due punti di cui si vuole conoscere il Δp .



Da ciò deriva l'uguaglianza ($P_A = P_B$; $P_D = P_C$):

$$P_B = P_2 + \rho_{merc} g \overline{BC} + \rho g (z_2 - \overline{BC})$$

$$P_A = P_1 + z_1 \rho g$$

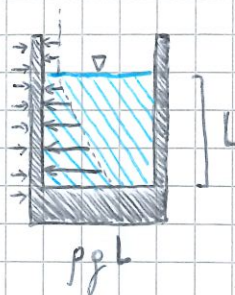
$$\Rightarrow P_1 - P_2 = g \overline{BC} (\rho_{merc} - \rho) - \rho g (z_1 - z_2)$$

$$[= g \overline{BC} (\rho_{merc} - \rho) \text{ se } z_1 = z_2]$$

LE SPINTE

Viene definita spinta idrostatica la forza esercitata da un fluido in quiete su una superficie. Questa è il risultato di tantissime spinte elementari che il fluido esercita su ciascun punto in modo ortogonale. Il modulo è

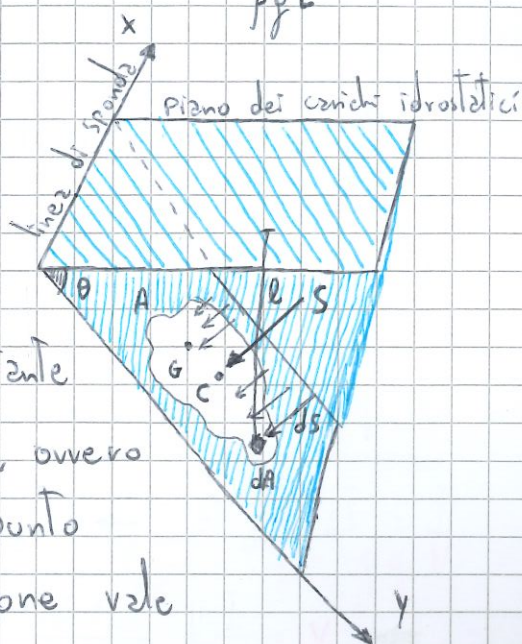
$$dS = p \, dA$$



e sappiamo poi che la pressione atmosferica agisce sia dentro che fuori quindi da bilanciarsi portandoci a ragionare in pressioni relative.

Analizziamo le **spinte su superfici piane**:

riguardano spinte parallele tali che la risultante (**S**) di queste forze venga applicata in C, ovvero nel CENTRO DI SPINTA. Considerando un punto generico sulla linea di sponda, la pressione vale



$$p = p_{atm} + \rho g l \rightarrow l = y \sin \theta \Rightarrow p = p_{atm} + \rho g y \sin \theta$$

per le premesse precedenti consideriamo la relativa $p_r = p - p_{atm}$ e otteniamo la seguente catena di uguaglianze ($dS = p_r \, dA$)

$$\neq S = \int_A p_r \, dA = \int_A \rho g l \, dA = \rho g \sin \theta \int_A y \, dA = \rho g \sin \theta \cdot M$$

dove "M" è il **momento statico** e in sostanza ci consente di dire che la spinta su superficie piana è pari al prodotto della pressione relativa esercitata nel baricentro della superficie stessa per la sua area

$$S = \rho g \sin \theta M = \rho g A y_G \sin \theta = \rho g A l_G = p_G A$$

e, in base alla direzione della spinta, può essere sia che $p_G > 0$ sia che $p_G < 0$ quindi verso il fluido

Equagliamo ora il momento in C con quello risultante, ovvero l'integrale e otteniamo la seguente

$$S_{Y_c} = \int_A p_r y \, dA = \int_A y p g \sin \theta y \, dA = p g \sin \theta \int_A y^2 \, dA$$

$$\Rightarrow S_{Y_c} = p g \sin \theta I$$

dove con "I" si definisce il **momento di inerzia** della superficie rispetto alla linea di sponda. Come osservato notiamo una correlazione

$$S_{Y_c} = p g \sin \theta M Y_c = p g \sin \theta I \Rightarrow Y_c = \frac{I}{M}$$

Fissiamo ora "I₀" come il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico e chiamiamo il TEOREMA DEL TRASPORTO dei momenti di inerzia, il quale ci porta alle seguenti conclusioni

$$I = I_0 + Y_G^2 A \rightarrow Y_c = \frac{I}{M} = \frac{I_0 + Y_G^2 A}{M} \quad \text{e} \quad M = Y_G A$$

$$\Rightarrow Y_c = \frac{I}{M} = \frac{I_0 + Y_G^2 A}{M} = \frac{I_0}{M} + \frac{Y_G^2 A}{M} = \frac{I_0}{M} + \frac{Y_G^2 A}{Y_G A} = \frac{I_0}{M} + Y_G$$

spesso si fa riferimento all'eccentricità della spinta: $e = Y_c - Y_G = \frac{I_0}{M}$

Un caso particolare di area è quella rettangolare ($A = a \times b$) con distanze d da linea di sponda e angolo θ di inclinazione, sappiamo

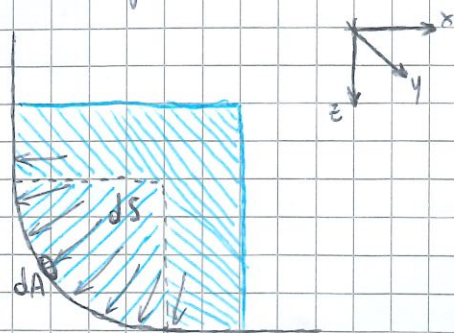
$$S = p_r A = p g \sin \theta Y_G \cdot A = p g \left(d + \frac{b}{2}\right) \sin \theta (ab); \quad I_0 = \frac{ab^3}{12}$$

$$\Rightarrow Y_c = Y_G + \frac{I_0}{M} = \dots = d + \frac{b}{2} + \frac{1}{12} \left(\frac{b^2}{\left(d + \frac{b}{2}\right)} \right)$$

Avremo poi qualche caso particolare da considerare:

- $d = 0$: $S = a \frac{b^2}{2} p g \sin \theta$ mentre $Y_c = \frac{2}{3} b$
- $\theta = 0 \rightarrow \sin \theta = 1$: $S = p g \left(d + \frac{b}{2}\right) (ab)$
- $\theta = 0, d = 0$: $S = p g a \frac{b^2}{2}$
- $\theta = 90^\circ$: $p_r = p g l \rightarrow S = p g l ab$

Tratteremo ora le **spinte su superfici curve**: in generale la formula di base è la stessa, tuttavia le spinte elementari sono orientate diversamente punto per punto e pertanto non si può ricondurre ad una risultante monocomponente ma bisogna orientare su un SR (x, y, z) e tenere anche conto delle angolazioni rispetto alla **NORMALE** " n " \perp alla superficie nelle tre direzioni, quindi avremo:



$$dS_x = p_r \cos \theta_x dA \quad ; \quad dS_y = p_r \cos \theta_y dA \quad ; \quad dS_z = p_r \cos \theta_z dA$$

dove $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ sono gli angoli compresi tra " n " e ciascun asse x, y, z ; possiamo sintetizzare considerando $[dA_i = \cos \theta_i dA]$ con $i = x, y, z$ e calcoliamo poi per mezzo di integrali le risultanti componenti:

$$\# \quad S_x = \rho g l_x A_x \quad ; \quad S_y = \rho g l_y A_y \quad ; \quad S_z = \rho g l_z A_z = \rho g V$$

dove l_x, l_y, l_z sono gli allungamenti dei baricentri delle superfici A_x, A_y, A_z al di sotto del piano dei carichi idrostatici.

Si può osservare che S_x e S_y sono due forze orizzontali, generalmente non complanari, mentre la componente S_z è pari al peso del volume di fluido. Il tutto può essere ricondotto a una spinta orizzontale ($\dots o$) e una verticale ($\dots v$):

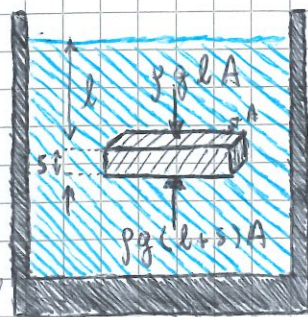
$$S_o = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

$$S_v = S_z$$

SPINTE E GALEGGIAMENTO

La spinta di galleggiamento è quella spinta diretta verso l'alto che un fluido e in particolare un liquido esercita su un corpo immerso. Questo effetto è direttamente correlato alla legge di Stevino e deriva dall'effetto della pressione agente su un corpo immerso.

In pratica si può riassumere dicendo che il galleggiamento è strettamente dipendente dalla **densità** (ρ) del liquido in quanto la pressione subita dal corpo immerso, nella superficie inferiore, deve essere maggiore di quella subita dall'alto, sommata alla forza peso del corpo immerso, per farlo tornare a galla.



$$P_{sup} \rightarrow F_{sup} = \rho g l A \quad ; \quad P_{inf} \rightarrow F_{inf} = \rho g (l+s) A$$

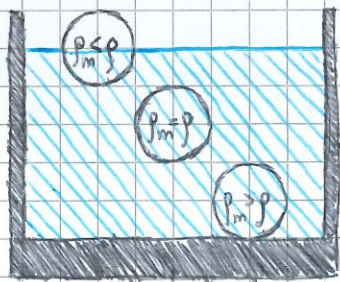
$$P_{corpo} \rightarrow F_{peso} = S_g = \rho_{corpo} g s A = \rho_{corpo} g V \quad (S_g = \text{spinta galleg.})$$

Possiamo riassumere questo concetto nel **principio di Archimede**, ovvero

"Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verticale, diretta verso l'alto, di modulo pari al peso del volume di fluido spostato e passante per il baricentro di tale volume"

Se consideriamo un galleggiante avremo che $\rho g V_i = \rho_m g V$ dove V_i è il volume immerso e ρ_m la densità media del corpo, da cui

$$\frac{V_i}{V} = \frac{\rho_m}{\rho}$$



quindi in base alla densità e del rapporto con quella del fluido ($>, =, <$), un corpo galleggerà o meno.

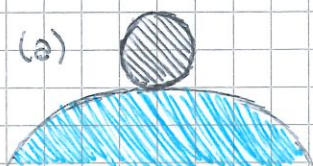
EQUILIBRIO DEI CORPI IMMERSI

Definiamo innanzitutto il concetto di equilibrio tramite le seguenti

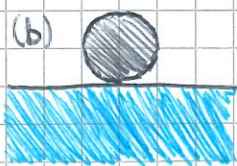
rappresentazioni: nel caso (a)

si parla di **equilibrio instabile** dove la pallina può conservare la sua posizione se non subisce perturbazioni, in caso contrario non vi

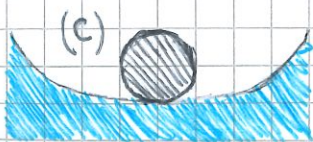
(a)



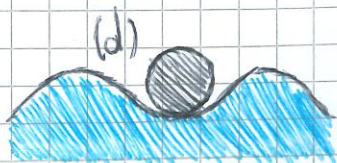
(b)



(c)



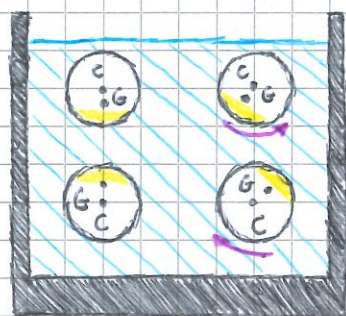
(d)



potrà tornare. Opposto a questo vi è il caso (c) ovvero il classico **equilibrio stabile** dove qualunque disturbo consentirebbe il ritorno alla posizione originale. La variante di questa casistica è il (d) dove ci si ritrova nel precedente solo per piccoli disturbi mentre l'ultimo, il caso (b), tratta l'**equilibrio indifferente** dove la pallina post-perturbazione troverà una nuova condizione di equilibrio.

Nel caso della rotazione la stabilità dipende dalla posizione relativa del baricentro e del centro di galleggiamento:

- se G è al di sotto di C il corpo è stabile e genererà un momento stabilizzante,
- se G è sopra a C allora un qualsiasi disturbo causerà un momento a nuovo equilibrio



Nel caso invece di fluidi galleggianti il discorso è ancora più complesso poiché bisogna ricavare il **metacentro** (M) per trarre conclusioni: questo nuovo punto è l'intersezione delle due rette d'azione della spinta di galleggiamento prima e dopo la rotazione. Se M è al di sopra di G allora si è in una condizione di equilibrio stabile mentre se è al di sotto si verrebbe ad avere un momento ribaltante; la lunghezza GM è detta altezza metacentrica ed è una misura di stabilità: più elevata = più stabile.

DINAMICA DEI FLUIDI

Ci occupiamo ora del movimento dei fluidi e della sua descrizione analizzando macroscopicamente il problema. Questo studio che attiveremo dovrà partire da un **volume di controllo (V.C.)** e avverrà tramite le relazioni tra le nostre variabili di campo, funzioni di spazio e tempo, come quelle scalari:

$$p = p(x, y, z, t) \quad T = T(x, y, z, t) \quad w_i = w_i(x, y, z, t)$$

oppure con la velocità, una variabile vettoriale nel V.C.:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t) = V_x(x, y, z, t)\mathbf{i} + V_y(x, y, z, t)\mathbf{j} + V_z(x, y, z, t)\mathbf{k}$$

In questo corso analizzeremo solo casi semplici che porteranno a soluzione analitica parlando di sistemi di equazioni: di fatto un banale esempio di una barca trasportata dalla corrente ci condurrebbe ad un sistema di sei incognite ($p, w_i, V_x, V_y, V_z, T, P$) più N_s che è il numero delle specie. Il primo caso di semplificazione lo vedremo nel prossimo paragrafo.

EQUAZIONE DI BERNOULLI

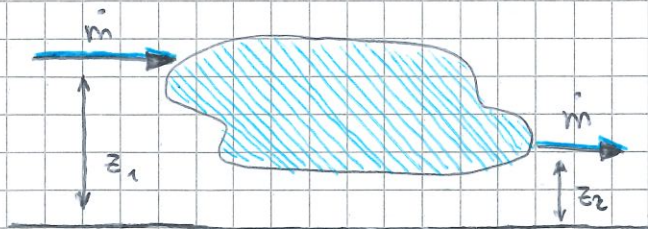
Partiamo subito con l'assunzione di un sistema **stazionario** e lavoriamo a partire dall'equazione di bilancio GENERALE. Ora facciamo un paio di assunzioni come

$$\tilde{U}_{in} = \tilde{U}_{out} ; \dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out} ; \dot{W}_{in} = \dot{W}_{out}$$

e ricordando la stazionarietà, il

bilancio di energia diventerà l'equazione di **Bernoulli** ovvero

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{in} = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{out} \quad \text{poiché} \quad \frac{d[m(\tilde{k} + \tilde{\phi})]}{dt} = 0$$



Ne deriva per forza di cose la seguente

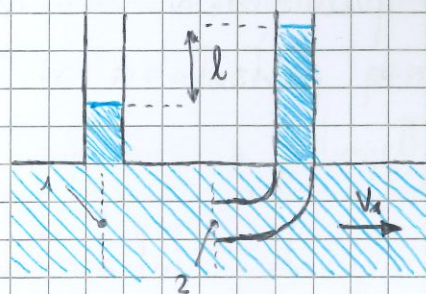
$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z \right) = H = \text{costante}$$

dove abbiamo altezza piezometrica, cinetica e quota geodetica.
Come diremo ora, il teorema di Bernoulli vale solo nel caso in cui siano verificate alcune ipotesi riassunte in:

- il moto deve essere permanente, non vario e quindi stazionario
- fluido perfetto senza perdite di carico (approssimabile per dx)
- nessuno scambio di energia con il fluido
- fluido incompressibile, anche per gas $\frac{1}{3}$ sotto velocità del suono
- condizioni isoterme e assenza scambi di calore.

Traiteremo ora invece dei sottoparagrafi riguardanti delle particolari strutture, caratteristiche di impianti chimici:

- ① Misuriamo la velocità tramite **Tubo di Pitot**, ovvero applichiamo il precedente teorema a questa configurazione e, trascurando le perdite di carico, osserviamo la distanza tra i due piezometri riscontrando che il punto "2" è a RISTAGNO

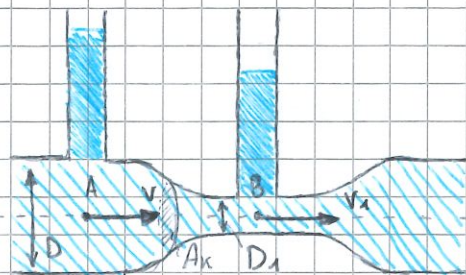


$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \Rightarrow \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) - \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) = l \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl}$$

- ② Analizziamo la seguente figura, premesso che A e B hanno la stessa quota sull'asse del tubo e che $\frac{dm}{dt} = 0$:

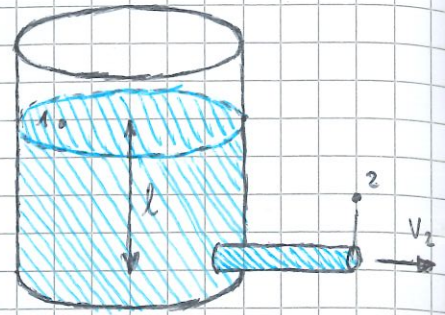
$$\dot{m} = \rho v A \Rightarrow \rho v A = \rho v_1 A_1 \Rightarrow v_1 = v \frac{A}{A_1}$$

applicando Bernoulli (con $z = z_1$) e sostituendo v_1



$$\frac{p - p_1}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} \left[\left(\frac{A}{A_1} \right)^2 - 1 \right] \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2g \frac{p - p_1}{\gamma}}{\left[\left(\frac{A}{A_1} \right)^2 - 1 \right]}}$$

- ③ Misuriamo ora l'efflusso da un serbatoio nel caso di un fluido incompressibile nella seguente situazione. Teniamo conto delle seguenti semplificazioni e poi applichiamo Bernoulli:



$$P_1 = P_2 = P_{atm} ; v_1 \approx 0$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \Rightarrow z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

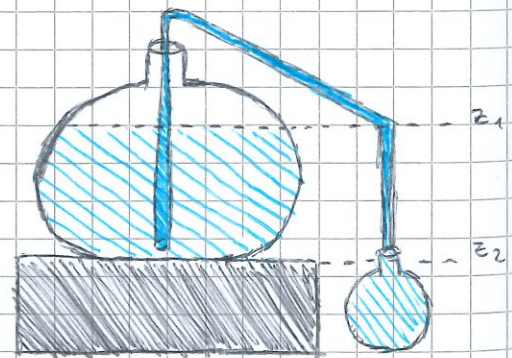
questa espressione è detta **velocità torricelliana** di efflusso da un piccolo foro sottobattente. Si potrebbe paragonare alla caduta libera di un grave, tuttavia bisogna tenere conto della CONTRAZIONE DELLA VENA descritta dal coefficiente " C_c " tale che

$$A = C_c A_{\text{foro}} \quad (0,61 \leq C_c \leq 0,63 \approx 60\%)$$

per questo la velocità non sarà troppo diversa nei casi reali da quelli ideali ma la portata volumetrica risentirà della contrazione e pertanto si avrà: $\dot{V}_{\text{reale}} = v_2 A = v_2 C_c A_{\text{foro}}$

- ④ Un altro esempio di semplice applicazione del teorema di Bernoulli riguarda l'**infiescatura**. Consideriamo le solite semplificazioni e calcoliamo la velocità in uscita del tubo a quota z_2 , notiamo che

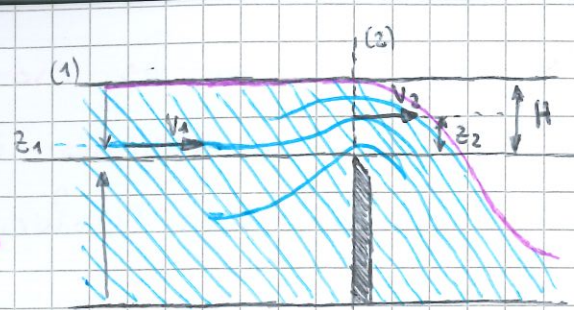
$$v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$



- ⑤ Trattiamo ora gli **stramazzi** ovvero delle ostruzioni a spigolo netto sopra i quali si realizza un flusso di una corrente a pelo libero. Con riferimento alla prossima figura è possibile applicare Bernoulli tra un filetto che si muove dalla sezione 1 alla sezione 2.

Scriviamo considerando le pressioni parziali:

$$\frac{P_{r1}}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$



$$\Rightarrow \frac{P_{r1}}{\rho g} + z_1 = H \Rightarrow V_2 = \sqrt{2g \left(H + \frac{V_1^2}{2g} - z_2 \right)}$$

Per conoscere invece la portata volumetrica occorre integrare lungo tutto il battente di fluido per "z" che va da 0 a H e consideriamo il coefficiente di contrazione più l'immersione dello stramazzo (= l)

$$\dot{V} = C_c l \int_0^H V_2 dz_2 = C_c l \int_0^H \sqrt{2g \left(H + \frac{V_1^2}{2g} - z_2 \right)} dz_2 = \frac{2}{3} C_c l \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2} \right]$$

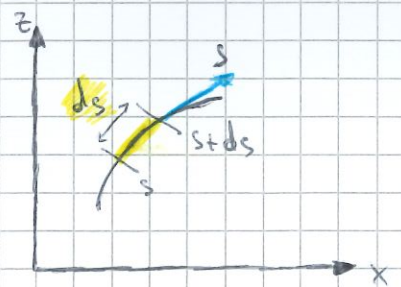
Se poi si considera l'altezza cinetica trascurabile (corrente lenta) si arriva alla relazione limite per stramazzi rettangolari

$$\dot{V} = \frac{2}{3} C_c l \sqrt{2g} H^{3/2} \xrightarrow{\text{rovesciato}} H = \left(\frac{3}{2 C_c \sqrt{2g}} \right)^{2/3} \left(\frac{\dot{V}}{l} \right)^{2/3}$$

FLUIDI COMPRIMIBILI

Nel caso di fluidi comprimibili l'equazione di Bernoulli trattata fino ad ora non è più applicabile. Per comprendere ciò dovremmo passare dal bilancio di energia e applicare la sua equazione a volumetti infinitesimi del sistema e poi integrarla su tutto il volume.

Consideriamo una linea di flusso "s" e tramite Taylor possiamo affermare che la formula di Bernoulli in "s" e in "s+ds" è praticamente la stessa e di conseguenza il termine che si aggiungeva, ovvero il seguente, è nullo:



$$\frac{d \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g z \right)}{ds} = 0$$

pertanto integrando si ottiene, con $\rho = \rho(p)$:

$$\frac{V^2}{2} + g z + \int \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = \text{costante}$$

Vediamo il seguente esempio riguardo ai fluidi comprimibili nel caso di **trasformazione isoterma**: consideriamo un gas ideale che subisce questa trasformazione. Dall'equazione dei gas perfetti:

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{V}{n} W = \frac{p}{RT} W \quad (W = \left[\frac{\text{kg}}{\text{mol}} \right] = \text{MM})$$

Andando a sostituire nella formula di integrazione e poi integrando

$$\frac{V^2}{2} + gz + \int RTW \frac{dp}{p} = \text{costante} \Rightarrow \frac{V^2}{2} + gz + RTW \ln(p) = \text{costante}$$

MOTO LAMINARE E MOTO TURBOLATO

Prendiamo come esempio un fiume in due sue parti, ovvero in pianura e in montagna (torrente); nel primo caso il regime di moto è caratterizzato da regolarità e traiettorie parallele venendo definito **LAMINARE** mentre a monte possiede un moto irregolare e caotico con velocità fluttuanti, definito **TURBOLento**.

Tendenzialmente a basse velocità si è in fase laminare e viceversa; Tuttavia esiste una velocità critica che comprende un fluido laminare in una condizione di equilibrio instabile dove basta un leggero disturbo per portare a regime turbolento.

Il primo studioso di questi moti fu Reynolds che stabilì la correlazione di questi con le forze di interazione: a prevalere delle forze viscosi si presenta moto laminare mentre se a prevalere sono quelle INERZIALI si è in un moto turbolento. Seguendo le orme di tale scoperta mise in relazione le forze in quello che conosciamo essere il **numero di Reynolds (Re)**, ovvero

$$Re = \frac{\text{forze di inerzia}}{\text{forze viscosi}} = \frac{\frac{\rho(v)^2}{D}}{\frac{\mu(v)}{D^2}} = \frac{\rho(v)D}{\mu} = \frac{(v)D}{\nu}$$



Quanto alla **dimensione caratteristica**, quella dipende dalla geometria del sistema. Nel caso di un condotto circolare la D_i è il diametro interno. Per altri sistemi si considera il diametro idraulico (D_i) che risulta 4 volte il raggio idraulico (R_i), il quale risulta dal rapporto dell'area della sezione bagnata (A_b) e il suo perimetro (P_b):

Diagramma di un condotto circolare con diametro D .

$$R_i = \frac{A_b}{P_b} = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4} \Rightarrow D_i = 4 R_i = D$$

Diagramma di un condotto quadrato con lato l .

$$R_i = \frac{A_b}{P_b} = \frac{l^2}{4l} = \frac{l}{4} \Rightarrow D_i = 4 R_i = l$$

Diagramma di un condotto rettangolare con lati l_1 e l_2 .

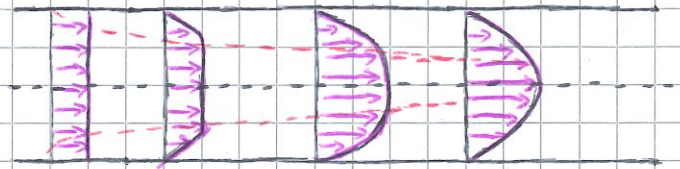
$$R_i = \frac{A_b}{P_b} = \frac{l_1 l_2}{2(l_1 + l_2)} \Rightarrow D_i = 4 R_i = \frac{2 l_1 l_2}{l_1 + l_2}$$

MOTO INTUBATO

Uno degli elementi essenziali nella trattazione del moto dei fluidi è, per la sua frequenza, quello del moto all'interno dei tubi.

Il fluido entra nel condotto circolare con una velocità che assumiamo essere uniforme e a causa di diversi fenomeni si ha una modifica del profilo di velocità, come ad esempio per l'attrito.

Ad un certo punto il profilo di velocità risulterà completamente sviluppato e si manterrà tale fino alla zona di sbocco.



Definiamo " τ_0 " lo sforzo tangenziale alla parete, dovuto alla viscosità, il quale dipende anche dal gradiente di velocità e diciamo che questo è molto elevato all'ingresso del tubo portando a delle **perdite di carico** piuttosto grandi.

Tendenzialmente la lunghezza della zona di imborca (L_i) si ha con la seguente formula (D = diametro del tubo):

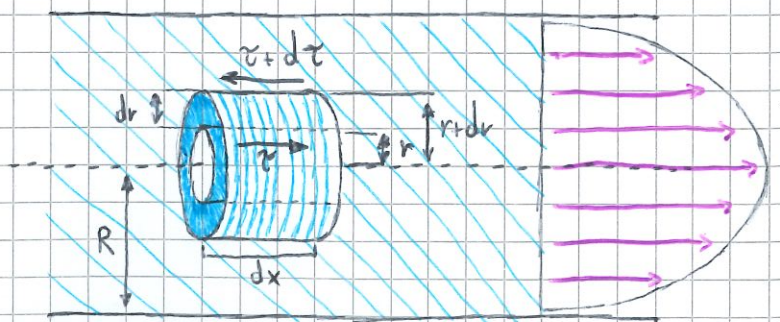
$$L_i / D = 0,05 \cdot Re$$

PROFLO DI VELOCITÀ SVILUPPATO IN MOTO LAMINARE

Un fluido in moto laminare si muove per filotti paralleli ciascuno a velocità costante lungo la parallela all'asse del tubo. Consideriamo un anello di spessore " dr " e raggio interno " r " coerente al tubo.

Inoltre assumiamo che la sua

lunghezza sia " dx " e questo anello deve simulare quell'insieme di filotti di fluido. Assumiamo le



condizioni di moto permanente e vediamo che dal bilancio di

quantità di moto sopravviverà la seguente, ovvero solo i contributi delle forze di pressione e delle forze viscose (a somma nulla):

$$\frac{d(pVv)}{dt} = (pVv)_{in} - (pVv)_{out} + A p + A \tau + \rho g V$$

$$p 2\pi r dr - (p+dp) 2\pi r dr + \tau 2\pi r dx - (\tau+d\tau) 2\pi (r+dr) dx = 0$$

$$\Rightarrow -dp 2\pi r dr - \tau 2\pi dr dx - d\tau 2\pi r dx = 0 \quad (d\tau 2\pi dr dx = 0 \text{ trascur.})$$

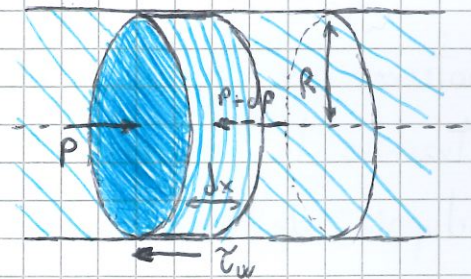
dividiamo il tutto per " $2\pi dr dx$ " e notiamo una trasformazione di derivate di prodotto:

$$r \frac{dp}{dx} + \tau \frac{dr}{dr} + r \frac{d\tau}{dr} = 0 \Rightarrow r \frac{dp}{dx} + \frac{d(r\tau)}{dr} = 0$$

ricordiamo poi che " $\tau = -\mu \frac{dv}{dr}$ " e quindi:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

per ricavare il valore della derivata della pressione " p " rispetto a " dx " consideriamo la figura adiacente col bilancio di forze:



$$p \pi R^2 - (p+dp) \pi R^2 + \tau_w 2\pi R dx = 0$$

ne deriva $\frac{dp}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$ e poiché siamo in condizioni di moto pienamente sviluppato con sforzo alla parete " τ_w " costante allora anche la derivata della pressione lo sarà: integriamo perciò due volte rispetto a " r ":

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{r}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \xrightarrow{\int} \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) + \frac{C_1}{r} \xrightarrow{\int} v(r) = \frac{r^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) + C_1 \ln(r) + C_2$$

Utilizziamo poi le condizioni al contorno, nella prossima pagina, per calcolare le costanti

Passiamo dai due estremi col seguente sistema

$$\begin{cases} r=R : v=0 \\ r=0 : \frac{dv}{dr}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) + C_1 \ln(R) + C_2 \\ C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

si ottiene così il **profilo di velocità** lungo "r" come espressione:

$$v(r) = - \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Andreziamo ora la velocità media e trattandola rispetto alla portata volumetrica e alla sezione del tubo, otteniamo: ($\langle v \rangle$ = vel. media)

$$\langle v \rangle = \frac{\dot{V}}{A} \Rightarrow \langle v \rangle = \frac{\int_A v(r) dA}{A} = \frac{\int_0^R v(r) 2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R v(r) r dr$$

$$\langle v \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R - \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr = - \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{1}{2\mu} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr$$

$$\langle v \rangle = - \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{1}{2\mu} \left[\int_0^R r dr - \int_0^R \frac{r^3}{R^2} dr \right] = - \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{R^2}{8\mu}$$

notiamo a questo punto che la velocità media può essere espressa tramite la seguente e che la velocità massima (in $r=0$) risulta doppia della velocità media:

$$v(r) = 2 \langle v \rangle \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \Rightarrow V_{max} = v(0) = 2 \langle v \rangle$$

LE PERDITE DI PRESSIONE

Nota il profilo di velocità è possibile stimare le perdite di pressione, ovvero la caduta di pressione (Δp) che si ha tra due sezioni della tubazione a distanza "L". Conoscere questo valore è importante per dimensionare la pompa in modo tale da far giungere il fluido alla sezione finale del tubo.

Come dimostrato in precedenza il termine " $\frac{dp}{dx}$ " è costante e negativo: per ottenere la perdita " Δp " tra due sezioni di una

Tubatura con ①: x_1, p_1 ; ②: $x_2 = x_1 + L, p_2 = p_1 - \Delta p$, occorre integrare tra le due sezioni la nostra espressione differenziale:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{L} = - \frac{\Delta p}{L}$$

da ciò otteniamo:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{8\mu} \Rightarrow \Delta p = \frac{8\mu L \langle v \rangle}{R^2} = \frac{32\mu L \langle v \rangle}{D^2}$$

e se volessimo calcolare la portata volumetrica

$$\dot{V} = \langle v \rangle A = \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{8\mu} \pi R^2 = \frac{\pi}{128} \frac{\Delta p}{\mu L} D^4$$

Questo significa che, a pari portata, raddoppiando il diametro le perdite di carico si riducono di 16 volte, ma d'altro lato dimezzando il diametro, le perdite di carico e quindi la potenza richiesta alla pompa per la movimentazione aumentano di 16 volte. Tutto ciò vale solo nel caso di moto laminare. Da quanto visto è anche possibile calcolare lo sforzo alla parete, infatti da prima:

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{2\tau_w}{R} \quad e \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{\Delta p}{L} \Rightarrow \frac{4\tau_w}{D} = + \frac{\Delta p}{L}$$

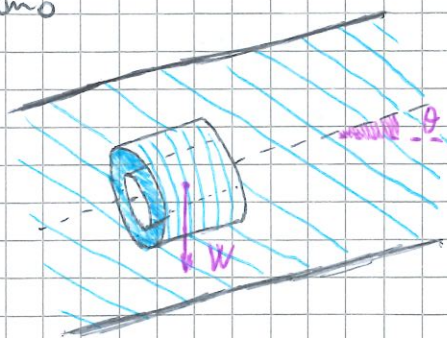
$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{L} = \frac{32\mu \langle v \rangle}{D^2} \Rightarrow \tau_w = \frac{8\mu \langle v \rangle}{D}$$

MOTO LAMINARE IN TUBAZIONI INCLINATE

Nel caso di condotte inclinate nel bilancio di forze si deve aggiungere il contributo della **forza peso (W)** proiettata lungo l'asse.

Per analizzare questo problema consideriamo un' inclinazione " θ " e trattiamo lo stesso anello precedente. Abbiamo che la forza peso proiettata è

$$W_x = W \sin \theta = \rho g V \sin \theta = \rho g 2\pi r dr dx \sin \theta$$



Vediamo ora il bilancio e facciamo dei passaggi simili a quelli svolti in precedenza per il profilo di velocità:

$$\left[\rho z \pi r dr - (\rho + d\rho) z \pi r dr + z \pi r dx - (z + dz) z \pi (r + dr) dx - \rho g z \pi r dr dx \sin \theta = 0 \right.$$

$$\left. \rightarrow r \frac{dp}{dx} + z \frac{dr}{dr} + r \frac{dz}{dr} + \rho g r \sin \theta = 0 \right.$$

introducendo il legame sforzo e gradiente si può scrivere

$$r \left(\frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta \right) + \frac{d(rz)}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

procediamo con l'integrazione e troviamo la velocità funzione di r

$$v(r) = - \left(\frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta \right) \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

vediamo invece la velocità media e la portata volumetrica

$$\langle v \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R v(r) r dr = - \left(\frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta \right) \frac{R^2}{8\mu} = \frac{(\Delta p - \rho g L \sin \theta)}{L} \frac{D^2}{32\mu}$$

$$\dot{V} = \langle v \rangle A = \frac{\pi}{128} \frac{\Delta p - \rho g L \sin \theta}{\mu L} D^4$$

PERDITE DI CARICO E FATTORE D'ATTRITO

Nella meccanica dei fluidi il termine dovuto alle perdite di pressione unito al contributo della gravità viene espresso in termini di altezza equivalente, cioè di **cedente** ovvero quota variazione piezometrica

$$-\frac{\Delta p}{L} - L \sin \theta = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} - (z_2 - z_1) = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \int L$$

Nel caso di sezione costante e moto uniforme la " $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$ " quindi la diminuzione di quota piezometrica è uguale alla **perdita di carico** (P_c)

$$P_c = \Delta \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\langle v \rangle^2}{2g} \right)$$

È anche possibile ricavare lo sforzo alla parete in queste condizioni, ripartendo dalla definizione per tubi orizzontali:

$$\tau_w = - \frac{dp}{dx} \frac{D}{4} \xrightarrow{\text{gravit}} \tau_w = - \left(\frac{dp}{dx} + \rho g \sin \theta \right) \frac{D}{4}$$

ricordando che $\frac{dp}{dx} = - \frac{\Delta p}{L}$ e sostituendo si ha:

$$\tau_w = - \left(- \frac{\Delta p}{L} + \rho g \sin \theta \right) \frac{D}{4} \Rightarrow \frac{4}{D} \frac{L}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g} - L \sin \theta = J L$$

$$\Rightarrow \tau_w = \rho g \frac{D}{4} J$$

Anche la portata volumetrica è esprimibile a "J" tramite Poiseuille:

$$\dot{V} = \langle v \rangle A = \frac{\pi}{128} \frac{\Delta p - \rho g L \sin \theta}{\mu L} D^4 = \frac{\pi}{128} \frac{\rho g}{\mu L} \left(\frac{\Delta p}{\rho g} - L \sin \theta \right) D^4 = \frac{\pi \rho g}{128 \mu L} J L D^4 = \frac{\pi \rho g}{128 \mu} J D^4$$

da cui deriva la seguente: $J = 32 \frac{\mu}{\rho g} \frac{\langle v \rangle}{D^2} \Rightarrow J = f \frac{2 \langle v \rangle^2}{g D}$

dove "f" è il fattore di attrito

e la formula a lato è detta di Darcy-Weisbach. Facciamo ora una serie di passaggi per spiegare questa grandezza (adimensionale):

$$f = J \frac{g D}{2 \langle v \rangle^2} \rightarrow \tau_w = \rho g \frac{D}{4} J \Rightarrow f = \frac{2 \tau_w}{\rho \langle v \rangle^2}$$

Questa "f" si dice **fattore di attrito di Fanning**, vediamo una serie di eguaglianze per la semplificazione del termine

$$f = 32 \frac{\mu}{\rho g} \frac{\langle v \rangle}{D^2} \frac{g D}{2 \langle v \rangle^2} = \frac{16 \mu}{\rho D \langle v \rangle} = \frac{16}{Re}$$

cio' afferma pertanto che il fattore di attrito dipende solamente dal numero di Reynolds. Se si dovessero trattare condutture diverse da tubi circolari le formule variano con coefficienti (C_f, C_p) di sezione sia per la cedente sia per il fattore di attrito.

$$J = C_J \frac{\mu}{\rho g} \frac{\langle v \rangle}{D^2} ; f = \frac{C_f}{Re}$$

Moto TURBOLENTO

La maggior parte delle condizioni di moto che si osservano in campo industriale sono di tipo turbolento ovvero caotiche e casuali, pertanto estremamente difficili da descrivere: al giorno d'oggi la trattazione di questi moti è approssimata a cose più semplici della situazione vera e propria. Il cuore di questi fenomeni sono i **vortici**, caratterizzati da velocità non costanti e mescolamenti intensi; i più piccoli arrivano ad ordini di grandezza di 10^{-7} m.

Essendo che la velocità varia nel tempo potrà essere descritta tramite la sua componente velocità media (\bar{v}) e l'altra della **fluttuazione** ($v'(t)$) nella



seguente "DECOMPOSIZIONE DI REYNOLDS" e la media temporale verrà invece definita così:

$$v(t) = \bar{v} + v'(t)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\Delta t} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

Per quanto riguarda le fluttuazioni possiamo dire che la media di queste sia nulla essendo scarti quadratici medi ($\overline{v'(t)} = 0$) e solitamente si attestano tra il 10% e il 40% di discostamento in valore rispetto alla media.

La più grossa modifica del moto turbolento è nello sforzo tangenziale sul fluido che risentirà di una nuova componente oltre a quella laminare. In particolare per lo **sforzo turbolento** si ha:

$$\tau = \tau_{\text{lamin}} + \tau_{\text{turb}}$$

\Rightarrow

$$\tau_{\text{turb}} = \rho \overline{v'_i v'_j}$$

dove v'_i e v'_j sono le fluttuazioni in due generiche direzioni i e j come ad esempio quella radiale e quella assiale di un tubo.

Negli anni sono stati proposti molti modelli di turbolenza con sempre e comunque delle approssimazioni: uno dei modelli più noti è stato proposto da Boussinesq il quale ha proposto

$$\tau_{\text{turb}} = -\mu_t \frac{d\bar{v}}{dy} \Rightarrow \tau = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}} = -(\mu + \mu_t) \frac{d\bar{v}}{dy}$$

dove lo sforzo turbolento è proporzionale al gradiente della velocità media temporale tramite la **viscosità turbolenta** (μ_t) il cui significato fisico non è però così chiaro, spostando il problema delle fluttuazioni a questa nuova variabile

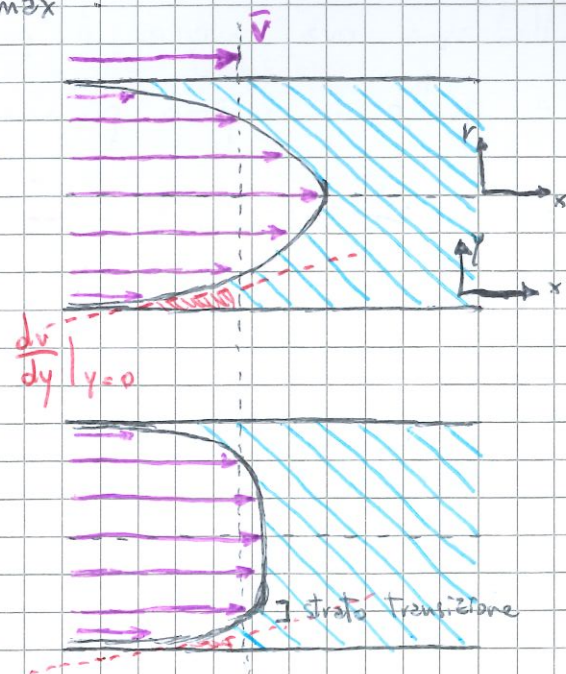
PROFILO DI VELOCITÀ NEL MOTO TURBOLENTO

Nel caso di moto turbolento non è possibile giungere in maniera semplice alla descrizione del profilo di velocità nei tubi, tuttavia possiamo affermare che anche in queste condizioni caotiche che a contatto con le pareti si ha uno strato di fluido in condizioni di moto laminare. Muovendosi verso l'asse del tubo si incontra uno **strato di transizione** dopo il quale il moto risulta più omogeneo a causa dei forti rimescolamenti: per definirlo si considera quello strato di fluido per cui si avrà la seguente relazione: " $v(r) = 99\% V_{\text{max}}$ ".

Vediamo la differenza in figura col moto laminare e approssimiamo il suo profilo alla retta in rosso (ovvero la derivata costante).

Pertanto avremo la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{d\bar{v}}{dy} = \frac{\bar{v}}{y} \Rightarrow \tau_w = \mu \frac{d\bar{v}}{dy} = \mu \frac{\bar{v}}{y}$$



Una volta ricavato il valore dello sforzo alla parete giriamo l'equazione e troviamo la velocità media: da questa otteniamo una nuova grandezza, ovvero la **velocità filtrata di attito** (V_{att}) detta tale poiché il suo quadrato ha le dimensioni sforzo su densità.

$$\bar{v} = \frac{\tau_w y}{\mu} = \frac{\tau_w y}{\rho \nu} \Rightarrow V_{att} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = V_{att}^2 \frac{y}{\nu}$$

dove " ν " è la **viscosità cinematica**. Esprimendo in termini adimensionali possiamo scrivere la **LEGGE DI PARETE**, che rappresenta sufficientemente bene i dati misurati nel caso di PARETI LISCE nell'intervallo " $0 \leq \frac{y V_{att}}{\nu} \leq 5$ " o, in altri termini, fino a una distanza della parete pari a " $y = 5 \frac{\nu}{V_{att}}$ ".

$$\frac{\bar{v}}{V_{att}} = \frac{y V_{att}}{\nu}$$

Se ora chiamiamo " δ_v " lo **spessore laminare** e con " V_{δ_v} " la velocità in corrispondenza di $y = \delta_v$ possiamo scrivere

$$\frac{V_{\delta_v}}{V_{att}} = \frac{\delta_v V_{att}}{\nu} = 5 \Rightarrow \delta_v = \frac{5 \nu}{V_{att}} = \frac{5 \nu}{V_{\delta_v}} = 5 \sqrt{\frac{\nu y}{V}}$$

Vediamo ora invece il profilo di velocità nello strato di transizione e quello in regime pienamente turbolento, rispettivamente

$$\frac{\bar{v}}{V_{att}} = C_1 \ln \frac{y V_{att}}{\nu} + C_2 ; \quad \frac{\bar{v}}{V_{max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

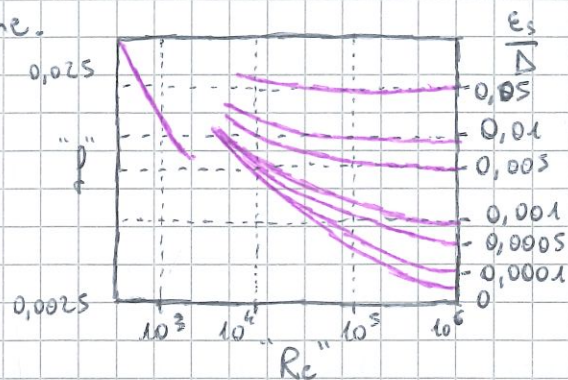
dove C_1, C_2 sono $\sim 3, \sim 5$ in ordini di grandezza e " $n \propto Re^n$ " ovvero proporzionale alla turbolenza. Per valori di $n \rightarrow +\infty$ siamo in condizioni di profilo estremamente piatto (figura pag. 54)

TUBI SCABRI

Tutto ciò che abbiamo detto finora vale per tubi lisci ma nella realtà la finitura di queste tubazioni presenta pareti più o meno scabre. Il fattore di attrito a questo punto non dipende più dal Reynolds ma anche dalla **scabrezza media** (ϵ_s) e più precisamente dalla **scabrezza relativa** ($\frac{\epsilon_s}{D}$) ovvero la precedente divisa per il diametro "D" della sezione.

Dai primi studi su queste grandezze risultava che il fattore d'attrito "f" dipendeva linearmente su scala logaritmica al Reynolds:

$$\log_{10} f = \log_{10} 16 - \log_{10} Re$$



Quando il numero di Reynolds è sufficientemente elevato le curve a "isoscabrezza" tendono a diventare // all'asse x ovvero $\propto Re$: in regime pienamente turbolento l'attrito è controllato solo dalla scabrezza. Per tubi lisci è stata individuata una equazione, detta di **Prandtl-Von Karman** sulla lunghezza di mescolamento etc; inoltre sugli stessi presupposti ne vediamo una $\propto Re$ per il moto turbolento:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \log_{10} \frac{1,255}{Re \sqrt{f}} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \log_{10} \left(\frac{1}{3,71} \frac{\epsilon_s}{D} \right)$$

Per cercare di correlare anche la zona di regime di transizione si propose la **formula di Colebrook** che le sommo:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \log_{10} \left(\frac{1,255}{Re \sqrt{f}} + \frac{1}{3,71} \frac{\epsilon_s}{D} \right)$$

In anni più recenti per mezzo della **formula di Haaland** si riuscì a ricavare direttamente il valore di "f":

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -3,6 \log_{10} \left[\frac{6,9}{Re} + \left(\frac{1}{3,70} \frac{\epsilon_s}{D} \right)^{1,11} \right]$$

Dal punto di vista applicativo, queste formule, ci consentono di verificare le perdite di carico (P_c) all'interno di un condotto provando a evitare di incorrere in problemi di simulazione e/o di progettazione, tramite la seguente

$$P_c = \gamma L = \frac{2f \langle v \rangle^2}{gD} L$$

PERDITE LOCALIZZATE

Oltre alle perdite di carico dovute agli sforzi avremo perdite localizzate dovute a repentini cambi di moto dati da: curve, gomiti, allargamenti, restringimenti, imbocchi, sbocchi, valvole. L'intensa formazione di vortici può portare ad un'intensa dispersione di energia. Per esempio nel caso di valvole si introdurrà un coefficiente (K_L) e poi si esprimeranno le perdite in termini di lunghezza di tubo equivalente (L_e)

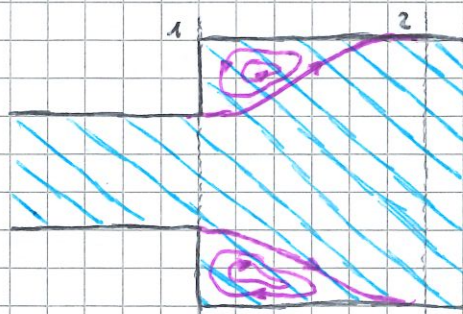
$$P_c = K_L \frac{\langle v \rangle^2}{2g} = f \frac{2 \langle v \rangle^2}{gD} \Rightarrow L_e = \frac{K_L}{4fD}$$

Prendiamo a titolo di esempio un brusco allargamento e applichiamo un bilancio di quantità di moto tra le sezioni 1 e 2;

inoltre facciamo le seguenti semplificazioni:

moto permanente, $\tau_w \approx 0$, profilo di pressione

lungo la corona circolare come idrostatico e coefficiente di raggio uguale a "1", perciò avremo:



$$0 = \int_{A_1} \rho v^2 dA - \int_{A_2} \rho v^2 dA + \int_{A_1} p dA - \int_{A_2} p dA$$

$$p_1 A_1 + p_1 (A_2 - A_1) + \rho A_1 \langle v \rangle_1^2 = p_2 A_2 + \rho A_2 \langle v \rangle_2^2$$

Consideriamo $\langle v \rangle_1 = \bar{v}_1$ e $\dot{V} = A_1 \bar{v}_1 = A_2 \bar{v}_2$ e avremo

$$p_1 A_2 + \rho A_2 \bar{v}_1 \bar{v}_2 = p_2 A_2 + \rho A_2 (\bar{v}_2)^2$$

$$\rho A_2 \bar{V}_2 (\bar{V}_1 - \bar{V}_2) = A_2 (p_2 - p_1)$$

Essendo ovviamente " $\bar{V}_1 > \bar{V}_2$ " ciò significa che " $p_2 > p_1$ " e quindi applicando Bernoulli alle due sezioni a quota costante avremo

$$P_c = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} \right) \Rightarrow P_c = \frac{\bar{V}_1^2 - \bar{V}_2^2}{2g} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho g} \right)$$

$$\rightarrow P_c = \frac{\bar{V}_1^2 - \bar{V}_2^2}{2g} - \left(\frac{\rho \bar{V}_2 (\bar{V}_1 - \bar{V}_2)}{\rho g} \right) = \dots = \frac{\bar{V}_1^2 - 2\bar{V}_1\bar{V}_2 + \bar{V}_2^2}{2g}$$

Da cui deriva la formula di Borda:

$$P_c = \frac{(\bar{V}_1 - \bar{V}_2)^2}{2g}$$

che può essere espressa come la seguente e ottenere " K_L ":

$$P_c = \frac{\bar{V}_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \Rightarrow K_L = \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2} \right)^2$$

Situazioni estreme corrispondono a ingressi e/o uscite in/dai serbatoi e se l'imbocco è a spigolo vivo si forma una sezione contratta e il coefficiente in questo caso è " $K_L = 0,5$ " \Rightarrow " $P_c = 0,5 \frac{V^2}{2g}$ ".

Un modo per ridurre le perdite di carico consiste nel rendere l'imbocco ben raccordato arrotondando gli spigoli vivi.

Il caso limite di brusco allargamento consiste in uno sbocco di area $A_2 \gg A_1$ tale che $K_L = 1$ e pertanto si avrà

$$P_c = \frac{V^2}{2g}$$

Altri esempi consistono in curvature ampie ben raccordate ($K_L = 0,3$) oppure in gomiti (fino a $K_L = 1,1$).

EQUAZIONE INDEFINITA DEL MOTO

Le equazioni di conservazione necessitano di un volume di controllo su cui essere applicate e come detto questo può essere totalmente arbitrario. Ad esempio prendiamo un'auto e descriviamone l'aerodinamica: per riuscire nell'obiettivo dovremo conoscere velocità e pressione di ogni punto della superficie. Per fare ciò dovremo coinvolgere volumi infinitesimi e procedere con un'analisi differenziale: applichiamo le equazioni ai volumetti e integriamo (conoscendo le condizioni al contorno del dominio) al fine di ottenere formulazioni da utilizzare per descrivere le variabili. La soluzione numerica è delegata ad altri: matematici, numerici e spesso programmi di calcolo.

SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR

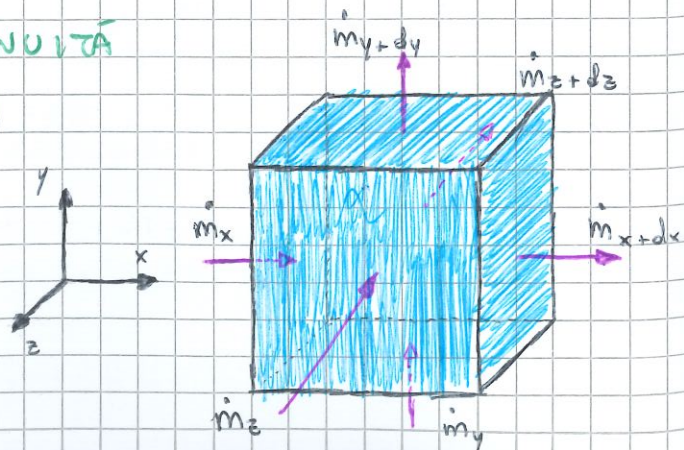
Facciamo un breve recap di questi sviluppi in analogia al corso di "analisi I": sono metodi per approssimare una funzione $f(x)$ continua e derivabile in " x_0 ", punto del dominio, con un polinomio centrato in " x_0 ". Per aumentare la precisione si aumentano i termini k -esimi dello sviluppo in serie:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + O(|x-x_0|^{k+1}) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i + O(|x-x_0|^{k+1}) \end{aligned}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DI CONTINUITÀ

Cerchiamo ora di scrivere quindi il bilancio di materia, ovvero la conservazione della massa per un volumetto infinitesimo di volume

" $V = dx dy dz$ " e chiamiamo poi le



portate massive entranti nelle tre direzioni cartesiane, rispettivamente a quelle uscenti, come:

$$\dot{m}_x, \dot{m}_y, \dot{m}_z \Rightarrow \dot{m}_{x+dx}, \dot{m}_{y+dy}, \dot{m}_{z+dz}$$

a questo punto scriviamo una corollata di passaggi alla formula del bilancio usando gli sviluppi di Taylor e otteniamo:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \dot{m}_x + \dot{m}_y + \dot{m}_z - \dot{m}_{x+dx} - \dot{m}_{y+dy} - \dot{m}_{z+dz}$$

$$\dot{m}_{\bar{c}+d\bar{c}} = \dot{m}_{\bar{c}} + \frac{d}{d\bar{c}}(\dot{m}_{\bar{c}}) d\bar{c} + O(d\bar{c}^2) \quad [O(d\bar{c}^2) \approx 0]$$

$$\dot{m}_{\bar{c}+d\bar{c}} = \dot{m}_{\bar{c}} + \frac{d}{d\bar{c}}(\dot{m}_{\bar{c}}) d\bar{c} \quad \text{con } \bar{c} = x, y, z$$

$$\frac{dm}{dt} = - \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z} dz$$

ora consideriamo invece le portate massice in funzione volumetrica

$$\dot{m} = \rho \dot{V} \Rightarrow m = \rho V = \rho dx dy dz \quad [kg] = \frac{[kg]}{[m^3]} [m^3]$$

$$dx dy dz \frac{d\rho}{dt} = - \frac{d(\rho v_x)}{dx} dx dy dz - \frac{d(\rho v_y)}{dy} dx dy dz - \frac{d(\rho v_z)}{dz} dx dy dz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right]$$

L'equazione precedente è stata propriamente scritta usando delle derivate parziali " ∂ " poiché " x, y, z " sono variabili indipendenti. A questo punto introduciamo il concetto di OPERATORE GRADIENTE (nabla: ∇) sapendo che i, j, k sono i versori degli assi cartesiani

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

scriviamo quindi l'equazione in modo compatto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = 0$$

Tenendo conto delle proprietà delle derivate andiamo a definire la **derivata totale** che porterà ad una nuova formulazione

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(pv) = \frac{\partial p}{\partial t} + p \nabla v + v \nabla p = 0$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \nabla \rightarrow \frac{Dp}{Dt} + p \nabla v = 0$$

Vediamo ora le caratteristiche di moto stazionario (no accumulo) e anche con fluido incompressibile ($\rho = \text{costante}$)

$$\nabla(pv) = p \nabla v + v \nabla p = 0 \quad ; \quad \nabla v = 0$$

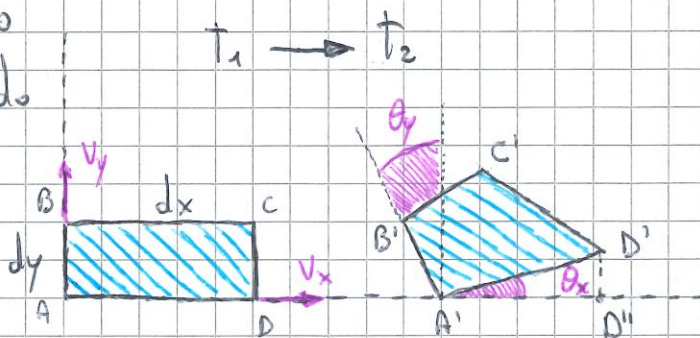
DEFORMAZIONE ELEMENTI DI FLUIDI

Prima di affrontare l'equazione indefinita di quantità di moto dovremo vedere la velocità di deformazione di un elemento di fluido. Durante il movimento di uno di questi pacchetti di fluido dal tempo t_1 a t_2 dove:

$$t_2 - t_1 = dt$$

come standard consideriamo

il punto $A(x, y)$ muoversi con V_x e V_y mentre avremo $B(x, y+dy)$ muoversi con $V_x|_{y+dy}$ e $V_y|_{y+dy}$. Ora scriviamo le velocità in serie di Taylor:



$$\bullet \text{ p.to "B": } V_x|_{y+dy} = V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \quad ; \quad V_y|_{y+dy} = V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy$$

$$\bullet \text{ p.to "D": } V_x|_{x+dx} = V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \quad ; \quad V_y|_{x+dx} = V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx$$

\Downarrow

$$\bullet \text{ p.to "B'": } X_{B'} = x + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \right) dt$$

$$\bullet \text{ p.to "D'": } Y_{D'} = y + \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \right) dt$$

Per conoscere la rotazione infinitesima di AB e AD nelle nuove posizioni descritte con A'B' e A'D' avremo rispettivamente

$$d\theta_y = \dots = \frac{\partial v_x}{\partial y} dt ; \quad d\theta_x = \dots = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt$$

Se " $d\theta_y = d\theta_x$ " allora non vi sarebbe deformazione del pacchetto di fluido: definiamo quindi la **deformazione angolare** la media delle velocità con cui si modifica l'angolo tra i due lati, ovvero:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{d(\theta_y + \theta_x)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

e lo stesso discorso applicato al caso tridimensionale ci fa avere

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) ; \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$$

Vediamo ora le velocità di deformazione lineare lungo gli assi senza troppi calcoli, ovvero:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

È quindi possibile definire una matrice delle velocità di deformazione detto TENSORE DELLE VELOCITÀ di deformazione:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Indichiamo infine la velocità di deformazione cubica:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

L'EQUAZIONE INDEFINITA DI CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO

Vediamo ora la conservazione della quantità di moto di un volumetto infinitesimo (come per la portata massica) descritta da:

$$\frac{d(mv)}{dt} = (p\dot{V}v)_{in} - (p\dot{V}v)_{out} + F_z + F_p + F_g$$

e viene descritta per ogni suo contributo nello spazio, noi tuttavia vedremo solamente l'equazione lungo "x".

$$\frac{d(mv_{x,y,z})}{dt} = (p\dot{V}v_{x,y,z})_{in} - (p\dot{V}v_{x,y,z})_{out} + F_{z,x,y,z} + F_{p,x,y,z} + F_{g,x,y,z}$$

dopo una serie di passaggi e trasformazioni avremo:

$$\frac{d(pv_x)}{dt} = - \left[\frac{\partial(pv_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(pv_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(pv_z v_x)}{\partial z} \right] + \frac{\partial(\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

adesso mancano solo da esprimere gli sforzi viscosi tramite

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} = 2\mu \epsilon_{xy}$$

e quelli lungo un asse x,y,z che tiene conto del cambiamento di volume oltre che a quello di forma ($\lambda = -\frac{1}{3}\mu$)

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \epsilon_{xx} + 2\lambda (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \\ &= \mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \end{aligned}$$

Occorre sottolineare che la precedente, nel solo caso di fluidi incomprimibili, diventerà con " $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ". Facciamo ora ulteriori passaggi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(pv_x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial(pv_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(pv_y v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(pv_z v_x)}{\partial z} \right) &= \frac{\partial(pv_x)}{\partial t} + \nabla \cdot (pv v_x) \\ &= \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + p\mathbf{v} \cdot \nabla(v_x) = v_x \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) \right] + \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + p\mathbf{v} \cdot \nabla(v_x) \end{aligned}$$

e vedremo come il termine in [...] sia nullo e se consideriamo la viscosità circa costante possiamo notare che

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v \nabla(v_x) &= 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v \nabla(v_x) &= \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v \nabla(v_x) &= \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned}$$

Ora riscriviamo tutto in termini di derivata sostanziale, gradiente (∇) e laplaciano (∇^2) ottenendo

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \mu \nabla^2 v_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} \nabla v - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

nel caso di fluido incomprimibile come prima, ovvero con " $\nabla v = 0$ ", e tenendo conto di scrivere anche per le altre direzioni cartesiane:

$$\rho \frac{Dv_{x,y,z}}{Dt} = \mu \nabla^2 v_{x,y,z} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

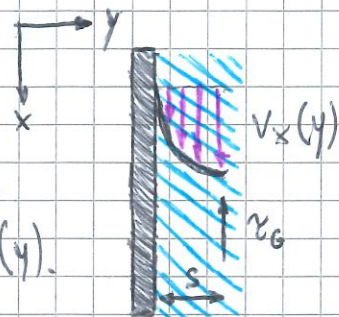
In generale è possibile scrivere le tre equazioni in un'unica formulazione vettoriale che raccoglie tutte e tre le componenti nelle tre direzioni dello spazio e che nella sua espressione più generale può essere scritta come

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right] = \mu \nabla^2 v - \nabla p + \rho g$$

Queste equazioni che governano il moto del fluido necessitano delle condizioni iniziali al tempo " $t=0$ " per essere risolte e prendono informazioni pertanto dalle condizioni al contorno: queste equazioni differenziali prendono il nome di **equazioni di Navier-Stokes**.

Moto A FILM IN REGIME PURAMENTE VISCOSO

Un esempio di sistema in cui è possibile giungere a una soluzione analitica dell'equazione di conservazione dell'equazione di Navier-Stokes è quello relativo al moto a film, ovvero del moto di un liquido che si muove sulla superficie solida sottostante essenzialmente sotto l'azione della forza di gravità. Dato lo spessore molto ridotto è ragionevole pensare che la pressione all'interno sia uniforme e pari a quella dei gas e vapori circostanti e inoltre che $v_x = v_x(y)$. Nel caso di fluido incompressibile ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) e alla luce delle precedenti considerazioni otteniamo:



$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla (v_x) = \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$
$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} + \rho g_x = 0$$

Nel caso di piano di scorrimento inclinato avremo $g_x = g \cos \theta$ mentre in relazione alla distanza della parete abbiamo che:

$$y=0 \Rightarrow v_x(0) = 0$$

$$y=s \Rightarrow \mu \frac{dv_x}{dy} = -\tau_0 \Rightarrow \text{se } \tau_0 = 0 \text{ allora } v(s) = v_{\max}$$

e ricordiamo che " τ_0 " è lo sforzo trasmesso dal gas/vapore controcorrente rispetto al liquido.

Integrando due volte l'equazione alle derivate seconde e risolvendo:

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\frac{\rho g_x}{\mu} \Rightarrow \frac{dv_x}{dy} = -\frac{\rho g_x}{\mu} y + C_1 \Rightarrow v_x = -\frac{\rho g_x}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

sostituendo le equazioni con le costanti con le condizioni al contorno

$$C_1 = \frac{\rho g_x}{\mu} s - \frac{\tau_0}{\mu}$$

$$C_2 = 0$$

A questo punto l'espressione della velocità (con poi $\tau_0 = 0$) diventa

$$V_x = -\frac{\rho g_x}{2\mu} y^2 + \left(\frac{\rho g_x s}{\mu} - \frac{\tau_0}{\mu} \right) y \rightarrow V_x = \frac{\rho g_x}{\mu} y \left(s - \frac{y}{2} \right)$$

noto il profilo di velocità, è possibile calcolare la velocità media del film

$$\overline{V}_x = \frac{1}{s} \int_0^s V_x(y) dy = \frac{\rho g_x}{3\mu} s^2 - \frac{\rho \tau_0}{2\mu} s$$

nel caso di sforzo trascurabile

$$\overline{V}_x = \frac{\rho g_x}{3\mu} s^2 \Rightarrow V_{\max} = \frac{\rho g_x}{2\mu} s^2 \Rightarrow V_{\max} = \frac{3}{2} \overline{V}_x$$

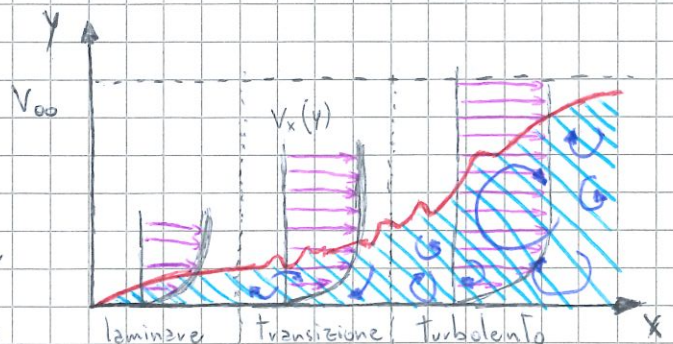
Se $\tau_0 > 0$ si ha una diminuzione della portata di liquido e quindi una **ritenzione** mentre per $\tau_0 = 0$ $V_x(s) = V_{\max}$. Nel primo caso, per garantire la portata il film è costretto a ispessirsi e possono verificarsi due situazioni limite:

- $V_x = 0$ in $y = s$: **LOADING**

- La seconda è quella dove la superficie del film comincia a muoversi solidamente con il gas, verso l'alto, determinando il **FLOODING** e l'allagamento dell'apparecchiatura

STRATO LIMITE

In questa parte affrontiamo il discorso sullo strato limite ovvero quella zona, prossima alla parete del tubo, dove il fluido visente degli sforzi viscosi è rallenta in regime laminare. Consideriamo il caso di una lastra piana e vediamo come andando lungo x il moto diventi sempre più turbolento: ciò deriva da minuscoli infinitesimi che si formano e influenzano il moto non mantenendolo in stato laminare.



Per questo specifico caso il processo di transizione inizia per valori di Reynold critico pari a circa 10^5 fino a diventare uno strato limite turbolento per $Re_x \approx 3 \cdot 10^6$. Ovviamente nel caso di superfici scabre questo valore è decisamente inferiore.

Per poter comprendere quanto accade all'interno dello strato limite è necessario ricorrere alle equazioni indefinite di conservazione e, a tale proposito individuiamo un volumetto infinitesimo nella zona considerata ($y < \delta_v(x)$). Al fine di poterci ricondurre a un sistema di equazioni vedremo le ipotesi di Prandtl: condizioni stazionarie, nessuna variazione lungo z , $\delta_v(x) \ll x$, fluido newtoniano incompressibile. Sotto tali ipotesi le equazioni sono:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

*

se esplicitiamo si ottiene un sistema di tre equazioni nelle 3 incognite v_x, v_y, p . Come termini di riferimento prendiamo rispettivamente ai due assi v_{00} e v_{y0} di ordine di grandezza incognito. "O" sarà l'operatore "ordine di grandezza" e " \approx " la relativa uguaglianza.

$$O\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = \frac{v_{00}}{x}, \quad O\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = \frac{v_{y0}}{\delta_v}, \quad 0 \leq \left(\frac{v_x}{v_{00}}, \frac{v_y}{v_{y0}}\right) \leq 1$$

Dall'equazione di continuità otteniamo: *

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial v_y}{\partial y} \Rightarrow \frac{v_{00}}{x} \approx \frac{v_{y0}}{\delta_v} \Rightarrow v_{y0} \approx v_{00} \frac{\delta_v}{x}$$

quindi abbiamo

$$\frac{v_{00}}{x^2} \ll \frac{v_{00}}{\delta_v^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

A questo punto, date le dimensioni infinitesime, possiamo dire costante la pressione, tale che $p = p(x)$, nella direzione y : $\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y \rightarrow 0} \approx 0$.

Dato questa approssimazione possiamo quindi scartare una delle 3 equazioni. Essendo poi $V_{y0} \ll V_x$ conviene trascurare l'equazione della quantità di moto in V_y . Pertanto, post approssimazioni, si ha:

$$\begin{cases} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad *$$

Per il calcolo del gradiente di pressione, è possibile ricordare che al di fuori dello strato limite, date le ipotesi assunte, vale Bernoulli:

$$\frac{V_\infty^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = \text{costante} \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = V_\infty \frac{dV_\infty}{dx} \quad * \quad (\rightarrow 0)$$

vediamo ora le seguenti implicazioni per gli ordini di grandezza

$$\frac{V_\infty}{x} \approx \frac{V_{y0}}{\delta_v} \Rightarrow V_\infty \frac{V_\infty}{x} \approx V_\infty \frac{V_{y0}}{\delta_v} \Rightarrow V_\infty \frac{V_\infty}{x} \approx \gamma \frac{V_\infty}{\delta_v^2}$$

$$\Rightarrow \delta_v^2 \approx \gamma \frac{x}{V_\infty} \Rightarrow \delta_v \approx \sqrt{\frac{\gamma x}{V_\infty}} \Rightarrow \frac{\delta_v}{x} \approx \sqrt{\frac{\gamma}{x V_\infty}} = Re_x^{-0,5}$$

è stato sperimentalmente trovato che il Re_x inferiore possibile per la validità di ciò che è stato scritto è 10.

Sulla scorta di quanto trovato ricaviamo il fattore d'attrito:

$$f = \frac{2 \tau_w}{\rho \bar{V}^2} = \frac{2 \tau_w}{\rho V_\infty^2}$$

$$\tau_w = \mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} \approx \mu \frac{V_\infty}{\delta_v} = \mu \frac{V_\infty}{x} \frac{x}{\delta_v} \approx \mu \frac{V_\infty}{x} Re_x^{0,5}$$

$$\Rightarrow f \approx \frac{2}{\rho V_\infty^2} \mu \frac{V_\infty}{x} Re_x^{0,5} = \frac{2}{\rho V_\infty} \frac{\mu}{x} Re_x^{0,5} = \frac{2}{Re} Re_x^{0,5} \approx Re^{-0,5}$$

La trattazione analitica rigorosa porta a valori di

• $f = 0,7 Re^{-0,5}$ localmente in un punto della lastra

• $f = 1,4 Re^{-0,5}$ mediamente lungo la lastra

IL TRASPORTO DI ENERGIA

In questo grosso capitolo affrontiamo quelli che sono gli scambi di calore e il trasporto di energia per qualsivoglia metodo: ci interesseremo maggiormente al tempo di tali trasferimenti piuttosto che alla effettiva quantità di energia scambiata. Definiamo il **calore** come POTENZA TERMICA e, tramite questa grandezza, troviamo l'energia trasferita integrando tra l'istante iniziale e finale:

$$Q = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} \dot{Q} dt$$

Come già detto i meccanismi di trasferimento del calore richiedono una differenza di temperatura e sono di tre tipi differenti:

CONDUZIONE

CONVEZIONE

IRRAGGIAMENTO

Analizzeremo passo passo ciascuna di queste tre modalità e ne approfondiremo gli aspetti più rilevanti. I grossi blocchi di argomenti verranno segnati in viola

LA CONDUZIONE

Consideriamo una padella sul fuoco, dopo un po' scotterà anche il manico ed ecco che il fenomeno alla base di questo trasferimento di calore è la conduzione: ovvero si verifica all'interno di un sistema in quiete in presenza di una differenza di temperatura.

Nel 1822 Joseph Fourier propose l'omonima legge empirica:

" Il flusso di calore risultante dalla conduzione è proporzionale alla grandezza del gradiente di temperatura e ad esso opposta in segno "

Questa legge è quindi esprimibile come

$$\dot{q} = -K \frac{dT}{dx} \rightarrow \dot{Q} = \dot{q} A = -K A \frac{dT}{dx}$$

dove \dot{q} è il flusso di calore $\left[\frac{W}{m^2}\right]$ e K è detta conducibilità termica $\left[\frac{W}{mK}\right]$. Questo flusso è una quantità vettoriale che si muove da T alte a T basse lungo tutte le direzioni dello spazio, il che ci porta alla seguente generalizzazione

$$\rightarrow \dot{q} = -K \nabla T = -K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right)$$

assumendo il materiale isotropico, ovvero senza direzioni preferenziali di trasferimento di calore. Alcuni solidi invece, come la grafite, hanno proprietà anisotrope, ovvero opposte.

LA CONDUCEBILITÀ TERMICA

La conducibilità termica è dunque una misura della capacità di un mezzo di trasferire energia sotto forma di calore per effetto della conduzione. Materiali con elevata conducibilità sono buoni conduttori mentre gli altri sono isolanti. La conducibilità dei gas è anche stimabile con buona approssimazione attraverso la teoria cinetica dei gas: da questa risulta come varia con la radice quadrata della temperatura e con l'inverso della radice quadrata della massa molecolare.

È importante sottolineare come, dato il fenomeno in gioco, i gas presentino la conducibilità minore mentre i solidi sono quelli a conducibilità più elevata. Ad esempio troviamo che uno dei migliori isolanti è l'aria ($K = 0,025 \text{ W/mK}$) e difatti la si sfrutta nei doppi vetri, mentre l'acqua l'avrà maggiore ($K = 0,61 \text{ W/mK}$).

LA DIFFUSIVITÀ TERMICA

Un'altra proprietà estremamente importante e legata alla conducibilità è la diffusività termica α $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$. Questa grandezza è data dal rapporto tra la conducibilità e la capacità termica di un materiale

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

e rappresenta la capacità di un corpo di trasmettere calore per conduzione alla sua capacità di accumularlo. Un materiale a diffusività termica elevata tende a trasferire velocemente calore e ad accumularlo in caso contrario. Questa grandezza è utile per stimare i tempi di riscaldamento di un corpo, infatti il tempo caratteristico potrà essere stimato dal rapporto tra la distanza al quadrato e la diffusività:

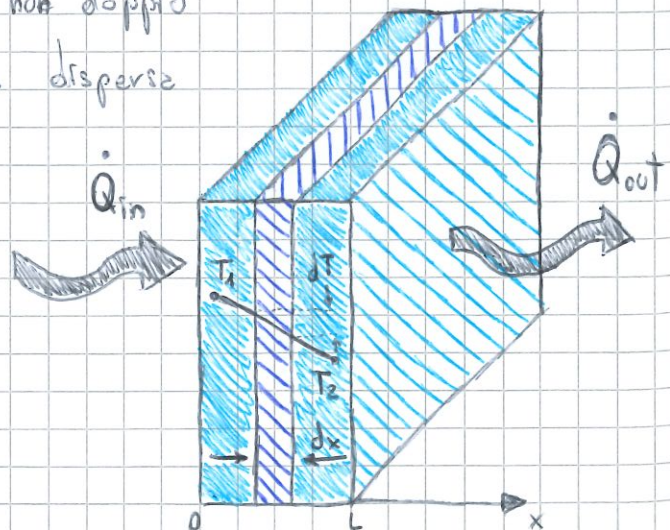
$$\tau = \frac{D^2}{\alpha} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{m}^2/\text{s}} \right] = [\text{s}]$$

LA CONDUZIONE STAZIONARIA IN UNA PARETE PIANA

L'esempio più semplice di conduzione è possibile trovarlo nella trasmissione del calore attraverso una lastra piana lungo una direzione prevalente che assumeremo essere "x", mentre lungo "y, z" non si ha trasferimento di calore, ovvero temperature costanti. Ipotizziamo che la figura rappresenti una finestra a doppio vetro: per valutare la potenza termica dispersa è possibile applicare l'equazione di conservazione attorno alla lastra:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} + \dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out} + \dot{W}_{in} - \dot{W}_{out}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out} = 0 \Rightarrow \dot{Q} = \text{costante}$$



Ricordando poi la legge di Fourier, risulta chiaramente che la variazione di temperatura lungo la lastra è costante. Ciò implica che, in condizioni stazionarie, il profilo di temperatura lungo la lastra varia linearmente dalla temperatura T_1 a T_2 .

$$\dot{Q} = -KA \frac{dT}{dx} = \text{costante} \rightarrow \frac{dT}{dx} = \text{costante}$$

$$\Rightarrow T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

In questo modo è possibile valutare il flusso termico risultante lungo la lastra piana, attraverso l'integrazione per parti dell'espressione precedente della legge di Fourier:

$$\int_0^L \dot{Q} = \int_{T_1}^{T_2} -KA dT : \quad \dot{Q} = KA \frac{T_1 - T_2}{L}$$

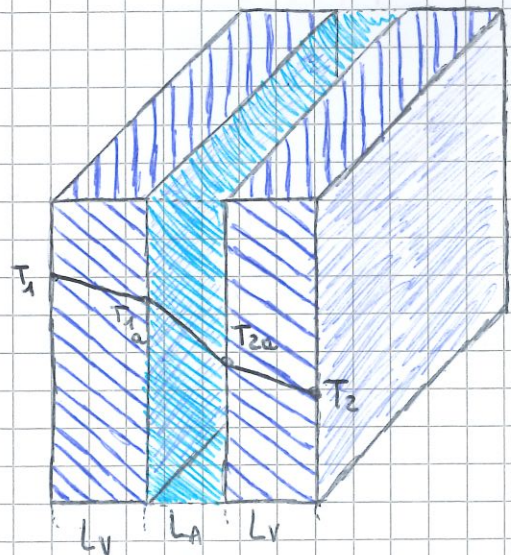
LA CONDUZIONE STAZIONARIA IN PIÙ PARETI PIANE

Dopo essere riusciti a valutare il flusso termico attraverso una finestra, potrebbe risultare interessante valutare il flusso termico attraverso un doppio vetro. A tale fine è possibile considerare il doppio vetro come tre lastre piane affiancate dove ognuna tratterà uno specifico profilo lineare di temperatura, pertanto si calcola il flusso termico

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q}_{v_1} &= K_{v_1} A \frac{T_1 - T_{1a}}{L_{v_1}} \\ \dot{Q}_a &= K_a A \frac{T_{1a} - T_{2a}}{L_a} \\ \dot{Q}_{v_2} &= K_{v_2} A \frac{T_{2a} - T_2}{L_{v_2}} \end{aligned} \right\} \dot{Q}_{v_1} = \dot{Q}_a = \dot{Q}_{v_2} = \dot{Q}$$

Sviluppando si trova che:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{L_{v_1}}{K_{v_1} A} + \frac{L_a}{K_a A} + \frac{L_{v_2}}{K_{v_2} A} \right)}$$



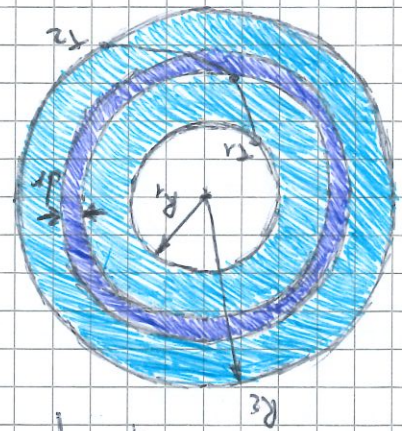
Data questa formula possiamo così abbreviare introducendo il concetto di RESISTENZA: in una generica parete sono n . Quindi otterremo le seguenti relazioni:

$$R_{Ti} = \frac{L_i}{K_i A} \longrightarrow \dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^n R_{Ti}}$$

LA CONDUZIONE STAZIONARIA IN UNO SPESSORE CILINDRICO

Quando si pensa al trasporto di energia in impianti, ci si riferisce generalmente a sistemi cilindrici: spesso tubazioni con fluidi. In tale casistica cerchiamo di trovare la potenza termica trasmessa attraverso lo spessore $\Delta R = R_2 - R_1$. Appliciamo l'equazione di conservazione attorno alla lastra e, per semplificare, assumiamo: condizioni stazionarie, no portata massica e no lavoro.

Ricordando poi Fourier avremo che $A(r) = 2\pi r L$ t.c.



$$r \frac{dT}{dr} = C_1 = \text{costante} \longrightarrow T = C_1 \ln(r) + C_2$$

Aggiungendo le condizioni al contorno si ottiene poi:

$$T(r) = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_2/R_1)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)$$

integrando per parti avremo

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L K}{\ln(R_2/R_1)} (T_1 - T_2)$$

mentre per tubi più spessi e con più strati ci riadattiamo contando resistenze i-esime dalla più interna alla più esterna

$$R_{Ti} = \frac{\ln(R_{i+1}/R_i)}{2\pi L K_i} \longrightarrow \dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^n R_{Ti}}$$

LA CONVEZIONE

Il fenomeno del trasporto di energia per convezione si ha ogni qualvolta un fluido in movimento lambisce una superficie a temperatura differente. Tratteremo due casi possibili: convezione naturale o forzata che come vedremo, pur sembrando simili, richiedono trattazioni differenti.

LA CONVEZIONE FORZATA

L'esperienza del fenomeno della convezione forzata è abbastanza comune sin dall'inizio della nostra vita: dal soffiare sul cibo per raffreddarlo al fare scorrere l'acqua su un cibo per scongelarlo velocemente.

Per descrivere il fenomeno ci riconduciamo

al caso di un fluido freddo e una superficie calda: a lato troviamo i profili di velocità e temperatura.

La descrizione dettagliata risulterebbe di ricerca troppo difficile e pertanto noi troveremo soluzioni approssimate di

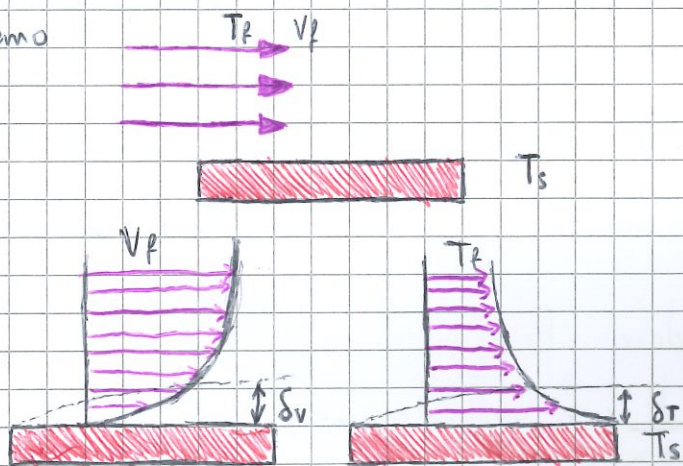
casi semplici. Rappresentiamo la potenza termica come legge di Newton

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = h_T (T_s - T_f)$$

e sappiamo che il problema vero è la stima del coefficiente di scambio " h_T " [$\frac{W}{m^2 K}$]. A livello infinitesimo si può approssimare il trasporto di energia alla conduzione e per continuità dei flussi le due potenze termiche specifiche devono essere uguali:

$$\dot{q} = h_T (T_s - T_f) = -K \frac{dT}{dy} \longrightarrow h_T = \frac{-K \frac{dT}{dy} \big|_{y=0}}{(T_s - T_f)}$$

ovvero sarebbe necessario conoscere il gradiente di temperatura in un intorno di superficie, il che è infattibile e troppo complesso.



LA STIMA DEL COEFFICIENTE CONVETTIVO DI SCAMBIO

Un approccio abbastanza semplice a tale scopo è di ricorrere all'analisi dimensionale e quindi passare dal **teorema di Buckingham**. Questo afferma che esiste una sola relazione tra le "n" grandezze fisiche descritte in una relazione di soli numeri adimensionali derivanti da queste. Applicando questo teorema allo scopo per il quale siamo qui abbiamo che il coefficiente di scambio convettivo è funzione sicuramente delle proprietà del fluido quali densità, viscosità, calore specifico, conducibilità, velocità e dimensione caratteristica

$$h_T = f(\rho, \mu, c_p, K, v, D)$$

dopo diversi passaggi otteniamo

$$\left(\frac{h_T D}{K}\right)^1 B \left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)^e \left(\frac{c_p \mu}{K}\right)^c$$

dove "B" indica che una parte è dipendente dall'altra per mezzo di una costante che, insieme agli esponenti, vanno determinati sperimentalmente a seconda dei casi.

I tre gruppi adimensionali si identificano come:

- Il numero di Nusselt che rappresenta il rapporto tra la capacità di un fluido di scambiare calore per convezione rispetto a quello di scambiare per conduzione e si scrive

$$Nu = \frac{h_T D}{K}$$

- Il numero di Reynolds che è proporzionale al rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscose durante il moto

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

- Il numero di Prandtl, il cui significato fisico appare solo dopo aver diviso numero e denominatore per la densità: risulta il rapporto tra la viscosità cinematica e la diffusività termica, quindi rappresenta la capacità di un fluido di trasferire quantità di moto per diffusione molecolare, rispetto alla sua capacità di trasferire calore per conduzione.

$$Pr = \frac{c_p \mu}{K} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{K}{\rho c_p}} = \frac{\nu}{\alpha}$$

Ne deriva la seguente

$$Nu = B Re^e Pr^c$$

*

FLUSSO DI UN FLUIDO LUNGO UNA LASTRA PIANA

Come visto precedentemente, quando un fluido lambisce una superficie si ha la formazione di uno strato limite in cui si raccolgono tutte le resistenze al trasferimento di quantità di moto.

La formula monomia * avrà che il Reynolds varierà lungo la lunghezza x della lastra e pertanto, essendo x la dimensione caratteristica, si scrive

$$Nu_x = \text{costante} Re_x^e Pr^c$$

$$h_T = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$$

mentre quella sotto trova il valore medio del coefficiente di scambio convettivo, integrando l'" h_x " che è un valore locale che varia a seconda della posizione.

Inoltre introduciamo la temperatura di film, detta anche temperatura media aritmetica,

$$\bar{T} = \frac{T_s - T_\infty}{2}$$

Dopo diverse prove sperimentali si conclude che il coefficiente locale o generico si ricava da

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad \text{strato LIMITE}$$

$$Nu = 0,664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

Attraverso le regressioni lineari si può ottenere l' "h" nella zona di regime Turbolento, prima eravamo nello strato limite " $y < \delta_v$ ", passando però prima della formula a valore α x locale

$$Nu_x = 0,0269 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$$

regime TURBOLENTO

$$Nu = 0,037 Re^{4/5} Pr^{1/3}$$

FLUSSO DI UN FLUIDO LUNGO SUPERFICI DIVERSE

Le trattazioni viste in precedenza sono a priori applicabili a qualsivoglia geometria ma la trattazione numerica spesso è troppo complessa.

Consideriamo il moto attorno a sfere e trasversalmente all'asse di cilindri: Turbolento $Re > 10^5$, laminare $Re < 10$, intermedio $10 < Re < 10^5$

Nel caso delle sferi si usa la correlazione di Whitaker, ovvero

$$Nu = 2 + \left(0,4 Re^{1/2} + 0,06 Re^{2/3} \right) Pr^{0,4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right)^{1/4}$$

Infine nel caso di moto di fluidi all'interno di tubi, con moti distinti considerando Transizione i valori " $2300 < Re < 4000$ ", il Nusselt LAMINARE vale $Nu_{(r,s)} = 3,66$ se $T_s = \text{costante}$ o $Nu_{(a)} = 4,36$ se $\dot{q} = \text{costante}$.

Quando invece il moto è TURBOLENTO si usa Dittus - Boelter:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^n$$

con $n = 0,3$ se il fluido si raffredda e $n = 0,4$ se si scalda. Si usa la temperatura media per le proprietà del fluido e questa correlazione vale per $0,7 \leq Pr \leq 160$ e per $Re > 10000$.

LA CONVEZIONE NATURALE

Il fenomeno di convezione naturale avviene tutte le volte che il moto del fluido che lambisce la parete è indotto dallo stesso scambio termico e non è quindi da esso indipendente, come nel caso della convezione forzata. Essendo la convezione naturale controllata dalla variazione di densità a seguito della differenza di temperatura, risulta chiaro come debba entrare in gioco il **coefficiente di dilatazione cubica** (β) che manifesta il cambiamento di densità a seguito di una variazione di temperatura, a pressione costante:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad \left[\frac{1}{K} \right]$$

Per calcolare come fine ultimo l'"hr" dobbiamo introdurre il numero di Grashof, o velocità di galleggiamento (V_g), poiché il Reynolds perde di significato

$$Gr = \left(\frac{\rho V_g D}{\mu} \right)^2$$

Tenendo conto che in questo caso la velocità è quella indotta dal galleggiamento dovuto alla differenza di densità. Una stima per ordini di grandezza di questa velocità può essere ottenuta considerando che l'energia cinetica che il fluido assume per effetto del suo moto è pari all'energia potenziale persa per effetto della differenza di potenziale

$$\rho V_g^2 \approx g \Delta \rho D \rightarrow V_g^2 \approx \frac{g \Delta \rho D}{\rho} ; \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta T}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx \beta \Delta T \rightarrow V_g^2 \approx g \beta \Delta T D$$

ne deriva che il numero di Grashof è il seguente

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T D^3}{\mu^2}$$

Quindi, come per il Reynolds, esisteranno simili correlazioni

$$Nu = \text{costante } Gr^e Pr^e$$

dove però spesso per la convezione naturale $e=1$ quindi si unifica il tutto con un singolo numero adimensionale, detto di Rayleigh

$$Ra = Gr \times Pr \quad ; \quad Nu = \text{costante } Ra^e$$

Considerando l'importanza dei fenomeni avremo:

- $Gr/Re^2 \gg 1$: convezione naturale domina il sistema
- $Gr/Re^2 \ll 1$: convezione forzata domina il sistema

Quando i due effetti hanno ordini di grandezza simili, è possibile valutare il coefficiente convettivo di scambio, attraverso leggi esponenziali che sommano i due Nusselt stimati per convezione forzata e naturale

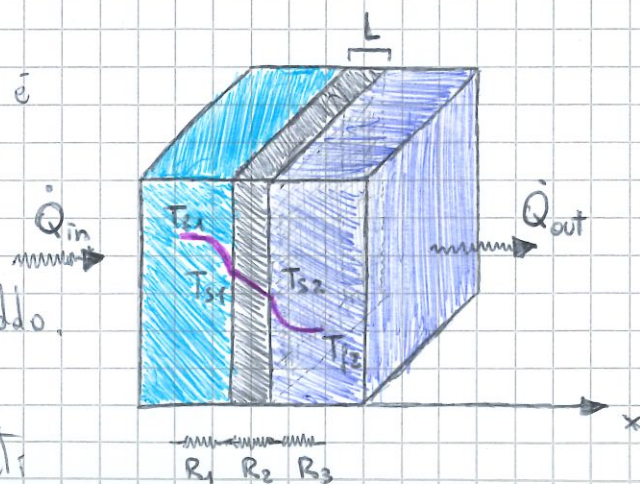
$$Nu^\alpha = Nu_{cf}^\alpha \pm Nu_{cn}^\alpha$$

dove il segno " \pm " varia a seconda di concordanza/discordanza dei fenomeni e " α " ha di solito un valore dell'ordine di 3.

Terminate le parti relative alle differenze tra i due possibili casi di convezione, passiamo oltre analizzando casistiche da ing. chimici.

CONVEZIONE E CONDUZIONE

Un caso tipico degli impianti chimici è quello del riscaldamento/raffreddamento di un fluido attraverso l'uso di un altro fluido ausiliario caldo o freddo. Questi fluidi spesso non possono essere miscelati quindi vengono separati



da una superficie. Se ci rifacciamo alla figura precedente potremo così individuare un sistema di tre equazioni in tre incognite, ovvero le temperature ai capi della superficie di mezzo

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_{T_1 \rightarrow S_1} = \dot{Q} = h_1 A (T_{T_1} - T_{S_1}) \\ \dot{Q}_{S_1 \rightarrow S_2} = \dot{Q} = KA (T_{S_1} - T_{S_2}) / L \\ \dot{Q}_{S_2 \rightarrow T_2} = \dot{Q} = h_2 A (T_{S_2} - T_{T_2}) \end{array} \right\} \equiv \left[\dot{Q} = \frac{T_{T_1} - T_{T_2}}{\left(\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{KA} + \frac{1}{h_2 A} \right)} \right]$$

Ancora una volta ci troviamo di fronte ad un fenomeno che può essere considerato come una serie di resistenze al trasporto (R_T) dove la genericità dipende dal metodo di trasporto dell'energia

$$R_{T_i}^{\text{convett.}} = \frac{1}{h_i A}$$

$$R_{T_i}^{\text{condutt.}} = \frac{L_i}{K_i A} \quad (\text{LASTRA PIANA})$$

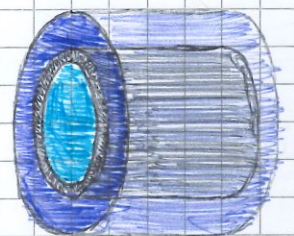
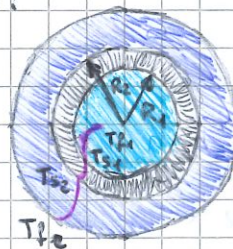
Quanto visto per lastre piane può applicarsi in modo del tutto analogo al caso di fluidi all'interno e all'esterno del tubo. Si passerà da un andamento lineare a uno logaritmico:

$$\dot{Q} = \frac{T_{T_1} - T_{T_2}}{\sum_{i=1}^n R_{T_i}}$$

dove le "n" resistenze generiche potranno essere calcolate tramite le seguenti formule:

$$R_{T_i}^{\text{convett.}} = \frac{1}{h_i 2\pi L R_i}$$

$$R_{T_i}^{\text{condutt.}} = \frac{\ln\left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)}{K_i 2\pi L} \quad (\text{TUBATURE})$$



Nella pratica comune la potenza termica complessiva scambiata non viene espressa tramite una serie di resistenze, bensì attraverso un coefficiente globale di scambio (U):

$$\dot{Q} = UA (T_{T_1} - T_{T_2})$$

Dalla precedente espressione si osserva come tale coefficiente moltiplicato per la superficie di scambio sia pari alla somma delle resistenze in serie; specifichiamo con dei pedici se si tratta di grandezze per lastre piane (\dots_{lp}) oppure di tubazioni (\dots_{tub}):

$$UA_{lp, tub} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n R_{Ti}}$$

$$U_{lp} = \frac{1}{\left(\frac{1}{h_1} + \frac{L}{K} + \frac{1}{h_2}\right)}$$

$$UA_{tub} = \frac{1}{\frac{1}{h_1 2\pi R_1 L} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{K 2\pi L} + \frac{1}{h_2 2\pi R_2 L}}$$

È evidente come in quest'ultimo caso rimane indefinita l'area di scambio "A". In molti casi si assume l'area di scambio come quella corrispondente a una lastra piana in grado di trasferire la stessa "Q".

$$\dot{Q}_{lastra} = \frac{KA}{s} \Delta T$$

$$\dot{Q}_{cilindro} = \frac{K 2\pi L}{\ln(R_2/R_1)} \Delta T$$

dove "s" è lo spessore. Si risolve per l'uguaglianza nell'incognita A e si calcoleranno rispettivamente A_2 , A_1 , A_{ln} ovvero area esterna, interna, media logaritmica

$$A = \frac{2\pi L (R_2 - R_1)}{\ln\left(\frac{2\pi L R_2}{2\pi L R_1}\right)} = \frac{A_2 - A_1}{\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)} = A_{ln}$$

Pertanto, nel caso di trasporto attraverso superfici cilindriche, quindi, l'area di scambio di riferimento spesso adottata è quella MEDIA LOGARITMICA:

$$\dot{Q} = U A_{ln} (T_{h1} - T_{f2})$$

e il coefficiente globale di scambio viene valutato conseguentemente

LA RESISTENZA CONTROLLANTE

Un aspetto fondamentale quando si hanno più resistenze al trasporto di energia riguarda la RESISTENZA CONTROLLANTE, ovvero quella più elevata, che controlla quindi l'intero processo. Infatti nel caso si volesse migliorare lo scambio termico, occorre intervenire su questa e non quelle più ridotte. Prendendo l'esempio del libro, in breve, abbiamo:

$$R_T = \dots = 0,01 + 1,2 \cdot 10^{-4} + 7,5 \cdot 10^{-4} \approx 0,0109 \Rightarrow \dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_T} = \frac{100^\circ\text{C}}{0,0109} = 9170 \text{ W}$$

applicando il concetto di resistenza otteniamo, lavorando sulla prima (0,01), un'efficienza maggiore a minori costi (fattore determinante nella realtà)

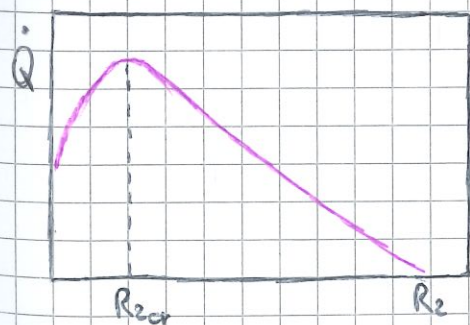
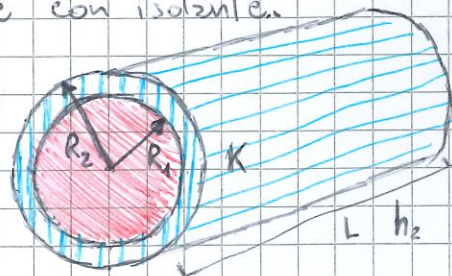
$$R_T = \dots = 0,0053 + 1,2 \cdot 10^{-4} + 7,5 \cdot 10^{-4} = 0,0062 \Rightarrow \dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_T} = \dots = 16195 \text{ W}$$

SPESSORE MINIMO DI ISOLAMENTO

Si consideri un corpo caldo cilindrico che si raffredda all'aria; al fine di ridurre la dispersione si passa alla coibentazione con isolante.

La formula è la seguente, che derivata, ci porta a trovare il **raggio critico di isolamento** (R_{2cr})

poiché se anche l'isolamento possiede una "K" molto piccola questo aumenta la superficie di scambio:



$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{\frac{\ln(R_2/R_1)}{K 2\pi L} + \frac{1}{h_2 2\pi R_2 L}} = \frac{\Delta T 2\pi R_2 L K h_2}{R_2 h_2 \ln(R_2/R_1) + K}$$

$$\frac{d\dot{Q}}{dR_2} = \dots = \frac{2\pi L K h_2 [K - R_2 h_2]}{(R_2 h_2 \ln(R_2/R_1) + K)^2} \Delta T = 0$$

Questa equazione possiede un'azzeramento in " $K - R_2 h_2 = 0$ " da cui:

$$R_{2\text{critico}} = \frac{K}{h_2}$$

LE SUPERFICI ALETTE

Talvolta la potenza termica trasferibile non è sufficiente, da superficie a fluido, quindi si implementano dette di materiale altamente conduttivo come nei radiatori o nelle teste dei motori raffreddati ad aria. Va notato che però una densità di dette troppo elevata può ridurre, alla base delle stesse, la velocità del fluido peggiorando il trasferimento. Si potrebbe scrivere:

$$d\dot{Q}_{d,loc} = h(T_{d} - T_{fluido}) dA_d$$

si potrebbe poi integrare ma se e solo se $K_d \rightarrow \infty$. Facciamo il BILANCIO:

$$\dot{Q}_{cond,x} - \dot{Q}_{cond,x+dx} + \dot{Q}_{conv,x} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Taylor}} - \frac{d\dot{Q}_{cond,x}}{dx} dx + \dot{Q}_{conv,x} = 0$$

Esprimiamo la potenza con Fourier (P=perimetro):

$$\dot{Q}_{conv,x} = h P dx (T_{fluido} - T) \Rightarrow - \frac{d\dot{Q}_{cond,x}}{dx} = h P (T - T_{fluido})$$

$$\Rightarrow - \frac{d}{dx} \left(-K A_c \frac{dT}{dx} \right) = h P (T - T_{fluido}) \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{h P}{K A_c} (T - T_{fluido})$$

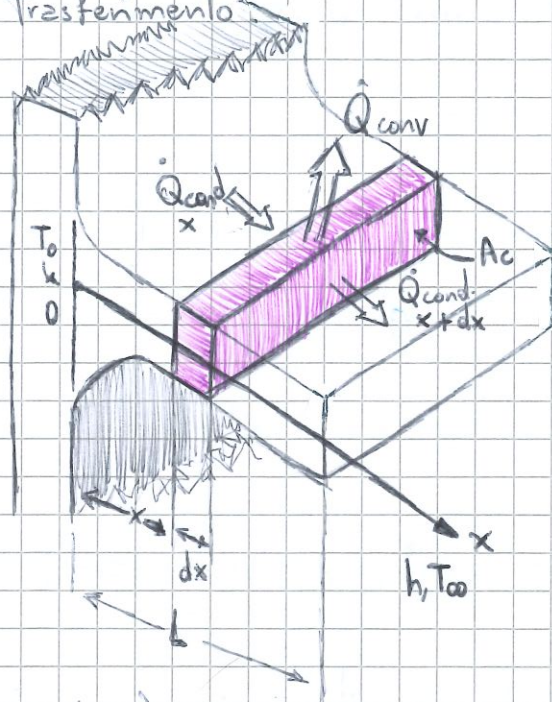
La cui soluzione è del tipo:

$$T - T_{\infty} = C_1 e^{\frac{hP}{KA_c}(T - T_{fluido})} + C_2 e^{-\frac{hP}{KA_c}(T - T_{fluido})}$$

dove C_1, C_2 vanno trovate con condizioni al contorno $[x=L, \frac{dT}{dx}=0]$, $[x=L, T=T_L]$. Introduciamo la temperatura alla base (T_b) e il rendimento (η_{al})

$$\eta_{al} = \frac{\dot{Q}_{al}}{\dot{Q}_{al,max}}$$

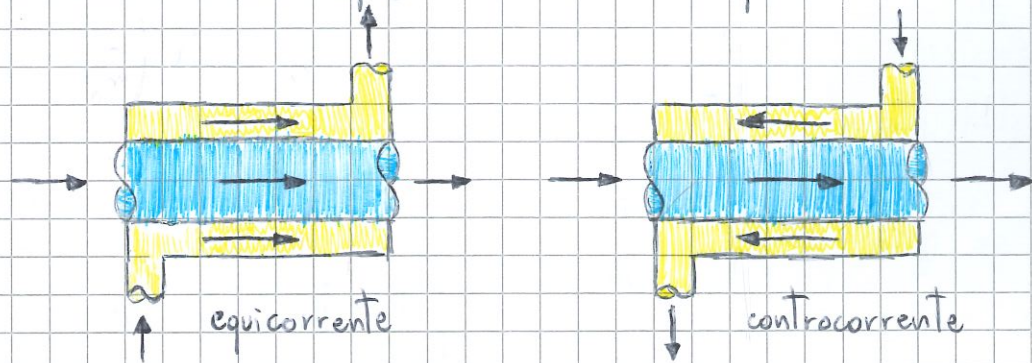
$$\dot{Q}_{al,max} = h(T_b - T_{fluido}) A_d$$



GLI SCAMBIATORI DI CALORE

Gli scambiatori di calore sono apparecchiature molto diffuse negli impianti chimici, che hanno lo scopo di raffreddare o riscaldare un fluido, utilizzando un altro fluido ausiliario tale che ci sia ΔT .

Il più semplice è quello a doppio tubo che può essere in equicorrente o in controcorrente ma nella realtà industriale si usano scambiatori più compatti con elevate superfici di scambio per volume della macchina.



D'ora in poi usiamo i pedici $(-h)$, $(-c)$ per caldo e freddo, in inglese, e consideriamo uno scambiatore operante in condizioni stazionarie e perfettamente adiabatico, ovvero lo scambio avviene solo attraverso i due fluidi ma non c'è potenza termica ceduta all'ambiente. Le portate saranno rispettivamente \dot{m}_h e \dot{m}_c in equicorrente:

$$\frac{d[m(\tilde{U} + \tilde{K} + \tilde{\Phi})]}{dt} = \dot{m}_{in}(\tilde{H} + \tilde{K} + \tilde{\Phi}) - \dot{m}_{out}(\tilde{H} + \tilde{K} + \tilde{\Phi}) + \dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out} - \dot{W}_{in} + \dot{W}_{out}$$

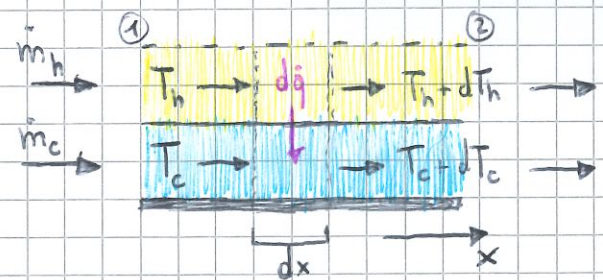
(nell'immagine a fianco i colori sono invertiti)

Possiamo adoperare delle semplificazioni

nel bilancio di energia sopra: $\dot{m} = \text{costante}$,

$(\tilde{U} + \tilde{\Phi}) \approx 0$ trascurabili, \dot{Q} è solo uscente e

il lavoro è nullo sia fatto che subito:



$$\dot{m}_h \tilde{H}_{h_1} - \dot{m}_h \tilde{H}_{h_2} - \dot{Q}_{out} = 0 \Rightarrow \dot{Q} = \dot{m}_h (\tilde{H}_{h_1} - \tilde{H}_{h_2})$$

Si può assumere il calore specifico costante tale che

$$\dot{Q} = \dot{m}_h c_{p_h} (T_{h_1} - T_{h_2})$$

Inoltre troviamo la capacità termica del fluido per unità di tempo

$$\dot{m}_h c_{ph} = \frac{\dot{Q}}{T_{h1} - T_{h2}}$$

ed è possibile cambiare i pedici da $(\dots h) \rightarrow (\dots c)$ e trovare le equazioni analoghe del fluido freddo. Consideriamo ora un volumetto infinitesimo e scriviamo quindi il calore $(d\dot{Q})$ trasferito

$$\begin{cases} d\dot{Q} = -\dot{m}_h d\tilde{T}_h = -\dot{m}_h c_{ph} dT_h \\ d\dot{Q} = -\dot{m}_c d\tilde{T}_c = -\dot{m}_c c_{pc} dT_c \end{cases} \Rightarrow d\Delta T = d(T_h - T_c) = -d\dot{Q} \left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{ph}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{pc}} \right)$$

Facciamo ora un paio di passaggi algebrici partendo dalle prossime formule, viste in precedenza per scambio tra fluidi intubati:

$$d\dot{Q} = U \Delta T dA \Rightarrow d\Delta T = -U \Delta T dA \left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{ph}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{pc}} \right)$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta T_1}^{\Delta T_2} \frac{1}{\Delta T} d\Delta T = -U \left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{ph}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{pc}} \right) \int_A dA$$

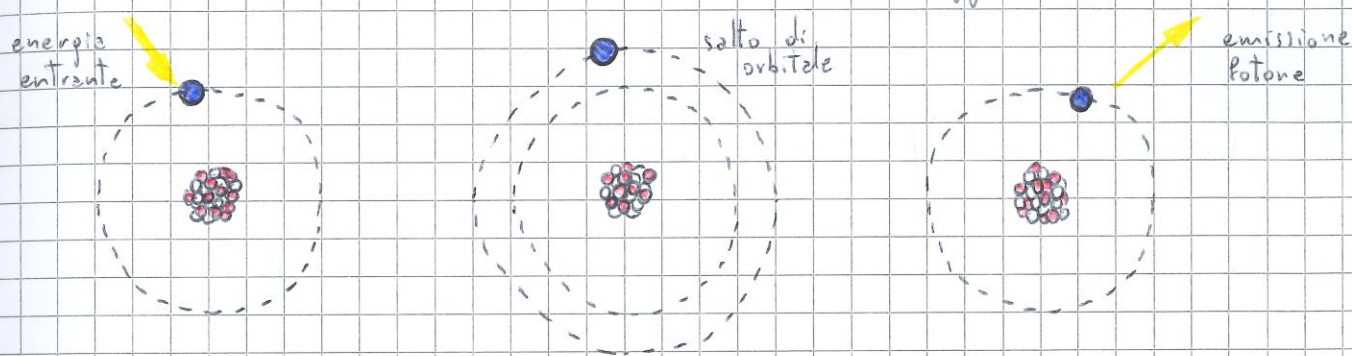
$$\Rightarrow \ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -UA \left(\frac{1}{\dot{m}_h c_{ph}} + \frac{1}{\dot{m}_c c_{pc}} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = UA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln(\Delta T_2 / \Delta T_1)} = UA \Delta T_{lm}$$

dove " ΔT_{lm} " è la differenza di temperatura media logaritmica tra ingresso e uscita e in generale questa grandezza è sempre maggiore nel caso controcorrente rispetto all'corrente, rendendo il primo metodo il più efficiente, soprattutto se accompagnato da fluidi in transizione di fase così da innalzare il coefficiente di scambio convettivo " h_T ".

L'IRRAGGIAMENTO

L'irraggiamento è l'ultimo fenomeno di trasporto dell'energia. Esso si basa sul fatto che tutti i corpi a temperatura superiore allo zero assoluto (0K) emettono costantemente energia attraverso un processo di **radiazione elettromagnetica**. L'intensità di questo flusso di energia dipende dalla temperatura del corpo e dalla natura della sua superficie. L'irraggiamento termico è il risultato del salto elettronico tra orbitali differenti con conseguente emissione di una particella a massa nulla detta **fotone**, che viaggia alla velocità della luce.



Secondo la fisica di Einstein l'irraggiamento non è propriamente visto come la propagazione di un'onda elettromagnetica ma a prescindere dalla visione corretta è utile descrivere il fenomeno in termini di onde e in particolare delle loro frequenze e lunghezze d'onda.

Quest'ultima (λ) è la distanza tra due creste, o massimi dell'oscillazione, dell'onda, mentre la frequenza (f) è l'inverso del tempo di completamento dell'onda (T). La frequenza si misura in Hertz [s^{-1}] e le precedenti sono legate tra loro dalla velocità della luce (c) che è pari a $3 \times 10^8 [m/s]$:

$$\lambda = c/f$$

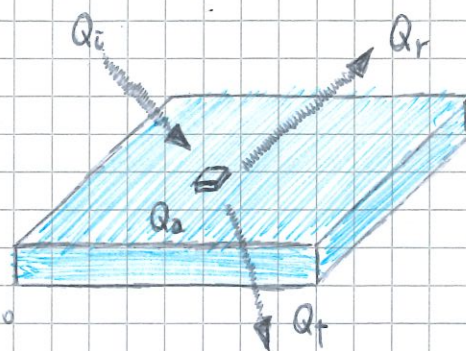
Il limite inferiore di lunghezza d'onda è quella di Planck (l_p) ricavata da velocità della luce, costante di Planck (h) e costante di gravitazione (G)

$$l_p = \sqrt{\frac{hG}{2\pi c^3}}$$

CORPI GRIGI O/E CORPI NERI

Consideriamo un corpo che venga irraggiato da una quantità di calore incidente " \dot{Q}_i ".

Come viene rappresentato si potrà avere che questo calore verrà assorbito, trasmesso o riflesso, dividendo per \dot{Q}_i si otterrà



$$\dot{Q}_i = \dot{Q}_a + \dot{Q}_t + \dot{Q}_r \Rightarrow 1 = a + t + r$$

scopriamo così i coefficienti di assorbanza, trasmittanza e riflettanza e definiamo corpi diversi basandoci su questi, a valori diversi:

$$\text{CORPO GRIGIO} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < t < 1 \\ 0 < r < 1 \end{cases}$$

$$\text{CORPO TRASPARENTE} \begin{cases} a = r = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\text{CORPO OPACO} \begin{cases} a + r = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

tutti questi coefficienti adimensionali dipendono dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente e vengono perciò definiti MONOCROMATICI:

$$a(\lambda) = \frac{\dot{Q}_a(\lambda)}{\dot{Q}_i(\lambda)}$$

$$t(\lambda) = \frac{\dot{Q}_t(\lambda)}{\dot{Q}_i(\lambda)}$$

$$r(\lambda) = \frac{\dot{Q}_r(\lambda)}{\dot{Q}_i(\lambda)}$$

se invece vogliamo i coefficienti integrali bisogna fare

$$a, t, r = \frac{\int_0^\infty Q_{a,t,r}(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty Q_i(\lambda) d\lambda}$$

Un corpo è uniformemente grigio quando $a(\lambda) = \text{costante}$ e < 1 mentre un corpo nero è tale quando si presenta

$$a(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda$$

EMISSIVITÀ E LEGGE DI KIRCHHOFF

Una volta nota la potenza emessa da un corpo nero, è possibile legare a questa quella emessa da un corpo grigio attraverso un coefficiente detto coefficiente di emissione o **emissività/emittanza** (e). Viene quindi definita l'emissività monocromatica e quella integrale:

$$e(\lambda) = \frac{\dot{Q}_e(\lambda)}{\dot{Q}_{e,b}(\lambda)} \quad e = \frac{\dot{Q}_e}{\dot{Q}_{e,b}}$$

Da cui è possibile esprimere la potenza emessa da un qualunque corpo grigio

$$\dot{Q}_{e,b} = e A \sigma_0 T^4$$

Dopo un pò di calcoli si giunge a " $a(\lambda) = e(\lambda)$ " e tale uguaglianza viene enunciata nella **legge di Kirchhoff**, ovvero:

"Per una data lunghezza d'onda e a una data temperatura, l'emissività di una superficie a temperatura T eguaglia il coefficiente di assorbimento per radiazione proveniente da un corpo nero alla stessa temperatura"

FATTORI DI VISTA

Per scaldarci davanti a un camino occorre porsi davanti alla fiamma e sufficientemente vicino. Basta spostarsi di lato e il calore non arriva più: bisogna "vedere" la fiamma se vogliamo scaldarci. Introduciamo così il **fattore di vista** ($F_{i \rightarrow j}$), ovvero la frazione di radiazione uscente da un oggetto i e intercettata dalla superficie dell'elemento j

$$0 \leq F_{i \rightarrow j} \leq 1$$

Vediamo ora una serie di equazioni e implicazioni nel caso del calcolo della potenza termica (\dot{Q}) irradiata

Avremo che:

$$\dot{Q}_{i \rightarrow j} = F_{i \rightarrow j} S_i \sigma_0 T_i^4 \quad \dot{Q}_{j \rightarrow i} = F_{j \rightarrow i} S_j \sigma_0 T_j^4$$

se due corpi hanno la stessa temperatura il calore scambiato dovrà essere necessariamente nullo:

$$\dot{Q}_{i \leftrightarrow j} = \dot{Q}_{i \rightarrow j} - \dot{Q}_{j \rightarrow i} = F_{i \rightarrow j} S_i \sigma_0 T_i^4 - F_{j \rightarrow i} S_j \sigma_0 T_j^4$$

$$\Rightarrow 0 = \sigma_0 T^4 (F_{i \rightarrow j} S_i - F_{j \rightarrow i} S_j) \Leftrightarrow F_{i \rightarrow j} S_i = F_{j \rightarrow i} S_j = F$$

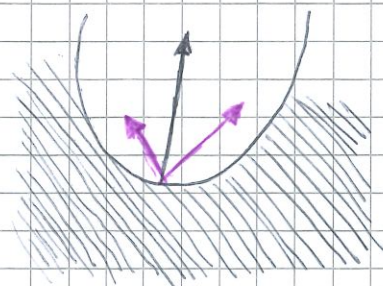
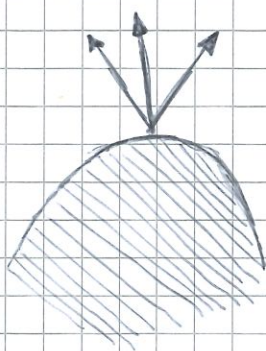
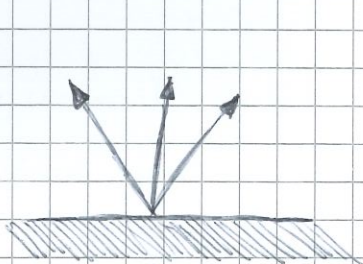
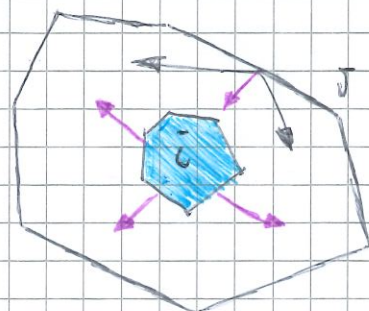
e in "F" sono concentrati tutti gli effetti geometrici dello scambio, ovvero

$$\dot{Q}_{i \leftrightarrow j} = F \sigma_0 (T_i^4 - T_j^4)$$

di conseguenza il problema si riconduce al calcolo dei fattori di vista. Nel caso di un corpo contenuto in un altro

" $F_{i \rightarrow j} = 1$ " ma " $F_{j \rightarrow i} < 1$ ", naturalmente poiché avremo che

$$F_{j \rightarrow i} = \frac{S_i}{S_j} \Rightarrow F_{j \rightarrow i} \neq 0$$



Spesso il calcolo dei fattori di vista è molto oneroso e utilizza due tipologie di formule

$$\bullet dS_i F_{i \rightarrow j} = \frac{1}{\pi} \cos \phi_i d\omega_i dS_i \quad ; \quad d\omega_i = \frac{\cos \phi_j dS_j}{L_{i \rightarrow j}^2}$$

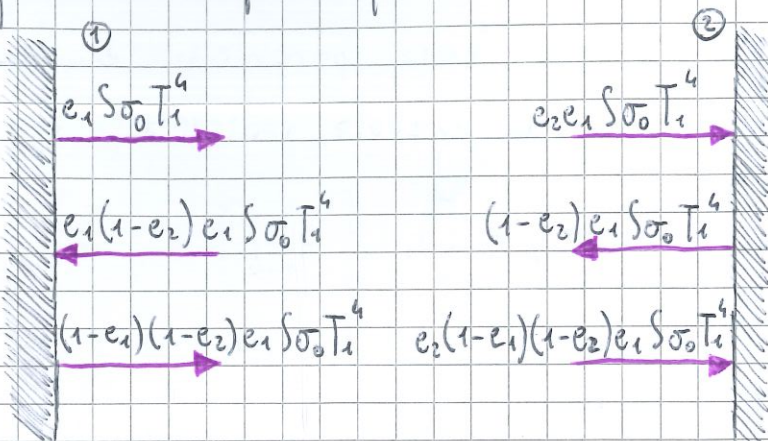
$$\Rightarrow S_i F_{i \rightarrow j} = \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \phi_i \cos \phi_j}{\pi L_{i \rightarrow j}^2} dS_j dS_i$$

$$\bullet F_{i \rightarrow j} = F_{i \rightarrow 1} + F_{i \rightarrow 2} + \dots + F_{i \rightarrow N} = \sum_{n=1}^N F_{i \rightarrow n}$$

SCAMBIO TRA SUPERFICI GRIGIE AFFACCIAATE

Fino ad ora abbiamo considerato lo scambio radiativo tra corpi neri mentre ora, vediamo come questo si complica quando si considerino due corpi grigi: ① e ②.

La potenza irradiata potrà o essere assorbita oppure riflessa, dopo la prima ricezione avremo:



$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2, @} = e_2 e_1 \sigma_0 T_1^4 \text{ (ass.)}$$

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2, @} = (1-e_2) e_1 \sigma_0 T_1^4 \text{ (rif.)}$$

Sommando tutti i successivi contributi di emissione/assorbimento si ha

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = e_1 e_2 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) \sum_{k=0}^{\infty} (1-e_1)^k (1-e_2)^k = e_1 e_2 \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) \sum_{k=0}^{\infty} [(1-e_1)(1-e_2)]^k$$

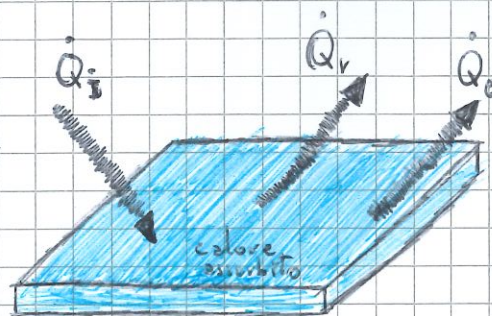
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} [(1-e_1)(1-e_2)]^k = \frac{1}{1 - (1-e_1)(1-e_2)} = \frac{1}{e_1 + e_2 - e_1 e_2}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2 - e_1 e_2} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) = e_m \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)$$

dove e_m è una emissività equivalente.

EMISSIONE DA UNA SUPERFICIE GRIGIA

Vediamo così il caso più generale dell'emissione radiativa di una superficie grigia. Viene definita **radiosità** (\dot{q}_{rad}) di un corpo la somma di radiazione emessa più riflessa



$$\dot{q}_{\text{rad}} = \dot{q}_e + \dot{q}_r = e \sigma_0 T^4 + (1-e) \dot{q}_i$$

troviamo $\dot{q}_{\text{netta}} = \dot{q}_{\text{rad}} - \dot{q}_i$ e diciamo due cose:

- se $\dot{q}_{\text{netta}} > 0$ allora il corpo emette potenza
- se $\dot{q}_{\text{netta}} < 0$ allora il corpo assorbe potenza

Tornando alla potenza netta possiamo sostituire e ricavare

$$\dot{Q}_{\text{netta}} = \frac{e}{1-e} [\sigma_0 T^4 - \dot{q}_{\text{rad}}]$$

dove il termine nella parentesi è la FORZA MOTRICE responsabile del trasporto di energia radiativa. Calcoliamo quindi:

$$\dot{Q}_{\text{netta}} = S \frac{e}{1-e} [\sigma_0 T^4 - \dot{q}_{\text{rad}}] = \frac{\sigma_0 T^4 - \dot{q}_{\text{rad}}}{R}, \quad R = \frac{1-e}{eS}$$

dove abbiamo la RESISTENZA al trasporto di energia. Ricordando quanto visto prima troviamo anche la resistenza spaziale al trasferimento per irraggiamento

$$\dot{Q}_{i \rightarrow j} = \frac{(\dot{q}_{\text{rad},i} - \dot{q}_{\text{rad},j})}{\frac{1}{S_i F_{i \rightarrow j}}} = \frac{(\dot{q}_{\text{rad},i} - \dot{q}_{\text{rad},j})}{R_{i \rightarrow j}}, \quad R_{i \rightarrow j} = \frac{1}{S_i F_{i \rightarrow j}}$$

Al termine poi di numerosi calcoli e semplificazioni otteniamo

$$\dot{Q} = \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{R_1 + R_{1 \rightarrow 2} + R_2} = \frac{\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-e_1}{e_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{1 \rightarrow 2}} + \frac{1-e_2}{e_2 S_2}}$$

TRASPORTO DI MATERIA PER DIFFUSIONE E CONVEZIONE

In un sistema in cui esistono variazioni locali della concentrazione delle specie presenti, la **legge di Fick** stabilisce una relazione tra la portata diffusiva (\vec{j}_i^d) della generica specie e il gradiente della sua frazione in massa (w_i)

$$\vec{j}_i^d = -\rho D \left[\frac{\partial w_i}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial w_i}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial w_i}{\partial z} \vec{k} \right] = -\rho D \nabla w_i$$

$$\vec{j}_i = \vec{j}_i^d + \vec{j}_i^c$$

dove quello totale è la somma del contributo diffusivo più quello convettivo e (D) è la diffusività.

L'equazione indefinita di bilancio materiale per la specie i -esima contiene i termini di accumulo, convezione, diffusione e sorgente.

Abbiamo la velocità d'insieme (\vec{v}) e se (ρ, D) costanti allora

$$\rho \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho \vec{v} \nabla w_i = D \rho \nabla^2 w_i + r_i$$

DIFFUSIONE IN ELEMENTI GEOMETRICI

Vediamo per prima cosa il caso della lastra piana.

Se il sistema è monodimensionale, ovvero non c'è movimento del fluido, e assumendo condizioni stazionarie, l'eq. indefinita di bilancio di materia è:

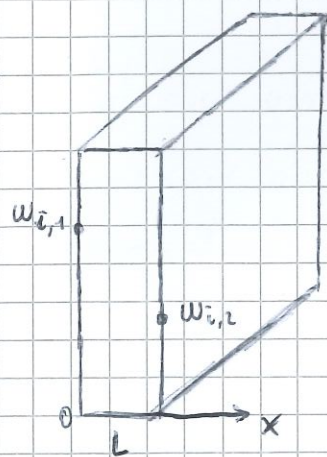
$$\dot{m}_i = -A \rho D \frac{dw_i}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\rho D \frac{dw_i}{dx} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \rho D \frac{d^2 w_i}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 w_i}{dx^2} = 0$$

che risolta con le condizioni al contorno viste in figura risulta:

$$w_i(x) = \frac{w_{i,2} - w_{i,1}}{L} x + w_{i,1} \quad \text{e si ricava da Fick la seguente}$$

$$\Rightarrow \dot{m}_i^d = -A \rho D \frac{dw_i}{dx} = -A \rho D \frac{w_{i,2} - w_{i,1}}{L} = A \rho D \frac{w_{i,1} - w_{i,2}}{L}$$



Vediamo ora la conservazione della specie in coordinate cilindriche e subito dopo la diffusione; partiamo dal classico bilancio

$$\frac{dm_i}{dt} = \dot{m}_{i,x} - \dot{m}_{i,x+dx} + \dot{m}_{i,r} - \dot{m}_{i,r+dr} + r_i V$$

sviluppiamo in serie di Taylor le portate e sostituiamo con le prossime relazioni date dalle definizioni delle aree:

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = - \frac{\partial(\dot{m}_{i,x})}{\partial x} dx - \frac{\partial(\dot{m}_{i,r})}{\partial r} dr + r_i V \quad ; \quad A_x = 2\pi r dr, \quad A_r = 2\pi r dx$$

$$V = 2\pi r dr dx$$

$$\dot{m}_i = \dot{m}_i^c + \dot{m}_i^d = \rho_i \dot{V} - \rho A D \nabla w_i = \rho w_i A v - \rho A D \nabla w_i \quad ; \quad m_i = \rho_i V$$

si ottiene così la seguente catena di equivalenze:

$$\frac{\partial(\rho w_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_i v_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho w_i v_r r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho D \frac{\partial w_i}{\partial r} r \right) + r_i$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial w_i}{\partial x} + \rho v_r \frac{\partial w_i}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho D \frac{\partial w_i}{\partial r} r \right) + r_i$$

Vediamo ora la diffusione attraverso spessore cilindrico dove l'eq. di bilancio viene semplificata assumendo condizioni stazionarie, velocità nulle, sistema non reattivo, proprietà costanti

$$0 = \rho D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w_i}{\partial r} r \right)$$

risolviamo con condizioni al contorno e troviamo la portata diffusiva:

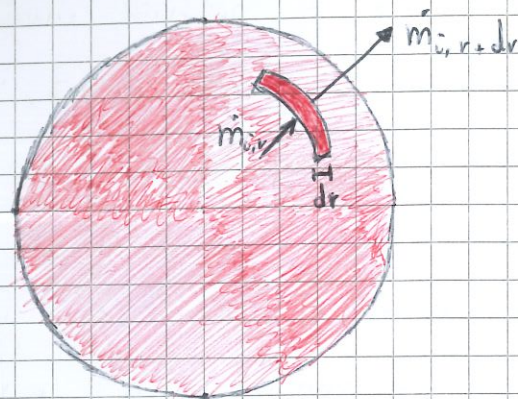
$$w_i(r) = w_{i,2} + \frac{w_{i,1} - w_{i,2}}{\ln(R_1/R_2)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{m}_i^d = -\rho D 2\pi r L \frac{\partial w_i}{\partial r} = -\rho D 2\pi r L \frac{w_{i,1} - w_{i,2}}{\ln(R_1/R_2)} \frac{1}{r} = \frac{2\pi L \rho D}{\ln(R_2/R_1)} (w_{i,1} - w_{i,2})$$

Analizziamo ora la conservazione delle specie in coordinate sferiche. Scriviamo il bilancio e sviluppiamo Taylor:

$$\frac{dm_i}{dt} = \dot{m}_{i,r} - \dot{m}_{i,r+dr} + r_i V \Rightarrow \frac{\partial m_i}{\partial t} = - \frac{\partial(\dot{m}_{i,r})}{\partial r} dr + r_i V$$

sostituendo con le definizioni delle aree:



$$\dot{m}_i = \dot{m}_i^e + \dot{m}_i^d = \rho_i \dot{V} - \rho A D \nabla w_i = \rho w_i A v - \rho A D \nabla w_i$$

$$\Downarrow \quad r^2 \frac{\partial(\rho w_i)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho w_i V r^2)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho D \frac{\partial w_i}{\partial r} r^2 \right) + r_i r^2 ; A_r = 4\pi r^2, V = 4\pi r^2 dr, m_i = \rho_i V$$

da cui otteniamo la seguente, raccogliremo poi " w_i " e evidenziando l'equazione di continuità si ottiene:

$$\frac{\partial(\rho w_i)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho w_i V r^2)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho D \frac{\partial w_i}{\partial r} r^2 \right) + r_i$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho V r \frac{\partial w_i}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho D \frac{\partial w_i}{\partial r} r^2 \right) + r_i$$

STIMA DEL COEFFICIENTE DI DIFFUSIONE IN FASE GAS

Dalla teoria cinetica dei gas, per molecole non polari e specie gassose di massa molecolare simile:

$$D_{AB} = \frac{1}{3} \lambda \bar{u} ; \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2} ; \quad \bar{u} = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}$$

dove " λ " rappresenta il libero cammino medio delle molecole nel gas, " d " il diametro equivalente delle molecole e " n " la concentrazione (numerale) di molecole. Sostituendo si ottiene:

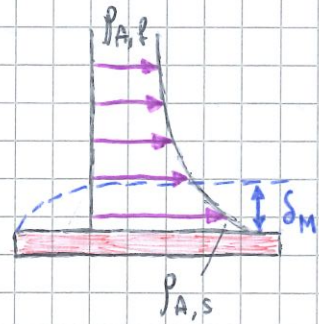
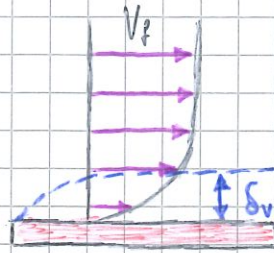
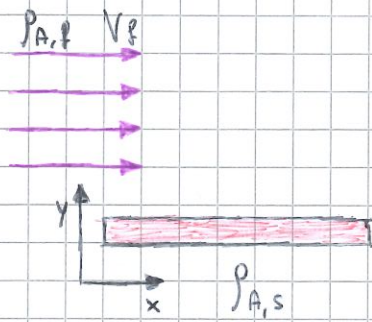
$$D_{AB} = \frac{1}{3} \lambda \bar{u} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2} \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2} \frac{k_B T}{P} \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{k_B^3}{\pi^3}} \frac{T^{3/2}}{m^{1/2} P d^2}$$

generalmente si usa la cosiddetta correlazione di Enskog-Chapman:

$$D_{AB} = 0,0018 \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)^2 \frac{T^{3/2}}{P \sigma_{AB}^2 \Omega_{AB}}$$

Nelle pagine precedenti abbiamo visto la prima componente del trasporto di materia, ovvero la diffusione, vediamo ora l'altra, complementare alla prima, ovvero la **convezione materiale**.

Essa rappresenta il trasporto di materia tra un fluido in movimento e una superficie in quiete dovuto alla differenza di composizione tra fluido e superficie. È possibile evidenziare uno strato limite fluidodinamico e uno materiale.



di norma la descrizione dello strato limite è molto complessa, tuttavia questa complessità si risolve salendo di scala:

$$j_i^c = \frac{\dot{m}_i}{A} = h_m (p_{i,s} - p_{i,f}) ; h_m = f(\rho, \mu, D, v, D) = \rho^a \mu^b D^c v^d D^e$$

dove "h_m" è il coefficiente di scambio convettivo di materia. Costruiamo il sistema lineare composto da massa, lunghezza e tempo e risolviamo:

$$\left[\frac{m}{s} \right] = \left[\frac{kg}{m^3} \right]^a \cdot \left[\frac{kg}{ms} \right]^b \cdot \left[\frac{m^2}{s} \right]^c \left[\frac{m}{s} \right]^d [m]^e$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Masse (kg):} \quad 0 = a + b \\ \text{Lunghezza (m):} \quad 1 = -3a - b + 2c + d + e \\ \text{tempo (s):} \quad -1 = -b - c - d \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} h_m = \rho^a \mu^b D^c v^d D^e = \\ = \rho^{a+e} \mu^{-b-c-d} D^{c+1+e} v^d \end{array} \right.$$

da cui otteniamo diversi numeri

- $St = \frac{h_m}{v}$ numero di **Stanton** materiale
- $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$ numero di **Reynolds**
- $Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D}$ numero di **Schmidt**

Questi numeri sono stati introdotti poiché, dai ragionamenti precedenti

$$\left(\frac{h_m}{v}\right) \left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)^c \left(\frac{\rho D}{\mu}\right)^c$$

quindi moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per " $Re \times Sc$ " si ottiene la seguente, dove il termine a sinistra è il numero di Sherwood, che rappresenta il rapporto tra la capacità di un fluido di scambiare materia per convezione rispetto a quello di scambiare per diffusione. Il numero " Sc " è l'equivalente materiale del " Pr ".

$$\frac{h_m D}{D} = \text{costante } Re^\alpha Sc^\beta$$

Vediamo ora un po' di valori di questa formula, in base alle caratteristiche

• LASTRA PIANA

laminare
turbolento

$$Nu = 0,332 Re^{0,5} Pr^{1/3}$$

$$Sh = 0,332 Re^{0,5} Sc^{1/3}$$

$$Nu = 0,0236 Re^{0,8} Pr^{1/3}$$

$$Sh = 0,0236 Re^{0,8} Sc^{1/3}$$

• MOTO INTUBATO

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{1/4}$$

$$Sh = 0,023 Re^{0,8} Sc^{1/4}$$

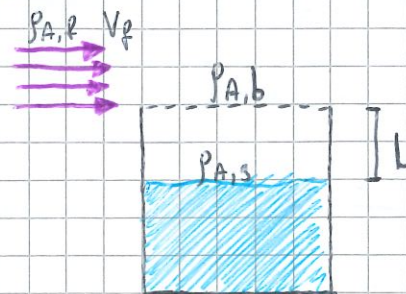
• MOTO ATTORNO A SFERA

$$Nu = 2 + (0,4 Re^{1/2} + 0,06 Re^{2/3}) Pr^{0,4}$$

$$Sh = 2 + (0,4 Re^{1/2} + 0,06 Re^{2/3}) Sc^{0,4}$$

Vediamo un esempio di conduzione e convezione materiale:

$$\begin{cases} \dot{m}_A^d = \frac{AD}{L} (p_{A,s} - p_{A,b}) \\ \dot{m}_A^c = Ah_m (p_{A,b} - p_{A,f}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{m}_A \frac{L}{AD} = (p_{A,s} - p_{A,b}) \\ \dot{m}_A \frac{1}{Ah_m} = (p_{A,b} - p_{A,f}) \end{cases}$$



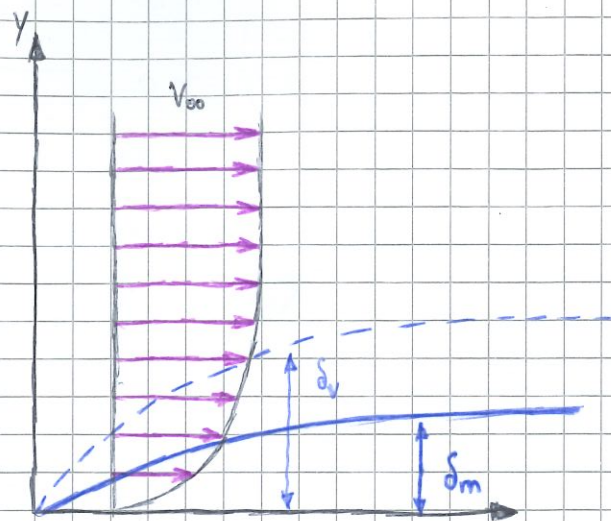
$$\Rightarrow \dot{m}_A = \frac{p_{A,s} - p_{A,f}}{\frac{L}{AD} + \frac{1}{Ah_m}} \quad \text{quindi la resistenza totale}$$

$$\Rightarrow R_{Tot} = \frac{p_{A,s} - p_{A,f}}{\dot{m}_A} = \sum_i R_i = \frac{L}{AD} + \frac{1}{Ah_m}$$

STRATO LIMITE MATERIALE E FLUIDODINAMICO

Facciamo le seguenti assunzioni:

1. $V_y \ll V_x \Rightarrow V_y \approx 0$
2. $\delta \ll x$ (strato limite piccolo)
3. $\delta_m < \delta_v$
4. nessuna variazione lungo z
5. condizioni stazionarie
6. nessuna reazione
7. ρ, D costanti all'interno di δ



Scriviamo l'eq. di bilancio di materia e applichiamo le assunzioni:

$$\rho \frac{\partial w_A}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla(w_A) = \nabla \cdot (\rho D \nabla w_A) + r_A$$

$$\underbrace{\rho \frac{\partial w_A}{\partial t}}_{(5)} + \underbrace{\rho V_x \frac{\partial w_A}{\partial x}}_{(1)} + \underbrace{\rho V_y \frac{\partial w_A}{\partial y}}_{(4)} + \underbrace{\rho V_z \frac{\partial w_A}{\partial z}}_{(4)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\rho D \frac{\partial w_A}{\partial x})}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} (\rho D \frac{\partial w_A}{\partial y})}_{(4)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} (\rho D \frac{\partial w_A}{\partial z})}_{(4)} + \underbrace{r_A}_{(6)}$$

otteniamo quindi (per l'ipotesi 7):

$$\rho V_x \frac{\partial w_A}{\partial x} = \rho D \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2} \Rightarrow V_x \frac{\partial w_A}{\partial x} = D \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2} \Rightarrow V_x \frac{\Delta w_A}{x} \approx D \frac{\Delta w_A}{\delta_m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{V_x}{x} \approx \frac{D}{\delta_m^2} \xrightarrow{\text{Taylor}} V_x = V_0 + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy = \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \Rightarrow V_x \approx \frac{V_{\infty}}{\delta_v} \delta_m$$

$$\Rightarrow \frac{V_{\infty}}{x} \frac{\delta_m}{\delta_v} \approx \frac{D}{\delta_m^2} \Rightarrow \left(\frac{\delta_m}{\delta_v} \right)^3 \approx \frac{x D}{\delta_v^2 V_{\infty}} \Rightarrow \frac{\delta_v}{x} \approx Re^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \delta_v^2 \approx \frac{x \nu}{V_{\infty}}$$

per cui sostituendo e riarrangiando nella precedente si ottiene:

$$\frac{\delta_m}{\delta_v} \approx Sc^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \dot{J} = -\rho D \frac{dw_A}{dy} \Big|_{y=0} = h_m \Delta p_A \Rightarrow D \frac{\Delta p_A}{\delta_m} \approx h_m \Delta p_A \Rightarrow h_m \approx \frac{D}{\delta_m}$$

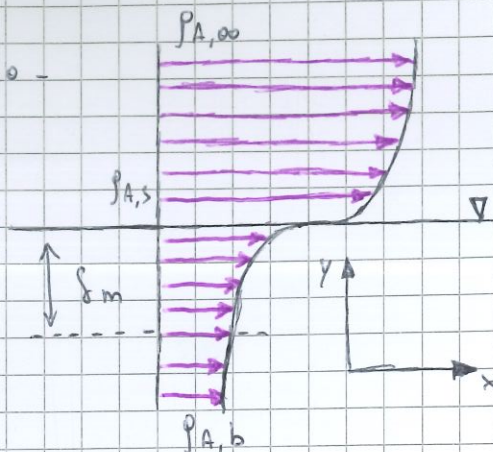
introducendo il numero di Sherwood:

$$Sh = \frac{h_m x}{D} \approx \frac{D}{\delta_m} \frac{x}{D} = \frac{x}{\delta_m} \Rightarrow Sh \approx \frac{x}{\delta_v} \frac{\delta_v}{\delta_m} = Re^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}}$$

se trattazione rigorosa allora $Sh = 0,332 Re^{\frac{1}{2}} Sc^{\frac{1}{3}}$

TEORIA DELLA PENETRAZIONE

Trasporto di un gas in un liquido. La termodynamica indica la quantità di A che può essere disciolta nel liquido, i tempi caratteristici dipendono dal trasporto



Caso 1 (liquido fermo, no reazione, p, D costanti)

$$\rho \frac{\partial w_A}{\partial t} + \rho v \nabla w_A = \nabla(\rho D \nabla w_A) + r_A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w_A}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\Delta w_A}{t} \approx D \frac{\Delta w_A}{\delta_{m,L}^2} \Rightarrow \delta_{m,L} \approx \sqrt{tD}$$

introduciamo un coefficiente di scambio materiale

$$h_{m,L} \Delta p_A = -\rho D \frac{dw_A}{dy} \Rightarrow h_{m,L} \Delta p_A \approx -D \frac{\Delta p_A}{\delta_{m,L}} \Rightarrow h_{m,L} \approx \frac{D}{\delta_{m,L}}$$

$$\Rightarrow h_{m,L} \approx \frac{D}{\sqrt{tD}} = \sqrt{\frac{D}{t}} \xrightarrow{\text{soluzione rigorosa}} h_{m,L} = 1,12 \sqrt{\frac{D}{t}}$$

Caso 2 ($v_{x,L} = \text{costante}$ (liquido si muove lungo x solamente, a velocità costante))

$$\rho \frac{\partial w_A}{\partial t} + \rho v \nabla w_A = \nabla(\rho D \nabla w_A) + r_A \Rightarrow \rho v \nabla w_A = \rho D \nabla^2 w_A$$

$$\Rightarrow v_{x,L} \frac{\partial w_A}{\partial x} = D \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2} \xrightarrow{v \text{ costante}} \frac{\partial w_A}{\partial \left(\frac{x}{v_{x,L}}\right)} = D \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2}$$

introduciamo il **tempo di contatto** (t_c) ovvero:

$$t_c = \frac{x}{v_{x,L}} \Rightarrow \frac{\partial w_A}{\partial t_c} = D \frac{\partial^2 w_A}{\partial y^2}$$

si ottiene un'equazione analoga al caso 1 dove al tempo è stato sostituito il tempo di contatto. La soluzione è ovviamente la stessa.