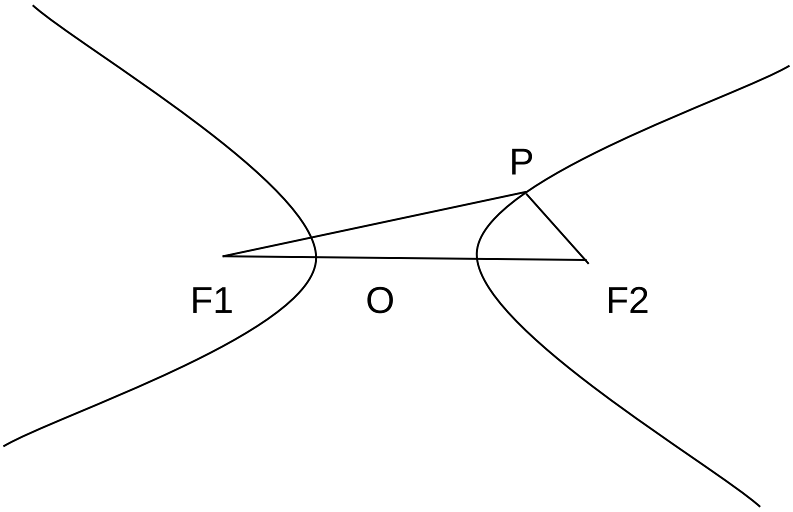
IPERBOLE

Presi due punti F1 e F2, si chiama iperbole il luogo geometrico dei punti P del piano tali che sia costante la differenza delle distanze di P da F1 e da F2.
Quindi i punti P1 e P2 appartengono alla stessa iperbole se
$¿P1F1-P1F2\vee¿\vee P2F1-P2F2\vee¿$ (devo mettere il valore assoluto per essere certo che tale differenza sia positiva

F1 e F2 sono i due fuochi dell’iperbole e il suo centro, O, è il punto medio di F1F2.



chiamiamo:

- 2c la distanza focale (F1F2)
- 2a la differenza costante delle distanze dei punti dell'iperbole dai fuochi ($¿P1F1-P1F2\vee¿\vee P2F1-P2F2\vee¿2a$)
  a e c sono due valori costanti e positivi

Se considero il triangolo PF1F2, grazie alle disuguaglianze triangolari posso dimostrare che PF1-PF2 < F1F2, poichè la differenza tra due lati è sempre minore del terzo.
→ 2a<2c → a<c

Iperbole con i fuochi sull'asse x
Se fissiamo un sistema di riferimento con origine proprio nel centro dell’iperbole, poiché F1F2=2c e poiché OF1=OF2 si ha che:
F1(-c;0) e F2(c;0)
Chiamato P(x; y) un generico punto dell’iperbole
PF1=√❑
PF2=√❑

Dato che |PF1 - PF2| = 2a:
√❑-√❑ = ±2a

Svolgendo i calcoli e semplificando si ottiene: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

che è l’equazione normale dell’iperbole, in cui $b^2=c^2-a^2$

Affinché b^2 sia positivo, la relazione sopra vale solo se $c^2 > a^2$ → $c^2 - a^2 > 0$→ c>a

iperbole con i fuochi sull'asse y
Se i fuochi si trovano sull'asse y, sempre in un sistema con origine nel centro O dell'iperbole, hanno coordinate: F1(0;-c), F2 (0;c)

Svolgendo un ragionamento simile a quello di prima (in questo caso, $¿PF1 - PF2 \vee ¿2b$) , si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

in cui $a^2 = c^2 - b^2$

Ricordiamo che l'iperbole è una curva simmetrica rispetto all'asse x, all'asse y, e all'origine.Ciò significa che i punti P(x;y) P'(x;-y) P'' (-x;y) e P'''(-x;-y) sono tutti punti dell'iperbole
L'equazione canonica dell'iperbole rappresenta un'iperbole riferita al suo centro di simmetria e ai propri assi di simmetria, che sono l'asse x e y

Vertici e assi
iperbole con fuochi sull'asse x:
Troviamo le intersezioni tra l'iperbole e l'asse x:

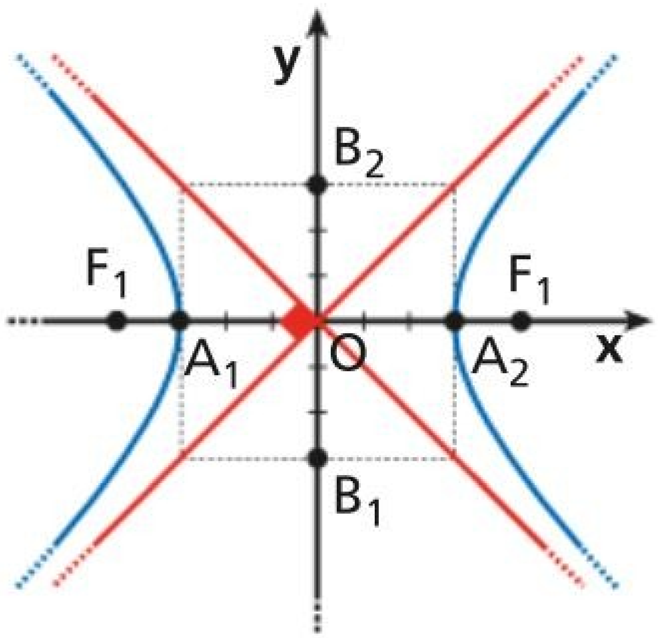
$$\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\{y = 0$$

risolvendo il sistema si ottiene che i punti di intersezione sono A1(-a;0) e A2(a;0)

A1 e A2 sono i vertici REALI e il segmento A1A2 (=2a) si chiama ASSE TRASVERSO
Se, analogamente, si calcolano le intersezioni con l'asse y, si ottiene
$y^2 = -b^2$ ma poichè b^2 è una quantità sempre positiva, il suo opposto è negativo e quindi non ci sono intersezioni con l'asse y
Si possono comunque individuare i vertici B1 e B2, utili per disegnare l'iperbole
B1(0;-b) e B2 (0;b)

B1 e B2 sono i vertici NON REALI, perché non appartengono all'iperbole e il segmento B1B2 (=2b) si chiama ASSE NON TRASVERSO
a e b sono le misure dei semiassi, dunque a>0 e b>0 sempre

In modo analogo, se l'iperbole ha i fuochi sull'asse y basta invertire i nomi dei vertici e degli assi
A1 e A2 = vertici non reali, B1 e B2= vertici reali, A1A2= asse non trasverso e B1B2= asse trasverso
Rappresentazione
Per rappresentare un'iperbole devo costruire il rettangolo A1A2B1B2 e tracciarne le diagonali: i punti dell'iperbole saranno tutti esterni al rettangolo e interni alle rette che contengono le diagonali, che si chiamano ASINTOTI
L'iperbole si avvicina sempre più agli asintoti, allontanandosi dall'origine, ma non li interseca mai.



Poiché i vertici del quadrato hanno coordinate (a;b) e (a;-b) e le rette passano ciascuna per uno di questi due vertici ed entrambe per l'origine, si può scrivere l'equazione degli asintoti come: $y=\pm\frac{b}{a}x$

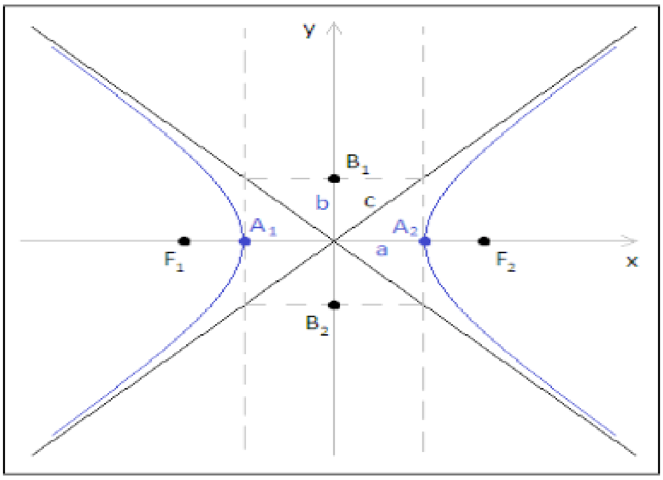
coordinate dei fuochi:
Questa formula è valida sia per l'iperbole con i fuochi sull'asse x che con quella coi fuochi sull'asse y:
$b^2=c^2-a^2 \rightarrow c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=\sqrt{\square}$
quindi F1 ($-\sqrt{\square}$;0) e F2($\sqrt{\square}$)

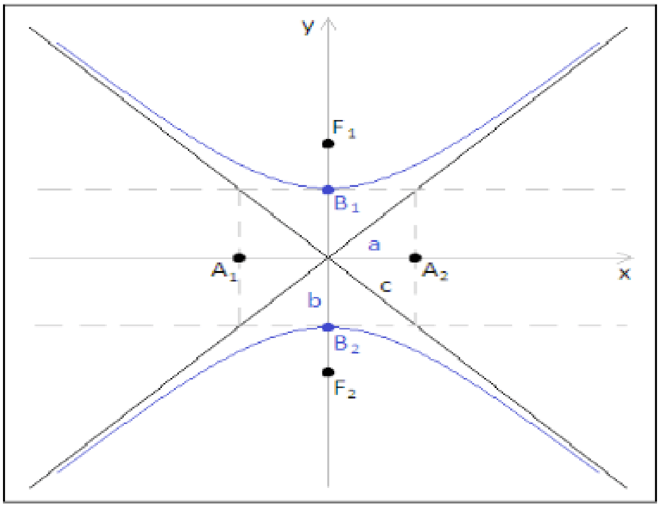
Eccentricità
analogamente all'ellisse, è il rapporto tra la distanza focale e l'asse trasverso

se ha i fuochi sull'asse x: $e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{\square}}{\square}$ (c>a → e>1)

se ha i fuochi sull'asse y: $e=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{\square}}{\square}$
più alta è l'eccentricità, più aperti sono i rami dell'iperbole

L'equazione normale dell'iperbole non rappresenta una funzione, perché a ogni valore di x ne corrispondono due di y





iperboli e rette
Il procedimento è analogo alle altre coniche: si mettono a sistema le equazioni dell'iperbole e della retta, si scrive l'equazione risolvente il sistema, in cui se è di secondo grado, si calcola il delta e:

- se $\Delta>0$ la retta è secante l'iperbole e la incontra in due punti
- se $\Delta=0$ la retta è tangente all'iperbole e la incontra in un solo punto
- se $\Delta<0$ la retta è esterna all'iperbole non la incontra in nessun punto

Inoltre, se si tratta di una retta parallela ad un asintoto (dunque con $m=\pm\frac{b}{a}$), essa intersecherà l'iperbole ma in un solo punto, e l'equazione risolvente il sistema retta-iperbole è di primo grado

Tangenti
Il metodo per trovare le tangenti ad un'iperbole passanti per un punto generico P (xP;yP) è quello di porre uguale a zero il delta dell'equazione che risolve il sistema seguente:

$\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (equazione dell'ellisse)

$\{y-yP=m(x-xP)$ (equazione del fascio di rette passanti per P)

Se il punto P non appartiene all'iperbole, ci sono due tangenti, se appartenente all'iperbole una.
In quest'ultimo caso è possibile usare la formula di sdoppiamento:

$\frac{xxP^{□}}{a^2}-\frac{yyP}{b^2}=\pm 1$ a seconda che l'iperbole abbia i fuochi sull'asse x o sull'asse y.
Per determinare l'equazione di un'iperbole basta conoscere i valori di a e b, dunque è sufficiente trovare due condizioni che permettano di impostare un sistema di incognite a e b.

iperbole traslata

Considero una generica iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$
Per traslarla di vettore v(p;q), applico l'equazione della traslazione secondo cui:
$\{x'=x+p \rightarrow \{x=x'-p$
$\{y'=y+q \rightarrow \{y=y'-q$
Sostituendo nell'equazione dell'ellisse le espressioni trovate si ottiene:
¿¿
che può essere scritta senza gli apici come: ¿¿ →eq. traslata

A_1 (p-a; q) ; A_2 (p+a; q)

F_1 (p -c; q) ; F_2 (p+c; q)

B1(p;q-b); B2 (p;q+b) → se ha i fuochi sull'asse x, altrimenti inverto i vertici reali con i non reali e le ordinate con le coordinate dei fuochi

per quanto riguarda gli asintoti traslati, invece, la loro equazione è:
$y-q=\pm\frac{b}{a}(x-p)$

Se l'equazione viene data nella forma: $a'x^2+b'y^2+c'x+d'y+e'=0$ (dove a' e b' sono discordi) si può riscrivere nella forma evidenziata in giallo usando il metodo del completamento al quadrato.
ESEMPIO

- $x^2-4y^2+2x-24y-31=0$
- riordino mettendo prima i termini in x poi quelli in y e dall'altra parte il termine noto
  $x^2+2x-4y^2-24y=31 \rightarrow x^2+2x-4(y^2+6y)=31$
- aggiungo da entrambe le parti i valori 1 e 9
  $x^2+2x+1-4(y^2+6y+9)=31+1-36$
  il 9 che ho aggiunto nella seconda parentesi, lo devo moltiplicare per -4 a destra poiché tutta la parentesi è moltiplicata per 4 → aggiungo - 36 dall'altra parte
- scrivo i quadrati di binomio :
  $(x+1)-4$¿
- divido per 16: ¿¿

ho così ottenuto l'equazione di un'iperbole traslata di vettore v(-1;-3) e con a=2 e b=1

iperbole equilatera
L'iperbole è equilatera se a=b. Se i fuochi sono sull'asse x ha equazione:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow x^2-y^2=a^2$

Se invece ha i fuochi sull'asse y:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1 \rightarrow x^2-y^2=-a^2$

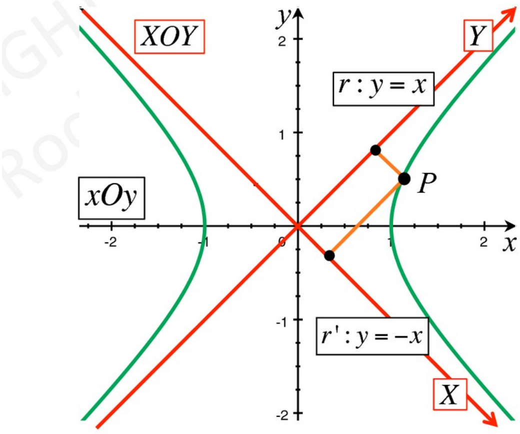
Il rettangolo per costruirla diventa un quadrato poiché a=b e gli asintoti sono le bisettrici del I e III quadrante e del II e IV quadrante:

$y=x \vee y=-x$

Infine, l'eccentricità vale $e=\sqrt{\square}$

equazione riferita agli asintoti:

Considero un nuovo sistema di assi cartesiani, in cui un asintoto è l'asse X e l'altro è l'asse Y (Oxy e OXY)



Prendo un punto P generico dell'iperbole e calcolo le sue distanze dagli asintoti nei due sistemi (rettangolo arancione della figura)

Nel sistema Oxy:

distanza (P, retta r)=$\frac{|x-y|}{\sqrt{\square}}$; distanza (P, retta r')=$\frac{|x+y|}{\sqrt{\square}}$

Nel sistema OXY invece:

distanza (P, retta r)= distanza (P, asse X)=$|X|$; distanza (P, retta r')= distanza (P, asse Y)= $|Y|$

L'area del rettangolo arancione, nei due sistemi, misura rispettivamente:

$\frac{|x-y|}{\sqrt{\square}}$

$|X|\cdot|Y|=|X\cdot Y|$

Visto che si tratta dello stesso rettangolo, posso eguagliare le due espressioni:

$|XY|=¿\frac{a^2}{2}$ in cui $\frac{a^2}{2}=k$

Dunque l'iperbole ha equazione XY=$\pm k$, che in modo più semplice si scrive xy=k dove k può essere positivo o negativo:

se positivo l'iperbole giace nel I e III quadrante, se negativo nel II e nel IV.

L'iperbole ha come assi di simmetria le bisettrici dei quadranti, per cui i vertici e i fuochi giacciono su quei punti.
Ponendo a sistema l'iperbole con le bisettrici ottengo che i vertici reali hanno coordinate:

$V_1\left(-\sqrt{k};-\sqrt{k}\right)$

$V_2\left(\sqrt{k};\sqrt{k}\right)$ se k>0

$V_1\left(-\sqrt{-k};\sqrt{-k}\right)$

$V_2\left(\sqrt{-k};-\sqrt{-k}\right)$ se k<0

In entrambi i casi l'asse trasverso e la semidistanza focale valgono
$a=\sqrt{\square}$ e $c=2\sqrt{\square}$
I fuochi hanno pertanto le seguenti coordinate

$F_1\left(-\sqrt{2k};-\sqrt{2k}\right)$

$F_2\left(\sqrt{2k};\sqrt{2k}\right)$ se k>0

$F_1\left(-\sqrt{-2k};\sqrt{-2k}\right)$

$F_2\left(\sqrt{-2k};-\sqrt{-2k}\right)$ se k<0

funzione omografica
La funzione omografica è un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti traslata, con asintoti paralleli agli assi cartesiani. Essa ha equazione

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

Gli asintoti in questa iperbole hanno equazioni:

$x=\frac{-d}{c}$ e $y=\frac{a}{c}$

mentre il centro di simmetria ha coordinate C($\frac{-d}{c};\frac{a}{c}$)

Quando c=0, la funzione diventa l'equazione di una retta di equazione $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$

Se invece ad-bc=0 ottengo l'equazione di una retta parallela all'asse x, privata del suo punto di ascissa pari all'ascissa del centro di simmetria ($cx+d\neq 0\rightarrow x\neq -\frac{d}{c}$)

Se $c\neq 0$ e $ad-bc\neq 0$ allora ottengo un iperbole equilatera.