

INTEGRALI INDEFINITI

Primitive

Una funzione $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$ se $F(x)$ è derivabile in tutto $[a, b]$ e la sua derivata è $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Integrale indefinito

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è l'insieme di tutte le primitive $F(x) + c$ di $f(x)$, con c numero reale qualunque.

Si indica con $\int f(x) dx$.

- $\int f(x) dx \rightarrow$ si legge "integrale indefinito di $f(x)$ in dx "
- $f(x)$ = funzione integranda
- x = variabile di integrazione
- La primitiva $F(x)$ che si ottiene per $c=0$ si chiama primitiva fondamentale.

Poiché $D F(x) = f(x)$, segue che $D[\int f(x) dx] = f(x)$

Questo significa che l'integrazione indefinita agisce come operazione inversa della derivazione.

Una funzione che ammette una primitiva (e quindi infinite primitive) si dice integrabile

Condizione sufficiente di integrabilità: Se una funzione è continua in $[a, b]$, allora ammette primitive nello stesso intervallo.

Proprietà dell'integrale indefinito

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

$$\int (k \cdot f(x)) dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

Integrali indefiniti immediati

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$

- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c = -\arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + c$
- $\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arccot} x + c = -\arctan x + c$

Integrale delle funzioni la cui primitiva è una funzione composta

- $\int [R(x)]^\alpha R'(x) dx = \frac{[R(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, con $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{R'(x)}{R(x)} dx = \ln |R(x)| + c$
- $\int R'(x) e^{R(x)} dx = e^{R(x)} + c$
- $\int R'(x) a^{R(x)} dx = \frac{a^{R(x)}}{\ln a} + c$
- $\int R'(x) \sin R(x) dx = -\cos R(x) + c$
- $\int R'(x) \cos R(x) dx = \sin R(x) + c$
- $\int \frac{R'(x)}{\cos^2 R(x)} dx = \tan R(x) + c$
- $\int \frac{R'(x)}{\sin^2 R(x)} dx = -\cot R(x) + c$
- $\int \frac{R'(x)}{\sqrt{1-[R(x)]^2}} dx = \arcsin R(x) + c$
- $\int \frac{R'(x)}{1+[R(x)]^2} dx = \arctan R(x) + c$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{\overbrace{\sin x}^{R'(x)}}{\underbrace{\cos x}_{R(x)}} dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\begin{aligned} \int (2x^4 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^2}) dx &= 2 \int x^4 dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx + \int x^{-2} dx = 2 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \\ &= \frac{2}{5} x^5 - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - x^{-1} + C = \frac{2}{5} x^5 - \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

$$\int (3 + \frac{2}{x}) dx = 3 \cdot \int dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx = 3x + 2 \ln|x| + C$$

Calcoliamo $\int \frac{2x-1+x^3}{x^2} dx$.

Poiché il denominatore della frazione integranda è un monomio, possiamo scomporre la frazione in frazioni più semplici e applicare la prima proprietà di linearità:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1+x^3}{x^2} dx &= \int \frac{2x}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{x^3}{x^2} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx + \int x dx = \\ &= 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

$$\int (2e^x + 3 \cdot 5^x) dx = 2 \int e^x dx + 3 \int 5^x dx = 2e^x + \frac{3}{\ln 5} \cdot 5^x + C.$$

$$\int \frac{10^{x-1}}{5^x} dx = \int \frac{10^x}{5^x} \cdot 10^{-1} dx = \int \left(\frac{10}{5}\right)^x \cdot \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} \int 2^x dx = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x + C$$

$$\begin{aligned} \int \left(2 \sin x - \cos x - \frac{4}{\sin^2 x}\right) dx &= 2 \int \sin x dx - \int \cos x dx - 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \\ &= 2(-\cos x) - \sin x - 4(-\cot x) + C = -2\cos x - \sin x + 4\cot x + C \end{aligned}$$

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{1+x^2}\right) dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + 5 \int \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arcsin x + 5 \arctan x + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2}{1+x^2} dx &= 6 \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = 6 \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - 6 \int \frac{1}{1+x^2} dx = 6 \int dx - 6 \arctan x + C = \\ &= 6(x - \arctan x) + C \end{aligned}$$

$$\int 3x^2 (x^3-2)^4 dx$$

Applichiamo la formula $\int [R(x)]^\alpha R'(x) dx = \frac{[R(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, ponendo $R(x) = x^3-2$ e $\alpha = 4$:

$$\int (x^3-2)^4 \cdot 3x^2 dx = \frac{(x^3-2)^{4+1}}{4+1} + C = \frac{(x^3-2)^5}{5} + C$$

$$\star \int \frac{12}{2x^2+1} dx$$

Osserviamo che il numeratore è un multiplo della derivata del denominatore:

$$D[2x^2+1] = 4x.$$

Applichiamo la seconda proprietà di linearità e $\int \frac{R'(x)}{R(x)} dx = \ln|R(x)| + c$:

$$\int \frac{12x}{2x^2+1} dx = 3 \int \frac{4x}{2x^2+1} dx = 3 \ln(2x^2+1) + c$$

non scriviamo $|2x^2+1|$ perché $2x^2+1 > 0 \forall x$

$$\star \int e^{x^2-x} (4x-2) dx$$

Applichiamo $\int R'(x) e^{R(x)} dx = e^{R(x)} + c$.

$$\int e^{x^2-x} (4x-2) dx = 2 \int e^{x^2-x} (2x-1) dx = 2e^{x^2-x} + c$$

$$\star \int \frac{\sin \ln x}{x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{R'(x)} \underbrace{\sin \ln x}_{\sin(R(x))} dx = -\cos \ln x + c$$

$$\star \int \frac{1}{x+x \ln^2 x} dx = \int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{R'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\ln^2 x}}_{\frac{1}{1+(R(x))^2}} dx = 2 \arctan \ln x + c$$

Integrazione per sostituzione

$$\int R(x) dx = \int R(g(t)) g'(t) dt, \text{ dove } x = g(t) \text{ e } dx = g'(t) dt$$

$$\star \text{Calcoliamo } \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$$

- Poniamo $\sqrt{x} = t$, ossia $x = t^2$.
- Calcoliamo il differenziale: $dx = 2t dt$
- Sostituiamo nell'integrale dato e calcoliamo l'integrale rispetto a t

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{1+t} 2t dt = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \int \left[\left(\frac{t+1}{1+t} \right) - \left(\frac{1}{1+t} \right) \right] dt:$$

$$= 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2t - 2 \ln|t+1| + c.$$

- Utilizzando la posizione iniziale, scriviamo il risultato in funzione di x :

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x}+1) + c$$

* Calcoliamo $\int x \sin x^2 dx$ con il metodo di sostituzione.

• Poniamo $t = x^2$ e calcoliamo il differenziale: $dt = 2x dx$.

• Sostituiamo nell'integrale e risolviamo:

$$\int x \sin x^2 dx = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + c.$$

• Scriviamo il risultato in funzione di x :

$$\int x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$$

In generale, per calcolare $\int f(x) dx$ con il metodo di sostituzione.

• si pone $x = g(t)$, oppure $t = g^{-1}(x)$, dove $g(t)$ è invertibile con $g'(t)$ continua e diversa da 0;

• si calcola il differenziale dx , oppure dt ;

• si sostituisce nell'integrale dato, in modo da ottenere un integrale nella variabile t , e si calcola, se possibile, l'integrale rispetto a t ;

• si utilizza la posizione iniziale per scrivere il risultato in funzione di x .

* Calcoliamo per sostituzione l'integrale $\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$.

Poniamo $t = \sqrt{x}$, da cui: $x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$. Sostituiamo nell'integrale:

$$\int \frac{1}{2t(1+t^2)} 2t dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t + c.$$

Sostituiamo, nella primitiva trovata, \sqrt{x} a t : $\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx = \arctan \sqrt{x} + c.$

* Calcoliamo l'integrale $\int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x + 1} dx$.

Poniamo $\tan x = z$ e utilizziamo il metodo di sostituzione senza ricavare la variabile x in funzione di z .

Poiché $\tan x = z$, calcolando il differenziale di entrambi otteniamo:

$$\tan x = z \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = 1 \cdot dz \rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = dz \rightarrow dx = \frac{dz}{1 + \tan^2 x}$$

$$D[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Sostituiamo:

$$\int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x + 1} dx = \int \frac{z^2 + 1}{z + 1} \cdot \frac{dz}{1 + \tan^2 x} = \int \frac{z^2 + 1}{z + 1} \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = \int \frac{1}{z + 1} dz =$$

$$\tan x = z \Rightarrow \tan^2 x = z^2$$

$$= \ln|z + 1| + c = \ln|\tan x + 1| + c$$

* Calcoliamo $\int \frac{2}{1+\sin x} dx$.

Se la funzione integranda contiene al denominatore $\sin x$ o $\cos x$ al primo grado, si pone

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{con } t = \tan \frac{x}{2}.$$

Poniamo $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, con $t = \tan \frac{x}{2}$, da cui:

$$\frac{x}{2} = \arctan t \rightarrow x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Sostituiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{1+\sin x} dx &= \int \frac{2}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 4 \int \frac{1+t^2}{1+t^2+2t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= 4 \int \frac{1}{(t+1)^2} dt = 4 \int (t+1)^{-2} dt = \frac{-4}{t+1} + C = \frac{-4}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C \end{aligned}$$

* Calcoliamo $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

Il dominio della funzione è $D: -1 \leq x \leq 1$.

Possiamo porre $x = \sin t$, con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, per l'invertibilità della funzione.

Calcoliamo $dx = \cos t dt$ e sostituiamo:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt,$$

Poiché $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, allora $\cos t \geq 0$, e quindi $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

Utilizziamo la formula di duplicazione $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t dt &= \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + C \\ &\quad \text{↗} \\ &\quad \sin 2t = 2 \sin t \cos t \end{aligned}$$

Essendo $x = \sin t$, si ha $t = \arcsin x$, quindi:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

Integrazione per parti

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

- $f(x)$ = fattore finito
- $g'(x) dx$ = fattore differenziale

In generale, negli integrali del tipo

$$\int x^n \sin x dx, \int x^n \cos x dx, \int x^n e^x dx$$

x^n si considera come $f(x)$ (fattore finito),

mentre negli integrali del tipo

$$\int x^n \ln x dx, \int x^n \arctan x dx, \int x^n \arcsin x dx$$

$x^n dx$ si considera come $g'(x) dx$ (fattore differenziale).

In particolare, negli integrali

$$\int \ln x dx, \int \arctan x dx, \int \arcsin x dx$$

si considera come $g'(x) dx$ (fattore differenziale) $x^0 dx$, ossia $1 \cdot dx$.

$$\star \int \ln x dx = \int 1 \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \star \int \underset{\substack{\downarrow \\ f'}}{x} \underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{\ln x} &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \\ &= \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C \end{aligned}$$

Abbiamo scelto $x dx$ come fattore differenziale poiché sappiamo calcolare la primitiva di x . Del fattore finito $\ln x$ sappiamo ~~non~~ invece calcolare la derivata, che si semplifica con la ~~derivata~~ primitiva di x e permette di ottenere un integrale semplice da calcolare.

* Calcoliamo $\int x \sin x dx$.

Sappiamo calcolare sia la derivata sia la primitiva di entrambe le funzioni, la scelta migliore è quella di derivare x , perché l'integrale si semplifica.

$$\int \underbrace{x}_{\substack{T \\ R}} \underbrace{\sin x}_{\substack{T \\ R'}} dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Se scegliamo, invece, $\sin x$ come fattore finito, otteniamo:

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx,$$

dove l'integrale a secondo membro è più complicato di quello di partenza.

* Calcoliamo, applicando la formula di integrazione per parti, l'integrale $\int x^2 \ln x dx$,

$$\int \underbrace{x^2}_{\substack{T \\ R'}} \underbrace{\ln x}_{\substack{T \\ R}} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

* Calcoliamo $\int e^x \sin x dx$ applicando la formula di integrazione per parti.

$$\int \underbrace{e^x}_{\substack{T \\ R'}} \underbrace{\sin x}_{\substack{T \\ R}} dx = e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_{\substack{T \\ R'}} \underbrace{\cos x}_{\substack{T \\ R'}} dx$$

Applichiamo nuovamente all'integrale $\int e^x \cos x dx$ la formula di integrazione per parti:

$$\int \underbrace{e^x}_{\substack{T \\ R'}} \underbrace{\cos x}_{\substack{T \\ R}} dx = \underbrace{e^x}_{\substack{T \\ R'}} \underbrace{\sin x}_{\substack{T \\ R'}} - \int \underbrace{e^x}_{\substack{T \\ R'}} \underbrace{(-\sin x)}_{\substack{T \\ R'}} dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$

Donque l'integrale dato diventa:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int \underbrace{e^x \sin x dx}_{\substack{\text{è lo stesso integrale del primo membro}}}$$

Portiamo al primo membro dell'uguaglianza il termine $-\int e^x \sin x dx$ e sommando, otteniamo:

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c_1 \rightarrow \int e^x \sin x = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c, \text{ dove } c = \frac{c_1}{2}.$$

In conclusione: $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$

Integrazione di Funzioni razionali fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx \rightarrow N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

$R(x)$ = resto della divisione tra numeratore e denominatore

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \left[Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \right] dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx.$$

* Calcoliamo $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx$.

Il numeratore ha grado maggiore del denominatore.

Eseguiamo la divisione $(x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$.

x^3	$+ 2x^2$	$+ x$	$+ 1$	$x^2 + 1$
$-x^3$		$-x$		$x + 2$
$/$	$2x^2$	$/$	1	
	$-2x^2$		-2	
	$/$		-1	

$$\rightarrow Q(x) = x + 2, R(x) = -1$$

Il rapporto può essere scritto nel modo seguente:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = x + 2 + \frac{-1}{x^2 + 1}$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx &= \int \left(x + 2 + \frac{-1}{x^2 + 1} \right) dx = \int x dx + 2 \int dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x - \arctan x + C \end{aligned}$$

~ Il numeratore è la derivata del denominatore ~

* Calcoliamo $\int \frac{6x^2 + 8x}{x^3 + 2x^2 + 3} dx$.

Osserviamo che, raccogliendo 2 al numeratore, otteniamo $3x^2 + 4x$, derivata del denominatore, quindi applichiamo

$$\int \frac{R'(x)}{R(x)} dx = \ln |R(x)| + C :$$

$$\int \frac{6x^2 + 8x}{x^3 + 2x^2 + 3} dx = 2 \int \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 3} dx = 2 \ln |x^3 + 2x^2 + 3| + C = \ln (x^3 + 2x^2 + 3)^2 + C$$

$$\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-1} dx = \ln|3x^2-2x-1| + C$$

$$D[3x^2-2x-1] = 6x-2$$

~ Il denominatore è di primo grado ~

$$\int \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + C$$

$$\text{Calcoliamo } \int \frac{2x^2+5x+1}{2x+1}.$$

Poiché il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, eseguiamo la divisione:

$2x^2$	$+5x$	$+1$	$2x+1$
$-2x^2$	$-x$		$x+2$
	$4x$	$+1$	
	$-4x$	-2	
	1	-1	

$$\rightarrow Q(x) = x+2; R(x) = -1.$$

$$\text{Riscriviamo la funzione: } \frac{2x^2+5x+1}{2x+1} = x+2 + \frac{-1}{2x+1}.$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{2x^2+5x+1}{2x+1} dx = \int \left(x+2 - \frac{1}{2x+1} \right) dx = \int (x+2) dx - \int \frac{1}{2x+1} dx.$$

$$= \int (x+2) dx - \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C.$$

$$\text{Calcoliamo } \int \frac{2x-1}{x+4} dx.$$

Essendo il grado del numeratore uguale al grado del denominatore, possiamo svolgere la divisione ma possiamo giungere allo stesso risultato aggiungendo e togliendo 8 al numeratore in modo da far apparire al numeratore un multiplo del denominatore:

$$\frac{2x-1+8-8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} - \frac{9}{x+4} = 2 - \frac{9}{x+4}.$$

Calcoliamo:

$$\int \frac{2x-1}{x+4} dx = \int 2 dx - 9 \int \frac{1}{x+4} dx = 2x - \ln|x+4| + C$$

~ Il denominatore è di secondo grado ~

• Discriminante positivo: $\Delta > 0$

In generale, se $\Delta > 0$:

- si scompone il denominatore: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si scrive la frazione data come somma di frazioni con denominatore di primo grado:

$$\frac{px + q}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{a(x - x_1)} + \frac{B}{x - x_2};$$

- si calcola la somma delle due frazioni al secondo membro;
- si determinano i valori di A e B risolvendo il sistema le cui equazioni si ottengono uguagliando fra loro rispettivamente i coefficienti della x e i termini noti;
- si risolve l'integrale $\int \left[\frac{A}{a(x - x_1)} + \frac{B}{x - x_2} \right] dx$.

Questo metodo vale anche se il numeratore è di grado zero, ossia se $p=0$.

* Calcoliamo $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx$.

$x^2 - x - 2 = 0$ ha $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ e $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, quindi:

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$$

Poniamo:

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}, \text{ con A e B costanti da determinare.}$$

Calcoliamo la somma delle due frazioni:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{x^2 - x - 2} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{x^2 - x - 2}.$$

L'uguaglianza

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{x^2-x-2}$$

è valida, per $x \neq -1 \wedge x \neq 2$, soltanto se i numeratori sono polinomi identici, per il principio di identità dei polinomi. Quindi risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} A+B=5 \\ -2A+B=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=5-A \\ -2A+5-A=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$$

Possiamo dunque scrivere

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2},$$

da cui:

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} \right) dx = 2 \int \frac{1}{x+1} dx + 3 \int \frac{1}{x-2} dx = 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-2| + c$$

Calcoliamo $\int \frac{x-1}{x^2+5x+6} dx$

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$.

Le soluzioni dell'equazione associata al denominatore sono: $x_1 = -2$ e $x_2 = -3$.

Il denominatore si scompone nel prodotto: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

Scriviamo la funzione integranda come somma di due frazioni aventi come denominatori i fattori trovati. Dati $A, B \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}$$

Affinché tale uguaglianza sia un'identità, dobbiamo porre:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=4 \end{cases}$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{x-1}{x^2+5x+6} dx = \int \left(\frac{-3}{x+2} + \frac{4}{x+3} \right) dx = -3 \int \frac{1}{x+2} dx + 4 \int \frac{1}{x+3} dx = -3 \ln|x+2| + 4 \ln|x+3| + c.$$

• Discriminante nullo $\Delta=0$

In generale, se $\Delta=0$:

- si scompone il denominatore: $qx^2+bx+c = q(x-x_1)^2$, dove $x_1 = -\frac{b}{2q}$;
- si scrive la frazione data come somma di due frazioni:

$$\frac{px+q}{qx^2+bx+c} = \frac{A}{q(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_1)^2}$$

- si calcola la somma delle frazioni al secondo membro;
- si determinano i valori di A e B risolvendo il sistema le cui equazioni si ottengono uguagliando rispettivamente i coefficienti della x e i termini noti;
- si risolve l'integrale $\int \left[\frac{A}{q(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_1)^2} \right] dx$;

Calcoliamo $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+4} dx$.

Il denominatore ha $\Delta=0$, pertanto: $x^2-4x+4 = (x-2)^2$

La frazione $\frac{2x-3}{x^2-4x+4}$ può essere scritta come somma di due frazioni aventi come denominatori $(x-2)$ e $(x-2)^2$, cioè:

$$\frac{2x-3}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2} = \frac{Ax-2A+B}{x^2-4x+4}$$

I numeratori della prima e dell'ultima frazione devono essere identici per ogni $x \neq 2$, quindi:

$$\begin{cases} A=2 \\ -2A+B=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}$$

Possiamo scrivere

$$\frac{2x-3}{x^2-4x+4} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{x^2-4x+4} dx &= \int \left[\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} \right] dx = 2 \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \\ &= 2 \int \frac{1}{x-2} dx + \int (x-2)^{-2} dx = 2 \ln|x-2| + \frac{(x-2)^{-1}}{-2+1} + C = \\ &= 2 \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C \end{aligned}$$

Osservazione. In questo caso l'integrale può essere ricondotto alla forma $\int \frac{A'(x)}{A(x)} dx$. Infatti, essendo $D[x^2-4x+4] = 2x-4$, togliamo e

aggiungiamo 1 al numeratore per ottenere:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3-1+1}{x^2-4x+4} dx &= \int \frac{2x-4}{x^2-4x+4} dx + \int \frac{1}{x^2-4x+4} dx = \\ &= \ln(x-2)^2 + \int (x-2)^{-2} dx = 2 \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C \end{aligned}$$

* Calcoliamo $\int \frac{x+5}{x^2+6x+9} dx$.

Il denominatore ha $\Delta=0$ e può essere scritto come quadrato di un binomio: $x^2+6x+9 = (x+3)^2$.

La funzione integranda può allora essere scritta come la somma di due frazioni aventi come denominatori $(x+3)$ e $(x+3)^2$:

$$\frac{x+5}{x^2+6x+9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2} = \frac{Ax+3A+B}{x^2+6x+9}$$

Affinché quest'uguaglianza sia un'identità, dobbiamo porre:

$$\begin{cases} A=1 \\ 3A+B=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{x^2+6x+9} dx &= \int \left[\frac{1}{x+3} + \frac{2}{(x+3)^2} \right] dx = \int \frac{1}{x+3} dx + 2 \int (x+3)^{-2} dx = \\ &= \ln|x+3| + 2 \cdot \frac{(x+3)^{-2+1}}{-2+1} + C = \ln|x+3| - \frac{2}{x+3} + C \end{aligned}$$

Nel caso in cui il numeratore sia di grado zero (cioè $p=0$), ... :

$$\int \frac{a}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{a}{a(x-x_1)^2} dx = \frac{a}{a} \cdot \frac{(x-x_1)^{-1}}{-1+1} + C = -\frac{a}{a(x-x_1)} + C$$

* Calcoliamo $\int \frac{1}{9x^2+6x+1} dx$.

Il discriminante del denominatore è $\frac{\Delta}{4} = 9-9=0$, possiamo quindi scrivere:

$$9x^2+6x+1 = (3x+1)^2. \text{ Si ha allora:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{9x^2+6x+1} dx &= \int \frac{1}{(3x+1)^2} dx = \int (3x+1)^{-2} dx = \frac{1}{3} \int 3(3x+1)^{-2} dx = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3x+1)} + C. \end{aligned}$$

• Discriminante negativo $\Delta < 0$

① il numeratore è di grado zero, ossia l'integrale è del tipo

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx, \text{ con } a \neq 0.$$

In generale, per calcolare $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$ se $\Delta < 0$:

• si scrive il denominatore nella forma $[R(x)]^2+1$ con il metodo del completamento del quadrato;

• si trasforma il numeratore in modo che diventi $R'(x)$;

• si calcola l'integrale $\int \frac{R'(x)}{[R(x)]^2+1} dx = \arctan R(x) + C$.

* Calcoliamo $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$.

Il denominatore ha $\Delta = -4 < 0$.

Cerchiamo di ridurre l'integrale al modello:

$$\int \frac{R'(x)}{[R(x)]^2+1} dx = \arctan R(x) + C.$$

Scriviamo il denominatore nella forma $[R(x)]^2+1$ con il metodo del completamento del quadrato:

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1 - 1 + 2 = (x+1)^2+1$$

L'integrale dato diventa:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \arctan(x+1) + C$$

* Calcoliamo $\int \frac{1}{x^2-6x+10} dx$.

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$.

Utilizzando il metodo del completamento del quadrato, cerchiamo di ricondurre l'integrale al modello:

$$\int \frac{R'(x)}{[R(x)]^2+1} dx = \arctan R(x) + c.$$

Possiamo scrivere: $x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1$.

L'integrale diventa: $\int \frac{1}{x^2-6x+10} dx = \int \frac{1}{(x-3)^2+1} dx = \arctan(x-3) + c$.

② il numeratore è un polinomio di primo grado, cioè l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{Px+q}{ax^2+bx+c} dx, \text{ con } a \neq 0 \text{ e } p \neq 0.$$

In generale, per calcolare $\int \frac{Px+q}{ax^2+bx+c} dx$, con $a \neq 0$, $p \neq 0$ e $\Delta < 0$:

- si opera sul numeratore per farvi figurare la derivata del denominatore;
- si scrive l'integrale come somma di due integrali:

$$r \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + s \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx;$$

- si calcola il primo integrale ricordando che $\int \frac{R'(x)}{R(x)} dx = \ln|R(x)| + c$, quindi:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx = \ln|ax^2+bx+c| + c_1;$$

- si calcola il secondo integrale con il metodo più visto;
- si sommano i risultati ottenuti.

* Calcoliamo $\int \frac{2x}{x^2+4x+5} dx$.

Il denominatore ha $\Delta = -4 < 0$. Trasformiamo il numeratore in modo da farvi figurare la derivata del denominatore, ossia $2x+4$:

$$\int \frac{2x}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{2x+4-4}{x^2+4x+5} dx = \int \left(\frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{4}{x^2+4x+5} \right) dx =$$

$$= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx - 4 \int \frac{1}{x^2+4x+5} dx =$$

$$= \ln|x^2+4x+5| - 4 \int \frac{1}{(x+2)^2+1} dx + c =$$

$x^2+4x+5 \rightarrow x$

$$= \ln(x^2+4x+5) - 4 \arctan(x+2) + c$$

* Calcoliamo $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx$.

Calcoliamo il discriminante del denominatore: $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$.

Trasformiamo il numeratore in modo ~~da~~ da poter ottenere la derivata del denominatore:

$$D[x^2-4x+5] = 2x-4$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2-4+4}{x^2-4x+5} dx =$$

Scriviamo quindi l'integranda come somma di due frazioni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{4-2}{x^2-4x+5} \right) dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx + \int \frac{1}{x^2-4x+5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+5| + \int \frac{1}{x^2-4x+4-4+5} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+5) + \int \frac{1}{(x-2)^2+1} dx + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+5) + \arctan(x-2) + C \end{aligned}$$

\nearrow
 $x^2-4x+5 > 0, \forall x$

~ Il denominatore è di grado superiore al secondo ~

Quando il denominatore è di grado superiore al secondo, occorre, se è possibile, scomporlo in fattori e scrivere la frazione algebrica come somma di frazioni con denominatori di primo e secondo grado, riconducendosi così al calcolo di integrali dei tipi descritti in precedenza.

* $\frac{4x}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$

* $\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$

* $\frac{6x-1}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$

* $\frac{x-3}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

* Calcoliamo $\int \frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2} dx$

Scomponiamo il denominatore applicando il teorema di Ruffini. Poiché $P(1)=0$, il polinomio è divisibile per $(x-1)$. Esghiamo la divisione con la regola di Ruffini:

1	1	0	-2
1	1	2	2
1	2	2	0

$\rightarrow P(x) = (x-1)(x^2+2x+2)$.

Il trinomio x^2+2x+2 ha discriminante $\Delta = -4 < 0$ ed è perciò irriducibile.

Scriviamo la frazione algebrica iniziale come somma di due frazioni;

$$\begin{aligned}\frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \\ &= \frac{Ax^2+2Ax+2A+Bx^2+Cx-Bx-C}{x^3+x^2-2} = \frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+2A-C}{x^3+x^2-2}\end{aligned}$$

Affinché l'uguaglianza

$$\frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2} = \frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+2A-C}{x^3+x^2-2}$$

sia un'identità, dobbiamo porre:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B+C=5 \\ 2A-C=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=3 \end{cases}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+5x-1}{x^3+x^2-2} dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2+2x+2} \right) dx = \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \\ &= \ln|x-1| + 3 \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \ln|x-1| + 3 \arctan(x+1) + c\end{aligned}$$