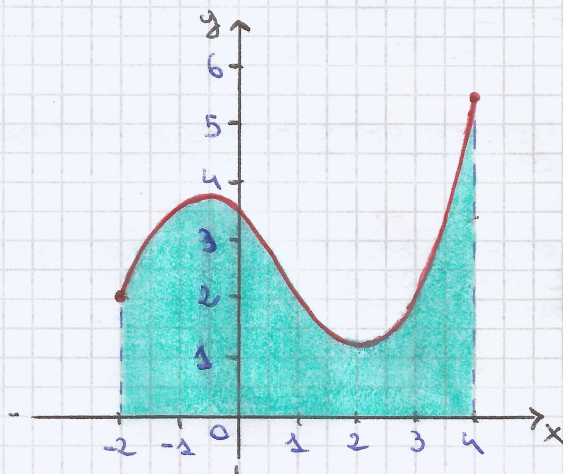


INTEGRALE di RIEMANN e FUNZIONI INTEGRABILI

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (una funzione definita su un intervallo chiuso $[a, b]$ con valori in \mathbb{R}) una funzione continua, come quella di seguito.



Quanto vale l'area della superficie compresa tra l'asse x e il grafico della funzione?

Scegliamo una partizione σ (sigma) di $[a, b]$, cioè $n+1$ punti qualsiasi dell'intervallo. Questi punti possono essere indicati come

$$x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n,$$

in modo che x_0 coincida con l'estremo a dell'intervallo e x_n con l'estremo b .

$$x_0 = a \quad x_n = b.$$

È importante osservare che questa partizione può essere qualsiasi.

Cerchiamo ora di approssimare l'area. Consideriamo, quindi, i generici intervalli delimitati dai punti x_i e x_{i-1} .



Su questi intervalli possiamo andare a costruire dei rettangoli, andando a scegliere come altezza del rettangolo il valore minimo della funzione sull'intervallo che stiamo considerando. Facendo questo su tutti i piccoli intervalli in cui abbiamo suddiviso $[a, b]$, otteniamo i vari rettangoli, la cui somma ci dà un'approssimazione per difetto dell'area che stiamo cercando. Osserviamo che ogni rettangolo ha come area il minimo della funzione (andato a calcolare sull'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$), nonché l'altezza del rettangolo, moltiplicato per $(x_i - x_{i-1})$, ossia la base del rettangolo.

$$A = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) (x_i - x_{i-1})$$

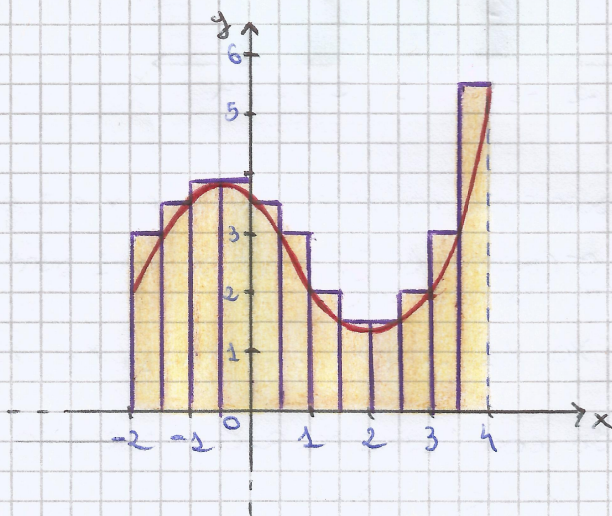
Andando a sommare tutte le aree, ritroviamo quelle che sono dette

Somme inferiori di Riemann

$$S_{\sigma} = \sum_{i=1}^n \min_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) (x_i - x_{i-1})$$

Osserviamo che il minimo della funzione esiste su ciascun intervallo perché la funzione è continua e quindi è garantito dal teorema di Weierstrass.

In maniera del tutto analoga possiamo andare a fare un'approssimazione per eccesso dell'area che vogliamo ritrovare, andando a scegliere come altezza dei rettangoli il massimo della funzione che ritroviamo su ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i]$



In questo modo andiamo a definire le cosiddette

Somme superiori di Riemann

$$S_{\sigma} = \sum_{i=1}^n \max_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) (x_i - x_{i-1})$$

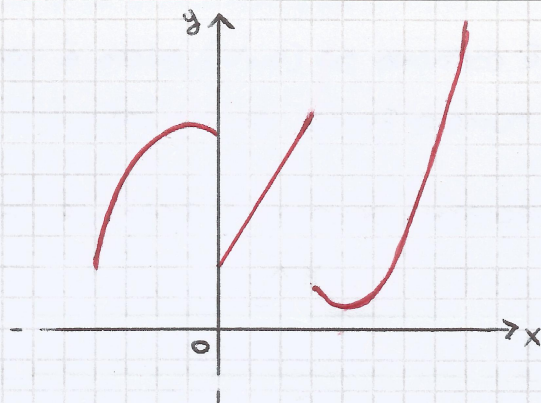
L'idea è che ora vogliamo determinare il corretto valore dell'area, dato che sia le somme superiori che le somme inferiori restituiscono un evidente errore nel calcolo dell'area. Pertanto, l'area che stiamo cercando corrisponde alla più grande approssimazione per difetto e deve coincidere con la più piccola approssimazione per eccesso. In maniera più precisa, possiamo dire che la funzione è integrabile se l'estremo superiore delle somme inferiori (l'estremo superiore calcolato su tutte le possibili partizioni dell'intervallo $[a, b]$) è uguale all'estremo inferiore delle somme superiori.

$$\sup_{\sigma} S_{\sigma} = \inf_{\sigma} S_{\sigma} = I \in \mathbb{R}$$

e si dice che quel valore I è proprio l'integrale di f da a a b

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

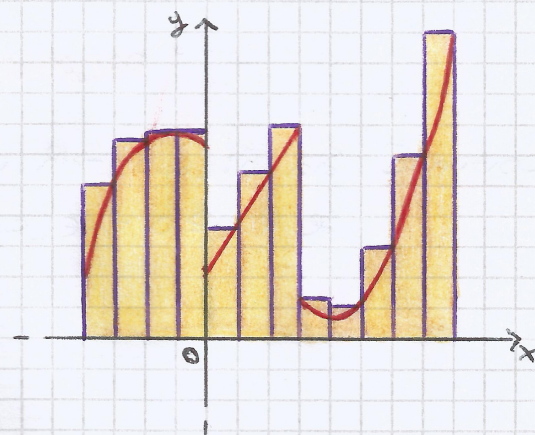
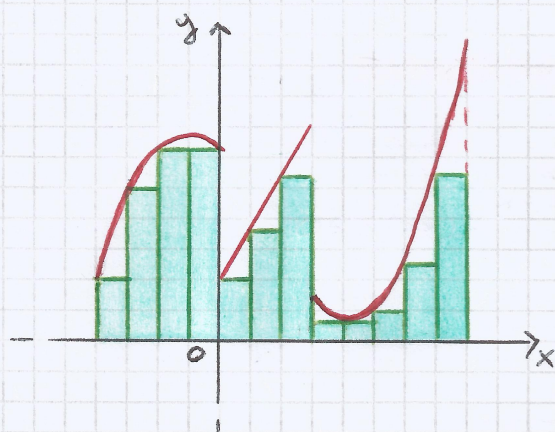
Quanto appena detto per le funzioni continue, si può generalizzare a una qualsiasi funzione limitata, sempre definita sull'intervallo chiuso $[a, b]$



Come si può osservare la funzione può avere punti di discontinuità.

Come prima, andiamo a scegliere una qualsiasi partizione σ dell'intervallo $[a, b]$ e andiamo a costruire le somme inferiori di Riemann, in cui, però, dobbiamo fare attenzione a utilizzare l'estremo inferiore piuttosto che il minimo della funzione, perché non essendo la funzione continua, non abbiamo la certezza dell'esistenza del massimo e del minimo grazie al teorema di Weierstrass.

In maniera identica andiamo a definire le somme superiori di Riemann, utilizzando questa volta l'estremo superiore.



La funzione è integrabile se l'estremo superiore delle somme inferiori è uguale all'estremo inferiore delle somme superiori.

$$\sup_{\sigma} S_{\sigma} = \inf_{\sigma} S_{\sigma} = I \in \mathbb{R}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

INTEGRALE DI f DA a A b

Per calcolare l'integrale bisogna utilizzare il teorema Fondamentale del calcolo integrale.

Teorema Fondamentale del calcolo integrale

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Sia $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva, cioè una funzione tale che $F'(x) = f(x)$

allora

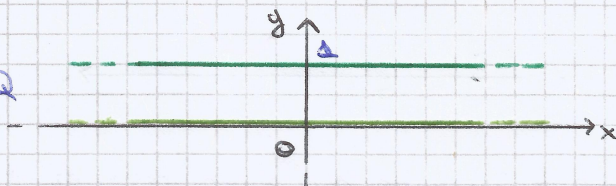
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Se una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$, allora è integrabile su $[a, b]$.

Se una funzione limitata ha un numero finito di discontinuità, allora è integrabile secondo Riemann.

Un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann è la Funzione di Dirichlet.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



La funzione non è integrabile secondo Riemann su alcun intervallo $[a, b]$, $b > a$. Nonostante sia limitata, è discontinua in tutti i suoi punti.

Per qualsiasi partizione si vale

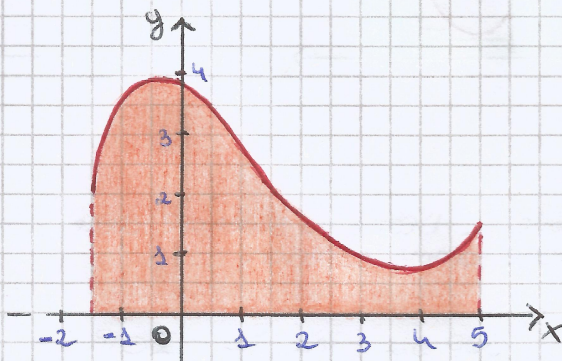
$$\text{SOMME INFERIORI } S_f = 0$$

$$\text{SOMME SUPERIORI } S_f = b - a$$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

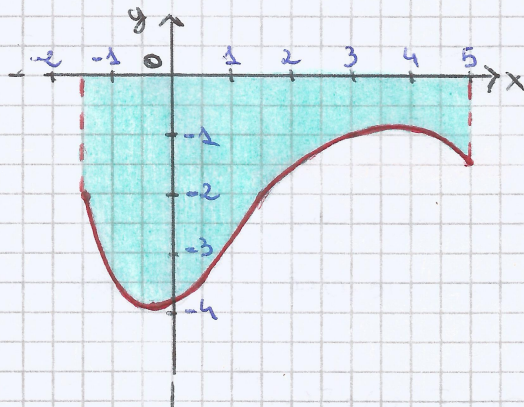
Positività Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

$$\text{Se } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \text{ allora } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$



Guardando anche il grafico, questa proprietà ci dà un'importante conseguenza. Infatti,

$$\text{Se } f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b] \text{ allora } \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

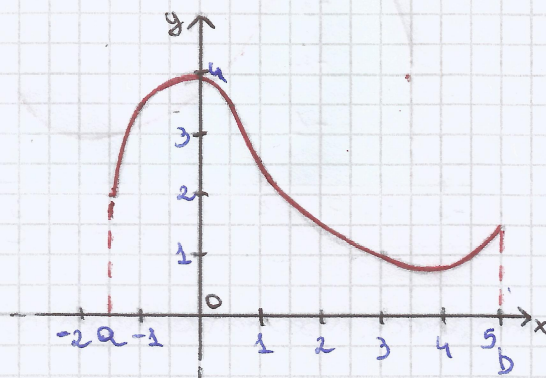


Stiamo, quindi, ritrovando un integrale negativo. Geometricamente stiamo dando un valore negativo all'area. Questo è dovuto al fatto che nel momento in cui andiamo a definire le somme superiori e le somme inferiori di Riemann, stiamo trovando dei valori negativi di f .

Segno Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile

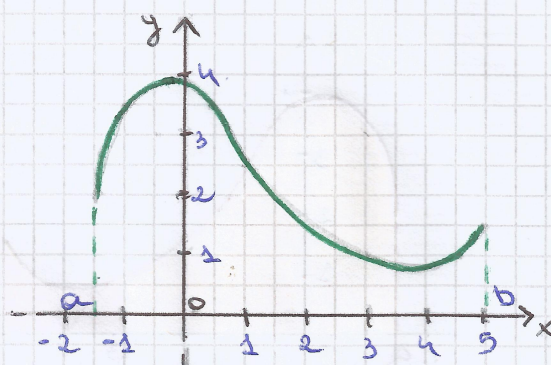
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Perché quando indichiamo $\int_a^b f(x) dx$ intendiamo di orientare il segmento ab da a a b.



Allora quest'integrale sarà esattamente l'opposto dell'integrale in cui orientiamo il segmento da b verso a, e quindi

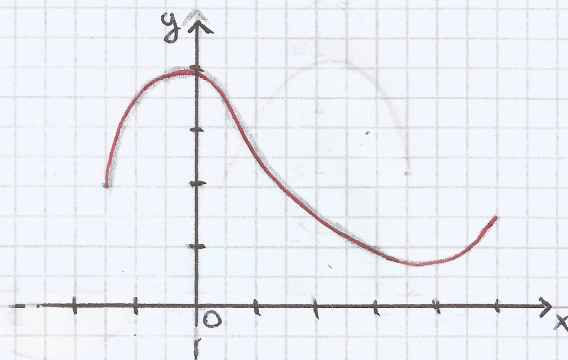
$$- \int_b^a f(x) dx$$



Rispetto al grafico che vediamo, in questo caso, troviamo un risultato negativo

Additività Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile, $c \in [a, b]$ (un punto c interno all'intervallo)

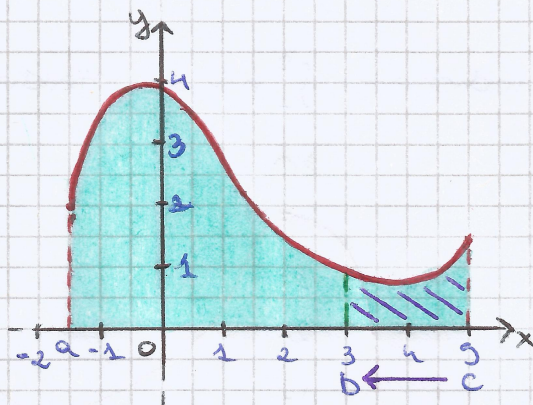
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Questa proprietà è vera anche quando il punto c è esterno all'intervallo $[a, b]$.

Sia $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile, $b \in [a, c]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

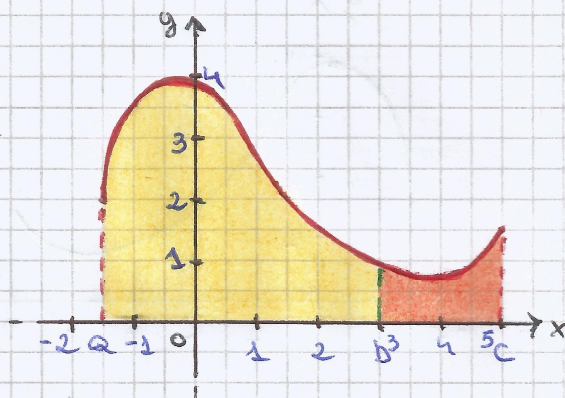


Se consideriamo, invece, il segmento orientato da b verso c bisogna indicare

$$\int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

Spostando a primo membro $\int_a^b f(x) dx$ otteniamo

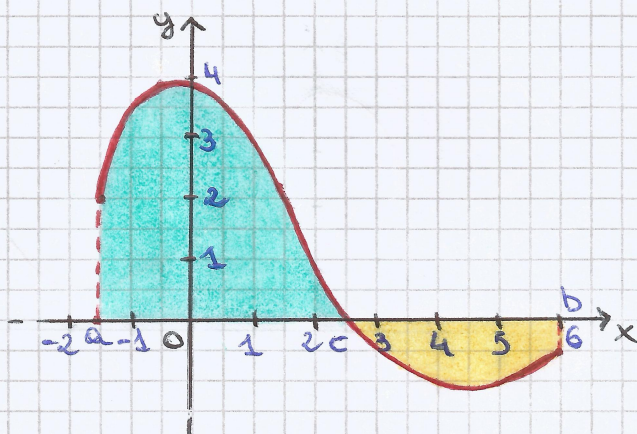
$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$



Sempre ragionando a proposito dell'additività, consideriamo il caso in cui il punto c sia uno zero della funzione

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile, $c \in [a, b]$, $f(c) = 0$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Ragioniamo sul segno di questi integrali.

Avremo sicuramente

$$\int_a^c f(x) dx > 0,$$

dato che nell'intervallo $[a, c]$ la funzione è positiva, mentre

$$\int_c^b f(x) dx < 0,$$

perché nel tratto $[c, b]$ la funzione è minore di zero.

L'integrale $\int_a^b f(x) dx$ va a calcolare esattamente la somma dei valori con il segno che abbiamo ritrovato, cioè calcola la differenza tra i valori assoluti delle due aree che stiamo effettivamente studiando.

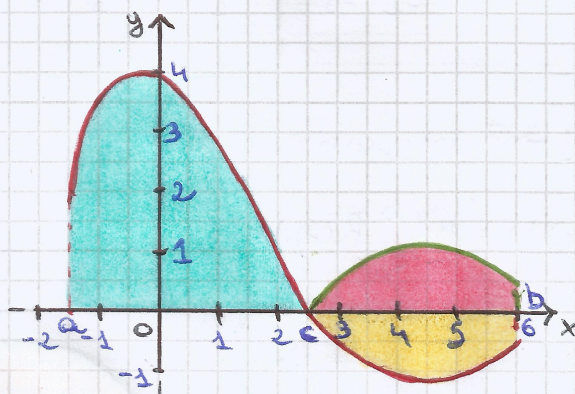
Ad esempio, se l'area A è uguale a $\int_a^c f(x) dx = 6$ e l'area B a $\int_c^b f(x) dx = -2$, l'integrale da a a b vale

$$\int_a^b f(x) dx = 6 - 2.$$

Consideriamo adesso il valore assoluto dell'integrale $|\int_a^b f(x) dx|$. Questo ci va a calcolare il valore assoluto della somma dei valori delle due aree pensate con il segno. Quindi avremo

$$|\int_a^b f(x) dx| = |6 - 2|$$

Considerando, invece, l'integrale del valore assoluto della funzione, dovremo cambiare il segno alla funzione nella zona in cui essa è negativa



Quindi l'integrale del valore assoluto calcola la somma dei valori assoluti delle due aree

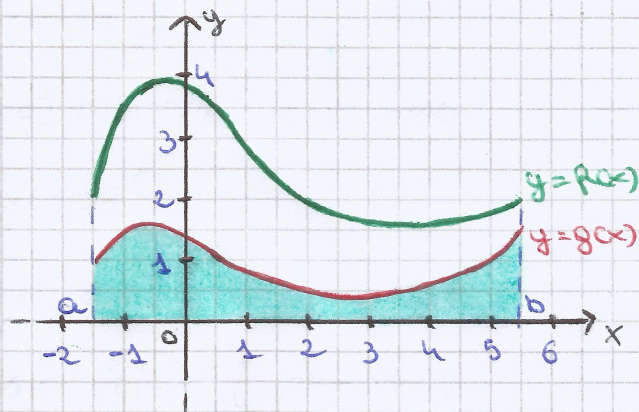
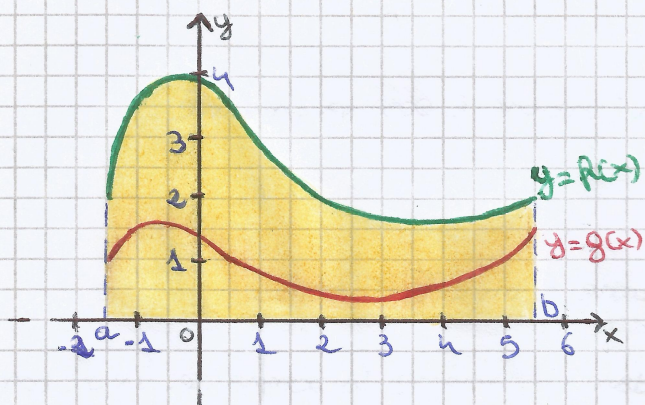
$$\int_a^b |f(x)| dx = |6| + |-2|$$

Limitatezza Possiamo osservare che se f è positiva nell'intervallo $[a, b]$ vale la seguente formula, la cosiddetta limitatezza

$$|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

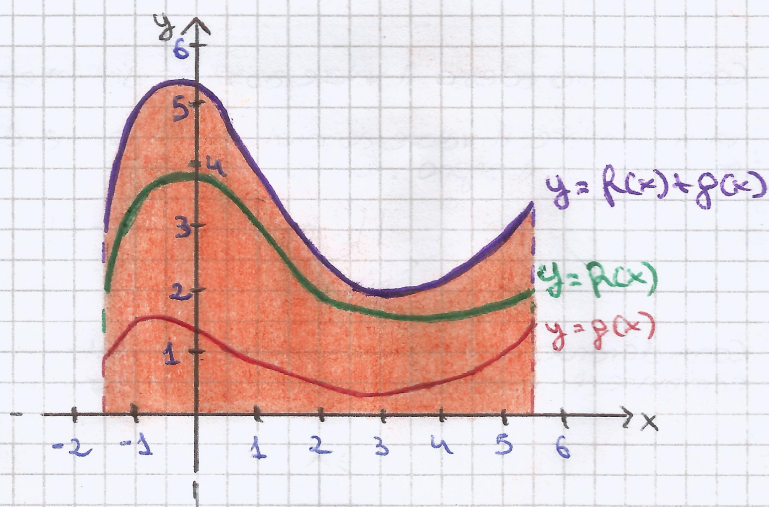
Isotonia Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili.

Se $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$



Linearità Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$



Linearità Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile, $k \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

