INTEGRALE DEFINITO (Per liceo e Analisi 1)

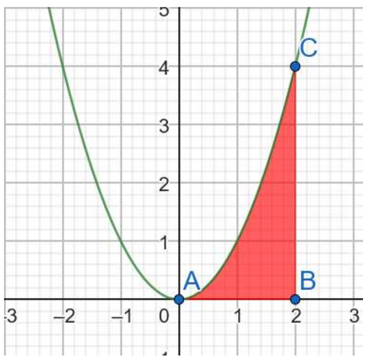
1 Introduzione

In quessti appunti parleremo brevemente dell'integrale definito toccando i seguenti quesiti:
-Che cos'è?
-Come ci si arriva?
-Formalizzazione

1.1 Che cos'è?

L'integrale definito serve a calcolare l'area sottesa da una curva. In altre parole, Data una funzione, l'integrale definito, relativo a un certo intervallo, calcolerà l'area della figura compresa tra il grafico della funzione e, ad esempio l'asse x.

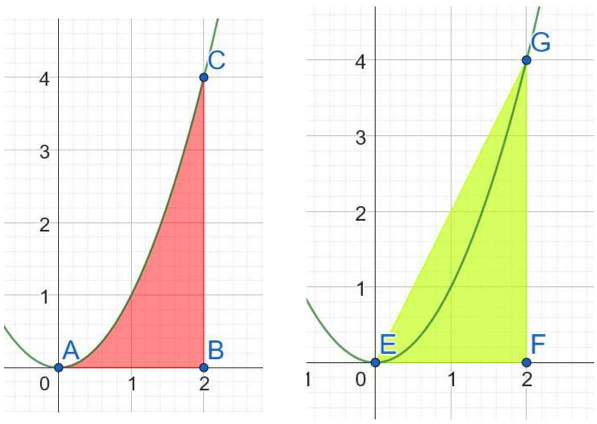
Per l'esempio qui riportato diremo:
"L'area della figura ABC sarà uguale all'integrale definito da 0 a 2 di x^2 in dx" In formule: $\int_0^2 x^2 dx$
Capiremo piu avanti il perchè di questa notazione



1.2 Come ci si arriva?

La domanda adesso sorge spontanea: come arrivo a calcolare quest'area?. L'idea di fondo è questa: se consideriamo l'esempio di prima notiamo, che la figura ABC, non è una figura nota, un triangolo, un rettangolo ecc., dunque non posso usare le classiche formule tipo base per altezza diviso 2... o forse si(?). Proviamo: Se io prendo il lato AC e lo "raddrizzo" ottengo essenzialmente un triangolo, lo chiameremò EFG. Quello che notiamo è che il triangolo EFG assomiglia molto alla figura ABC. E dunque è intuitivo pensare che anche l'area di EFG sarà simile a quella di ABC. Ed infatti:

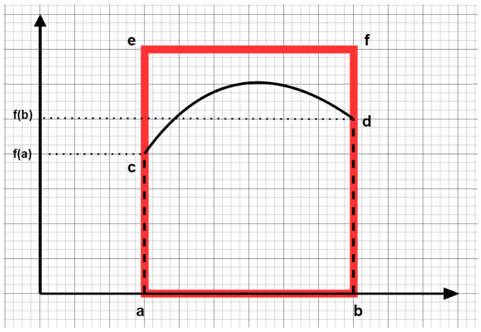
Facendo il calcolo effettivo, risulta che l'area di ABC è 2.7, cioè 8/3, mentre l'area di EFG è 4. Abbiamo dunque ottenuto una figura la cui area approssima per eccesso l'area che stavamo cercando. E l'idea che andremo a sviluppare è proprio questa: calcolare l'area che cerchiamo sfruttando le aree che già conosciamo.



1.3 Formalizzazione

Ora andrò a fare un discorso un pò piu tecnico su quello che è l'integrale definito. Tengo a precisare che il discorso potrebbe essere un po diverso a seconda del libro che usate, ma il concetto di fondo è quello che ho spiegato prima.

Consideriamo questo nuovo esempio qui a destra. Possiamo subito fare lo stesso discorso che abbiamo fatto prima. Il termine tecnico per descrivere la figura abcd è "trapezoide", e l'area di questo può essere approssimata, ad esempio dall'area del rettongolo arancione abef.



1.3.1 Somma di Riemann

Quello che vogliamo fare è ottenere un'approssimazione migliore dell'area abcd. E dunque, come accennato prima, invece di usare un rettangolo, ne useremo tanti, tantissimi... Per prima cosa immaginiamo di dividere l'intervallo ab in n intervallini, in gergo si dice "fare una partizione", ogni intervallino avrà dunque ampiezza $h = \frac{a-b}{n}$. Quindi i punti della partizione, che chiameremo c_i, seguiranno quest'ordine: $a = c_0 < c_1 < ... < c_{n-1} < c_n = b$. Bene adesso, all'interno di ogni intervallino scegliamo un punto casuale, che chiamerò x_i. Quindi nel primo intervallino avrò il punto x_0 e cosi via fino a x_{n-1}. Ora consideriamo il rettangolo che ha per base $c_{i+1} - c_i$ e per altezza $f(x_i)$. Giusto per capire, per i che va da 1 a 6 avremo un insieme di rettangoli tipo quello nella figura di sotto. Ora, è chiaro che se calcolassi l'area di questi 6 rettangoli e le sommassi otterrei un'approssimazione migliore di quella del rettangolo abef. Formalizzando la somma delle aree, detta somma di Riemann (si legge Riman) avremo:

$$\sum_{i=0}^{n}(c_{i+1} - c_i)f(x_i) = \sum_{0}^{n} hf(x_i)$$

Ok si, ma non abbiamo ancora l'area del trapezoide, perchè questa somma si dice, in gergo, "discreta", ciòè io posso considerare che i va da 1 a 6, da 1 a 100, da 1 a un miliardo, ma posso andare avanti... all'infinito ed è quello che faremo:

$$\underline{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)h = \int_a^b f(x)dx}$$

Ed ecco che è apparso il nostro integrale. Quello che abbiamo fatto è stato far tendere n a infinito, cioè invece di considerare 6, 100, un miliardo di intervallini ne consideriamo infiniti. Ora è chiaro che piu intervallini consideriamo piu i rettangoli diventano sottili. Cioè, $c_{i+1} - c_i$ sarà sempre piu piccolo e in particolare $c_{i+1} = c_i = x_i$ per forza di cose, e lo stesso discorso vale per le i punti sul grafico. Il simbolo di integrale, tra l'altro, ricorda proprio una S di somma.

NOTA: come si può vedere dal disegno i punti x_i sono a scelta. Cioè il limite della somma di Riemann deve essere lo stesso, indifferentemente da come scelgo i punti negli intervalli