

SCHEMA CALCOLO COMBINATORIO E PROBABILITA'

CALCOLO COMBINATORIO:

-Ordine Importante: Cambiando l'ordine degli elementi il tutto cambia.

Es: (3;2;5) è diverso da (5;3;2)

-Ordine non Importante: Bisogna considerare il gruppo degli elementi e non loro stessi.

Es: Il gruppo (3;2;5) è uguale al gruppo (5;3;2)

Ordine non importante solo per le combinazioni.

-Elementi Distinti: Gli elementi sono distinti e non si ripetono.

-Elementi non Distinti: Gli elementi non sono distinti e quindi si ripetono.

-Legge delle Classi Complementari: $(N \ K) + (N \ N-K) = (N \ 0) + (N \ N) = 2^N$

-Formula di Ricorrenza: $(N \ K+1) = (N \ K) \times \frac{N-K}{K+1}$

1) Disposizioni Semplici — Ordine importante e elementi distinti

-Formula: $D_{n;k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

-Come riconoscerlo: N è sempre maggiore di k, gli elementi che ho non si possono ripetere e cambiando l'ordine degli elementi cambia il risultato.

-Es: Calcola quanti numeri da 4 cifre diverse si possono formare con le 9 cifre dell'insieme A(1,2,3,4,5,6,7,8,9).

N=9

Le cifre sono diverse, quindi non si ripetono.

K=4

$D_{9;4} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

2) Disposizioni con Ripetizioni — Ordine importante e elementi non distinti

-Formula: $D'_{n;k} = n^k$

-Come riconoscerlo: N è diverso da K, gli elementi si ripetono, cambiando l'ordine degli elementi il risultato cambia e solitamente sono esercizi sul lancio di una o più monete.

-Es: Lanciando una moneta 3 volte quanti casi possibili posso ottenere?

N=2 perchè la moneta ha due facce.

K=3

$D'_{2;3} = 2^3 = 8$

3) Permutazioni Semplici — Ordine importante e elementi distinti

-Formula: $P_n = n!$

-Come riconoscerlo: N è sempre uguale a k

-Es: Abbiamo 4 palline colorate, una bianca, una rossa, una blu e una gialla. in quanti modi posso metterle in fila?

$$N=4$$

$$P_4 = 24$$

$$K=4$$

4) Permutazioni Circolari – Caso particolare delle Permutazioni Semplici

-Formula: $P_n = (n-1)!$

-Come riconoscerlo: n è uguale a k. E il testo ti dice di disporle circolarmente.

-Es: 5 amici si siedono ad un tavolo rotondo; in quanti modi si possono disporre?

$$n=5$$

$$P_5 = (5-1)! = 4! = 24$$

5) Permutazioni con Ripetizioni – Ordine importante e elementi non distinti

-Formula: $P(h,l,r,...)n = n! / h! \times l! \times r! \dots$ h,l,r = sono gli elementi che si ripetono

-Come riconoscerlo: N è uguale a K. Gli elementi si ripetono e solitamente sono sempre anagrammi.

-Es: Quali sono tutti i possibili anagrammi, anche senza significato, della parola mamma?

$$N=5$$

$$H=m=3$$

$$P(3,2)_5 = 5! / 3! \times 2! = 10$$

$$L=a=2$$

6) Combinazioni Semplici – Ordine non importante e elementi distinti

-Formula: $C_{n;k} = (n \ k) = \text{coefficiente binomiale} = n! / k! \times (n-k)!$

-Come riconoscerlo: Dal gruppo di partenza si estraggono gruppi più piccoli da distribuire; senza considerare l'ordine degli elementi nel gruppo. e gli elementi non si ripetono perché sono distinti. N è sempre più grande di K.

-Es: Una casa automobilistica di F1 ha a disposizione 5 vetture da assegnare a 2 piloti. In quanti modi si possono distribuire?

$$N = \text{insieme di partenza} = 5$$

$$K = \text{gruppi da formare} = 2 \text{ piloti} = 2 \text{ gruppi}$$

$$C_{n;k} = (5 \ 2) = 5! / 2! \times (5-2)! = 10$$

7) Combinazioni con ripetizioni – Ordine non importante e elementi non distinti

-Formula: $C'_{n;k} = (n+k-1 \ k)$

-Come riconoscerlo: Bisogna distribuire gli elementi non distinguibili in gruppi. Gli elementi si ripetono. K è l'elemento non distinguibile.

-Es: In quanti modi possiamo distribuire 8 tavolette di cioccolato a 5 bambini, sapendo che possiamo assegnare a qualche bambino più di una tavoletta?

$$N=5$$

K=8 perché le tavolette di cioccolato sono l'elemento indistinguibile.

$$C'_{5;8} = (12 \ 8) = 12! / 8! \times 4! = 495$$

8) Binomio di newton

-Formula: $(A+B)^n = \binom{n}{0} A^n B^0 + \binom{n}{1} A^{n-1} B^1 + \dots + \binom{n}{n} A^0 B^n$.

-Es: $(A+B)^5 = \binom{5}{0} A^5 B^0 + \binom{5}{1} A^4 B^1 + \binom{5}{2} A^3 B^2 + \binom{5}{3} A^2 B^3 + \binom{5}{4} A^1 B^4 + \binom{5}{5} A^0 B^5$

CALCOLO DELLE PROBABILITA':

-Eventi Compatibili: Quando il verificarsi di un evento include il verificarsi di un altro evento.

Es: Estraendo una pallina da una scatola contenente 12 palline numerate da 1 a 12 consideriamo gli eventi. E_1 = "esce una pallina con un numero pari", E_2 = "esce una pallina con un numero minore di 5".

-Eventi incompatibili: Quando il verificarsi di un evento non include il verificarsi di un altro evento.

Es: Estraendo una pallina da una scatola contenente 12 palline numerate da 1 a 12 consideriamo gli eventi. E_1 = "esce una pallina con un numero maggiore di 8", E_2 = "esce una pallina con un numero minore di 5".

1) Concezione Classica della Probabilità

-Formula: $P(E) = \frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$

-Es: **Estraendo una carta da un mazzo da 52 carte, con quale probabilità la carta estratta è una figura rossa?**

52 = casi favorevoli

6 = casi possibili perché in un mazzo ci sono solo 6 figure rosse

$P(E) = \frac{6}{52} = \frac{2}{26} = 0,12$

2) Somma Logica di Eventi

-Come riconoscerla: Almeno uno degli eventi si verifica. $E_1 \cup E_2$.

-Formula Eventi Incompatibili: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

-Es: **Lancio un dado una volta; calcola la probabilità che esca un numero minore di 3 O maggiore o uguale a 5.**

E_1 = minore di 3 = $\frac{2}{6}$

E_2 = maggiore o uguale a 5 = $\frac{2}{6}$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

-Formula Eventi Compatibili: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

-Es: **Lancio un dado una volta; calcola la probabilità che esca un numero pari o un numero maggiore di 2.**

E_1 = pari = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

E_2 = maggiore di 2 = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$E_1 \cap E_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

3) Probabilità Condizionata

-Come riconoscerla: La probabilità che si verifichi un evento E2 sapendo che un evento E1 si è già verificato.

-Formula: $P(E2|E1) = P(E1 \cap E2) / P(E1)$

-Es: Da un mazzo da 52 carte esce una figura, calcola la probabilità che sia rossa.

$$P(E1 \cap E2) = \text{figure rosse} = 6 = 6/52$$

$$P(E1) = \text{esce una figura} = 12/52$$

$$P(E2|E1) = (6/52) / (12/52) = 6/12 = 1/2$$

4) Prodotto Logico

-Come riconoscerlo: Quando si devono verificare entrambi gli eventi. E1 e E2

-Formula Eventi Indipendenti(con reinserimento): $P(E1 \cap E2) = P(E1) \times P(E2)$

-Es: Pesca una carta 2 volte da un mazzo di 52 rimettendola dopo la prima estrazione. calcola la probabilità che esca una carta rossa e poi una di picche.

$$P(E1) = \text{pesco carta rossa} = 26/52 = 1/2$$

$$P(E2) = \text{pesco carta di picche} = 13/52$$

$$P(E1 \cap E2) = 1/2 \times 13/52 = 1/8$$

-Formula Eventi Dipendenti(senza reinserimento): $P(E1 \cap E2) = P(E1) \times P(E2|E1)$

-Es: Pesca una carta 2 volte da un mazzo di 52 senza rimetterla dentro. Calcola la probabilità che esca una carta rossa e poi una di fiori.

$$P(E1) = \text{Pesco una carta rossa} = 13/26$$

$$P(E2|E1) = \text{Pesco una carta di fiori dopo che è uscita già una carta rossa} = 13/51$$

$$P(E1 \cap E2) = 13/26 \times 13/51 = 13/102$$

5) Teorema di Bernoulli

-Come riconoscerlo: ho un evento ripetuto n volte con una probabilità p di verificarsi già data e una probabilità q di non verificarsi già data. Devo capire quanti k successi ho sugli eventi n svolti.

$$P(K;N) = \binom{N}{K} \times (P \text{ alla } K) \times (Q \text{ alla } N-K)$$

-Es: Una macchina produce pezzi che risultano difettosi con una probabilità del 3%. Prendiamo 8 pezzi e calcoliamo la probabilità che 3 siano difettosi.

$$N = \text{numero di eventi} = 8$$

$$k = \text{successi da ottenere} = \text{sono i 3 pezzi difettosi da ottenere} = 3$$

$$P = \text{Probabilità che l'evento si verifichi} = 3\% = 0,03$$

$$Q = \text{Probabilità che l'evento non si verifichi} = 97\% = 0,97$$

$$P(K;N) = \binom{8}{3} \times (0,03 \text{ alla } 3) \times (0,97 \text{ alla } 5) = 12,98 \times 10^{-2}\%$$

6) Teorema di Bayes

-Come riconoscerlo: dopo essersi verificato un evento E, devo calcolare la probabilità della causa di quell'evento Ei. Solitamente sono gli esercizi sui macchinari che producono pezzi buoni o difettosi.

-Formula: probabilità che il pezzo della macchina scelta sia difettoso/buono
fratto la somma delle probabilità che il pezzo sia difettoso di tutte i macchinari.

-Es: Un' industria utilizza tre macchinari. Il primo produce 500 pezzi, il secondo 1250 e il terzo 750. I pezzi difettosi prodotti dai tre macchinari sono rispettivamente il 5%, l'8% e il 6%. Avendo prelevato un pezzo difettoso, qual è la probabilità che provenga dal primo macchinario?

E1= evento accaduto= prelevato un pezzo difettoso

Ei= causa dell'evento= probabilità che venga dal primo macchinario

1=Probabilità che il pezzo della prima macchina sia difettoso

2=Probabilità che il pezzo sia difettoso in generale= somma delle probabilità di tutti i macchinari

1= $(500(\text{pezzi prima macchina})/2500(\text{pezzi totali}) \text{ tutto } \times 0.05(\text{probabilità che sia difettoso } 5\%) = 0,01$

2= rifare il procedimento 1 anche per gli altri macchinari e sommare i risultati ottenuti= $0.01(\text{primo macchinario})+0.04(\text{secondo M.})+0,018=0.068$

formula finale= $0.01/0.068= 5/34$