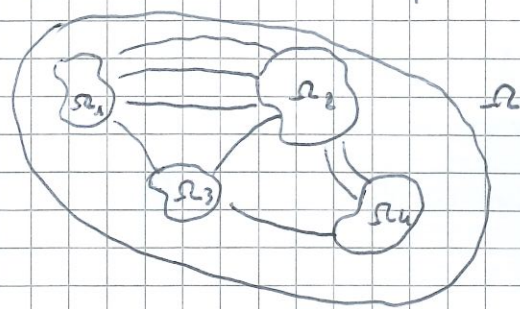


## INTRODUZIONE TEORIA DEI CIRCUITI

Questa teoria studia il comportamento dei circuiti della realtà attraverso un **modello matematico**: "modello circuitale a parametri concentrati" o semplicemente circuito.

Gli elementi del circuito  $\Omega_k$  sono interconnessi attraverso fili ideali, ovvero conduttori perfetti, e grazie a questi gli elementi  $\Omega_k$ ,  $k=1, \dots, 4$ , scambiano energia.

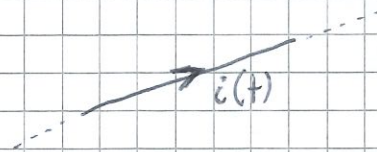
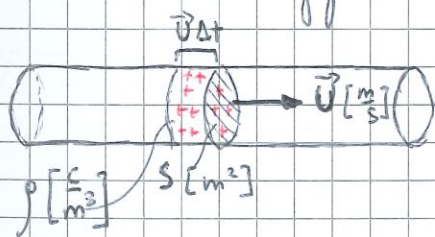


Lo scopo dell'elettrotecnica è caratterizzare questi scambi energetici fra gli elementi del circuito.

Le leggi che governano il modello circuitale sono un caso particolare e approssimato della Teoria dei campi elettromagnetici e in particolare sono un'estensione delle leggi dell'ELETTROSTATICA per trattare anche campi variabili nel tempo (**approssimazione quasi-statica**), approssimativamente valida per variazioni temporali sufficientemente lente.

## CORRENTE

Descriviamo la legge del moto delle cariche elettriche in fili ideali



Analizziamo il volume di carica che attraversa  $S$  in  $\Delta t$ :

$$\Delta q = \rho \cdot S \cdot \vec{v} \Delta t \quad [C] \text{ Coulomb}$$

$$\Rightarrow i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho S v(t) \quad : \quad \left[ \frac{C}{s} \right] = [A] \text{ Ampere}$$

la corrente è una quantità algebrica e può essere  $i(t) \geq 0$



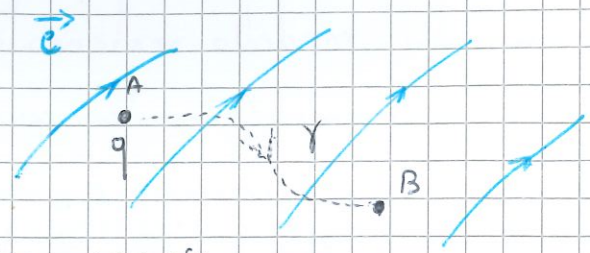
# TENSIONE

Caratterizziamo il campo elettrico dal punto di vista energetico:

la carica  $q$  si sposta da A a B

lungo il percorso  $\gamma$  e subisce una

forza di Coulomb  $\vec{F} = q\vec{E}$



mentre il lavoro che il campo elettrico compie

sulla carica  $q$  è:  $L_{AB} = \int_{\gamma: A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_{\gamma: A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ; definiamo quindi

la TENSIONE come il lavoro per singola unità di carica tale che

$$V_{AB} = \frac{L_{AB}}{q} = \int_{\gamma: A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad ; \quad \left[ \frac{J}{C} \right] = [V] \text{ Volt}$$

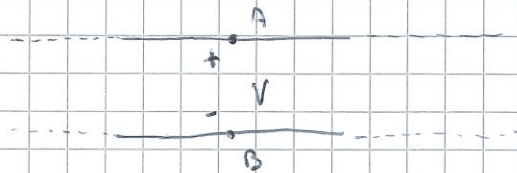
Si osserva che  $V_{AB}$  ha le proprietà di una differenza di potenziale cioè  $\exists W(P)$  ovvero energia potenziale per unità di carica, funzione di  $P$  tale che la tensione non dipende da  $\gamma$  ma solo da A e B:

$$V_{AB} = W(A) - W(B)$$

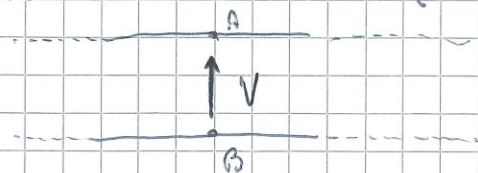
Come detto prima la nostra tensione variabile nel tempo  $V(t)$  viene letta con approssimazione quasi-statica:

- per definirla bastano due punti (A,B) sui fili del circuito
- non serve precisare alcun concetto di percorso perché irrilevante

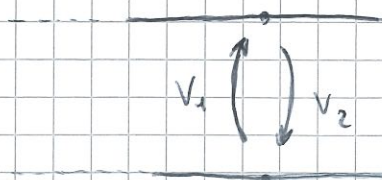
NOTAZIONE +/- (UK & USA)



NOTAZIONE FRECCIA (ITALIA)



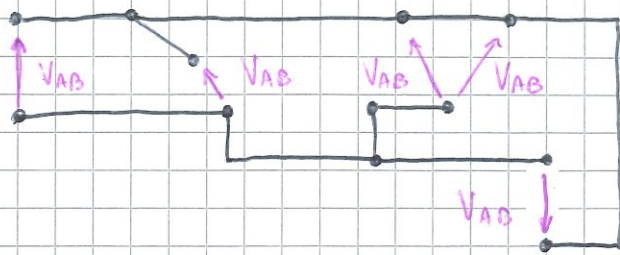
La tensione è una quantità algebrica  $V(t) \gtrless 0$  (verso & segno)



$$V_2 = -V_1$$





Osserviamo ora l'**equipotenzialità** dei collegamenti: i collegamenti elettrici ideali rappresentano fili conduttori ideali (conduttività infinite). Sono quindi da considerarsi equipotenziali.

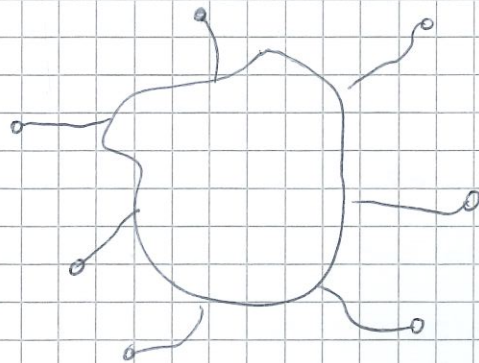


## MULTIPOLO

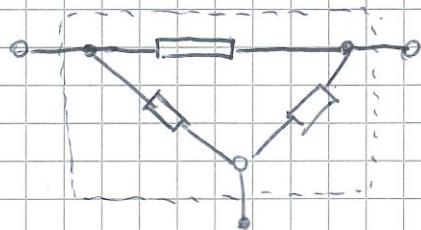
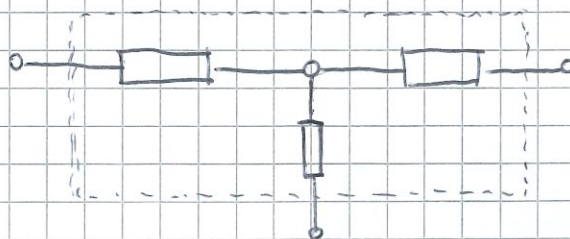
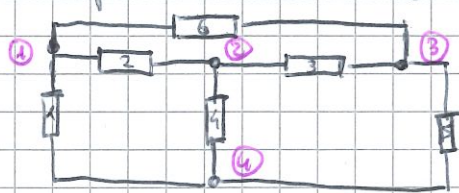
Esso è l'elemento circuitale che possiede  $N$  "poli" o "morsetti" terminali costituiti da conduttori ideali:

Casi particolari

- DUE MORSETTI  $\Rightarrow$  BIPOLLO 
- TRE MORSETTI  $\Rightarrow$  TRIPOLLO 



Ora mostriamo un esempio di circuito costituito da bipoli e sottolineiamo che i multipoli possono essere composti da bipoli interconnessi, come il tripolo composto.



Definiamo il **NODO** come punto di interconnessione di due o più poli [vedi nodi ①, ②, ③, ④ nel circuito sopra]





# CIRCUITI E LEGGI DELL'ELETTROTECNICA

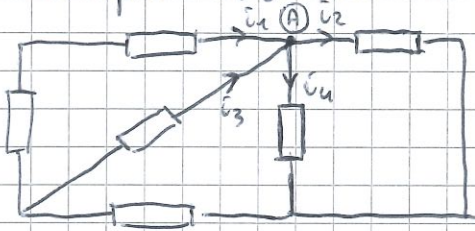
Analizziamo per prima cosa la legge di Kirchhoff delle correnti (KCL):

"La somma algebrica delle correnti entranti in (uscanti da) un nodo è uguale a zero in ogni istante di tempo"

$$\sum_{\text{entranti}} \bar{i}_k(t) = 0$$

$$\sum_{\text{uscanti}} \bar{i}_k(t) = 0$$

Ad esempio abbiamo il seguente circuito con due equazioni equivalenti



$$\text{KCL (A)}: \bar{i}_1 + \bar{i}_3 - \bar{i}_2 - \bar{i}_4 = 0 \quad \forall t \quad (\text{in})$$

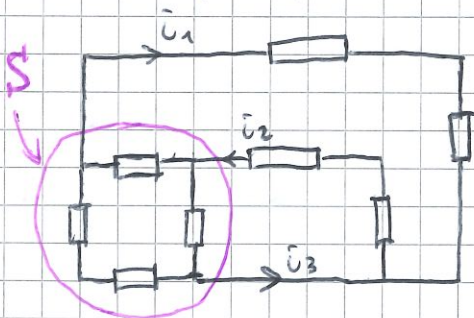
$$-\bar{i}_1 - \bar{i}_3 + \bar{i}_2 + \bar{i}_4 = 0 \quad \forall t \quad (\text{out})$$

Definiamo invece ora il **SUPERNODE**, ovvero una superficie chiusa che contiene elementi del circuito e taglia alcuni collegamenti.

Esprimiamo ora la formulazione generale della KCL:

"La somma algebrica delle correnti entranti in (uscanti da) un supernodo è uguale a zero in ogni istante di tempo"

Ad esempio, come prima



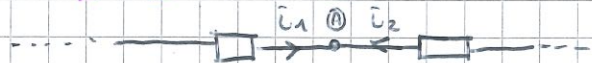
$$\text{KCL (S)}: -\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - \bar{i}_3 = 0 \quad \forall t \quad (\text{in})$$

$$\bar{i}_1 - \bar{i}_2 + \bar{i}_3 = 0 \quad \forall t \quad (\text{out})$$

Analizziamo la corrente in un bipolo e in un nodo elementari



$$\text{KCL (S)}: \bar{i}_1 + \bar{i}_2 = 0 \Rightarrow \bar{i}_1 = -\bar{i}_2$$



$$\text{KCL (A)}: \bar{i}_1 = -\bar{i}_2$$

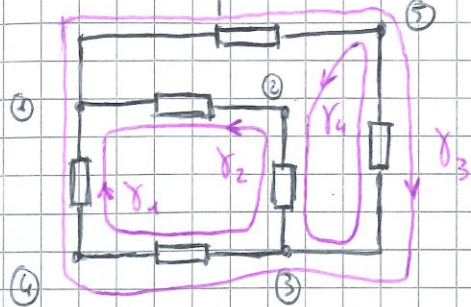


basta indicare una sola corrente



## PERCORSO CHIUSO ORIENTATO

È una sequenza chiusa di nodi, orientata come queste:  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  sono esempi di percorsi orientati chiusi (non gli unici) che si possono individuare sul circuito. Note che non è necessario che i nodi del percorso siano connessi da bipoli o multipoli (ad esempio:  $\gamma_4: 2-3-5-2$ ).

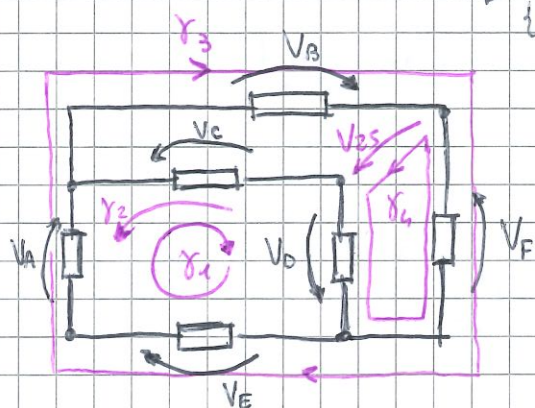


## LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI

"La somma algebrica delle tensioni lungo un qualsiasi percorso chiuso orientato è uguale a zero in ogni istante di tempo"

$$\Rightarrow \sum V_k(t) = 0$$

{ percorso chiuso orientato }



$$KVL (\gamma_1): V_A - V_C + V_D + V_E = 0 \quad V+$$

$$KVL (\gamma_3): V_B - V_F + V_E + V_A = 0 \quad V+$$

$$KVL (\gamma_2): -V_A + V_C - V_D - V_E = 0 \quad V+$$

$$KVL (\gamma_4): V_D + V_F + V_{25} = 0 \quad V+$$

$\gamma_1 - \gamma_2$   
sono  
opposte

A questo punto in base a quanto visto in precedenza, per un bipolo si hanno due variabili elettriche: tensione ( $V$ ) e corrente ( $i$ ). Scelti arbitrariamente i versi di riferimento osserviamo le associazioni:

"Convenzione **utilizzatore**"



la corrente entra nel morsetto "positivo" ed esce dal "negativo"

"Convenzione **generatore**"

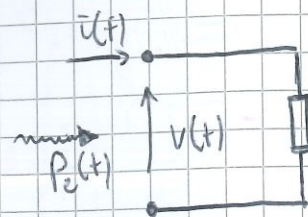


la corrente esce dal morsetto "positivo" ed entra nel morsetto "negativo"



## POTENZA ENTRANTE / USCENTE

Analizziamo per prima quella entrante ( $P_e$ ) anche detta **potenza assorbita**, con convenzione utilizzatori, e diciamo che



$$P_e(t) = v(t) \cdot i(t)$$

La dimostrazione intuitiva si rifà al lavoro compiuto dal campo elettrico su una carica  $\Delta q$  che transita dal morsetto positivo al negativo in  $\Delta t$ :

$$\Delta L = v \cdot \Delta q \Rightarrow P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta q}{\Delta t} = v \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = v \cdot i$$

Nel caso di convenzione generatori si avrà l'opposto, ovvero:

$$P_e(t) = -v(t) \cdot i(t)$$

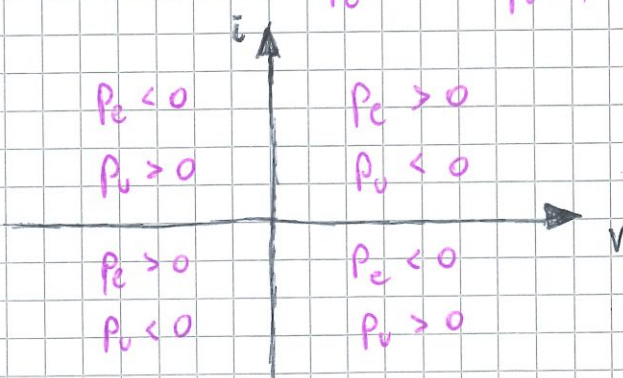
La corrente uscente, detta anche **potenza erogata** ( $P_u$ ) sarà l'opposto, ovvero:

$$P_u(t) = -v(t) \cdot i(t)$$

(utilizzatori)

mentre  $P_u(t) = v(t) \cdot i(t)$   
(generatori)

Ne deriva che la loro correlazione si rifà a  $P_e(t) = -P_u(t)$  e possiamo generalizzare, seguendo la convenzione utilizzatori, il seguente schema pratico  $\Rightarrow$



## ENERGIA ENTRANTE / USCENTE

Analizziamo invece ora la grandezza energia, ovvero potenza per tempo

$$1 \text{ kWh} = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$



Mostriamo ora l'energia entrante (per gli utilizzatori) e quella uscente (per i generatori) sapendo che sono positive dal loro riferimento

$$W_e(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p_e(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot i(t) dt$$

$$W_o(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p_o(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot i(t) dt$$

## TEOREMA DI TELLEGEN

Questo teorema esprime, nella teoria dei circuiti, la legge fisica fondamentale della conservazione dell'energia:

" Sia dato un circuito costituito da  $N$  bipoli dove

**IPOTESI)**  $v_k, i_k$  siano tensione e corrente del bipolo  $k$ -esimo; allora le  $v_k(t)$  soddisfanno la KVL mentre le  $i_k(t)$  soddisfanno la KCL  $\forall$  percorso/superficie chiusa "

**TESI)**  $\sum_{k=1}^N p_{e,k}(t) = 0 \qquad \sum_{k=1}^N p_{o,k}(t) = 0$

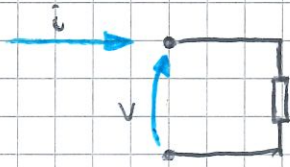
Osservazione: Il risultato non dipende dalla natura dei bipoli!! È sempre valido purché le  $v_k$  e  $i_k$  soddisfino le KVL - KCL.

Il Teorema poi si estende anche a circuiti composti di multipoli, ma in questo caso limitiamo l'attenzione ai bipoli per semplicità



## COMPONENTISTICA E CONFIGURAZIONE

Traiamo ora la **relazione costitutiva (R.C.)** ovvero un qualcosa che esprime in termini matematici tutto ciò che è dato conoscere riguardo alla natura, in questo caso, del bipolo. Si tratta della relazione che intercorre tra tensione e corrente.



**ATTENZIONE:** Quando si formula la R.C. si deve specificare quale è il verso di riferimento associato di  $v$  e  $i$  (es. convenzione utilizzatori)

Se le seguenti funzioni  $f, g, h$  sono LINEARI  $\Rightarrow$  BIPOLO LINEARE

NON SONO LINEARI  $\Rightarrow$  BIPOLO NON LINEARE

FORMA GENERALE

$$f(v, i) = 0$$

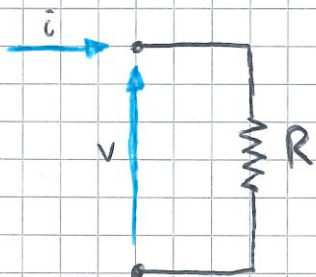
FORME PARTICOLARI  
(se esistono)

$i = g(v) \rightarrow$  bipolo comandabile in tensione

$v = h(i) \rightarrow$  bipolo comandabile in corrente

## RESISTORE LINEARE

Definiamo innanzitutto la **resistenza (R)** e la **conduttanza (G)** ovvero l'uno l'opposto dell'altro:  $[R] = \text{"Ohm"}$ ,  $[R^{-1}] = [S] = \text{"Siemens"}$ .  
Come possiamo immaginare la relazione che li lega è  $G = 1/R$  e sia  $R, G > 0$  sono costanti.

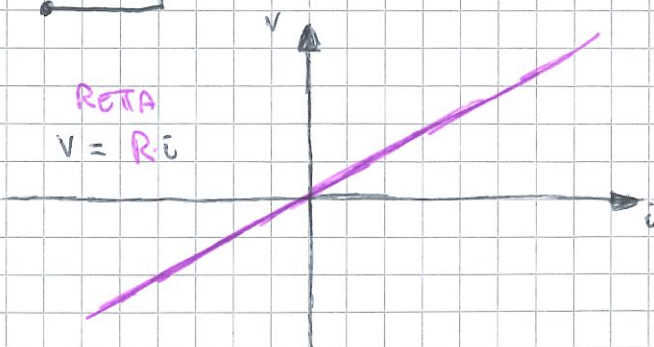


La R.C. con convenzione degli utilizzatori

$$v = R \cdot i \rightarrow \text{comando in corrente}$$

$$i = G \cdot v \rightarrow \text{comando in tensione}$$

RETTA  
 $v = Ri$

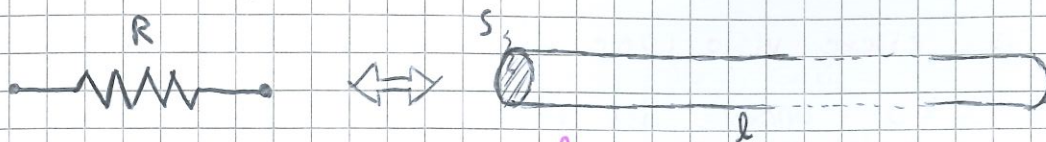


$v \cdot i > 0 \Rightarrow$  Assorbe potenza  
di fatto il resistore lineare ha  
una potenza entrante  $\geq 0$

$$P_e = v \cdot i = R \cdot i^2 = \frac{v^2}{R}$$



Facciamo un esempio di dispositivo modellabile con un resistore

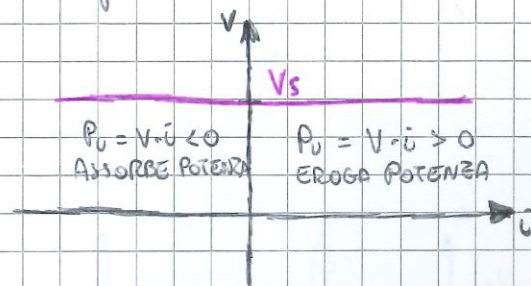
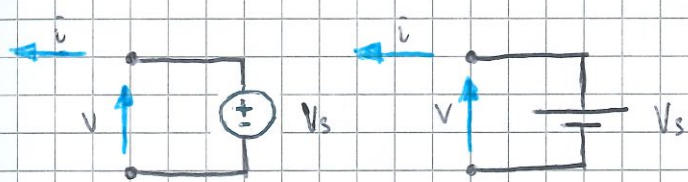


$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S}$$

dove " $\sigma$ " si chiama conducibilità elettrica e si misura in  $[\Omega \cdot m]^{-1}$ .  
Questa rappresentazione indica una resistenza fisica che dissipa la potenza assorbita per "Effetto Joule".

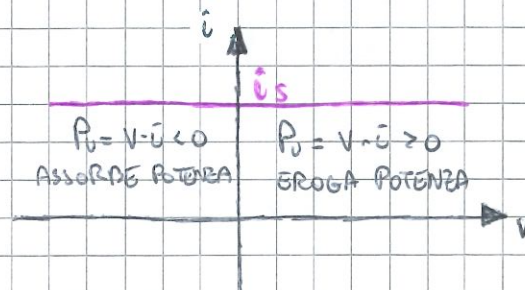
## GENERATORI IDEALI

Trattiamo per primo il generatore ideale di **tensione** il quale impone per l'appunto una tensione nota ai morsetti, qualunque sia il valore di corrente. Può sia assorbire che erogare potenza.



R.C.:  $V = V_s(t) \rightarrow$  comando in corrente

Trattiamo ora invece il generatore ideale di **corrente** il quale impone una corrente nota ai morsetti qualunque sia il valore di tensione. Può sia erogare che assorbire potenza.



R.C.:  $i = i_s(t) \rightarrow$  comando in tensione



## CORTOCIRCUITO E CIRCUITO APERTO

Il **cortocircuito** può essere visto come un caso limite del generatore di tensione, per  $V_s = 0$ , oppure del resistore,  $R = 0$



R.C.:  $V = 0 \rightarrow$  comando in corrente

Il **circuito aperto** d'altro canto può essere visto come un caso limite del generatore di corrente, per  $i_s = 0$ , oppure del resistore,  $G = 0$



R.C.:  $i = 0 \rightarrow$  comando in tensione

In entrambi i casi si ha che " $p_e = 0 = p_u$ ".

Inoltre possiamo affermare che due bipoli sono equivalenti ai morsetti esterni se hanno la stessa R.C. Tale equivalenza implica di poterli scambiare senza modificare il funzionamento del circuito. Tuttavia non implica nulla sulla struttura interna dei bipoli stessi.



$$V_1 = f(i_1)$$

$$V_2 = f(i_2)$$

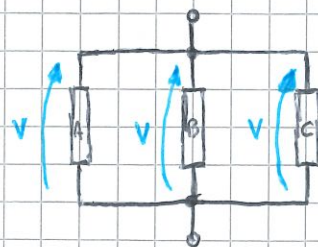
## BIPOLI CONNESSI IN SERIE E IN PARALLELO

La differenziazione tra le due tipologie deriva dai morsetti:

- ① un morsetto di ognuno è connesso ad un nodo comune
- ② **serie** nessun altro morsetto è connesso a quel nodo comune (ecc. circuito aperto)
- ② **parallelo** l'altro morsetto di ognuno è connesso al nodo comune



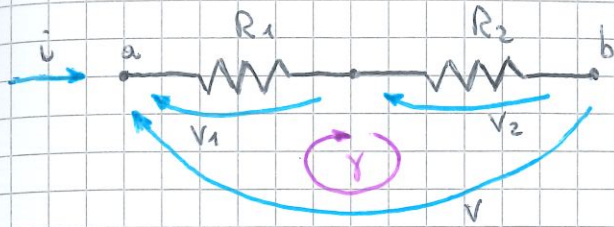
Stessa CORRENTE



Stessa TENSIONE



# RESISTORI IN SERIE / PARALLELO E RESISTENZA EQUIVALENTE

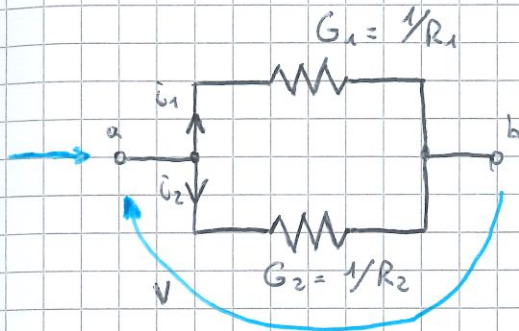


$$V_1 = R_1 \bar{i}_1 ; V_2 = R_2 \bar{i}_2 ; \bar{i} = \bar{i}_1 = \bar{i}_2$$

$$\text{KVL } \gamma: V - V_1 - V_2 = 0 \Rightarrow V = (R_1 + R_2) \bar{i}$$

in generale per  $N$  resistori si avrà

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^N R_k$$



$$\bar{i}_1 = G_1 V ; \bar{i}_2 = G_2 V$$

$$\text{KCL: } \bar{i} - \bar{i}_1 - \bar{i}_2 = 0 \Rightarrow \bar{i} = (G_1 + G_2) V$$

in generale per  $N$  resistori si avrà

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^N G_k$$

Sempre per il caso del parallelo

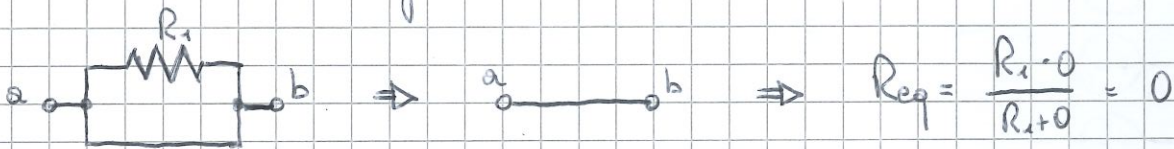
possiamo scrivere:

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}}$$

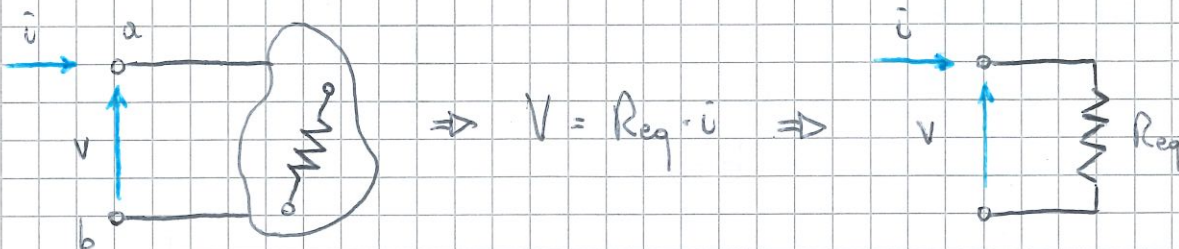
Nel caso di due resistenze

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

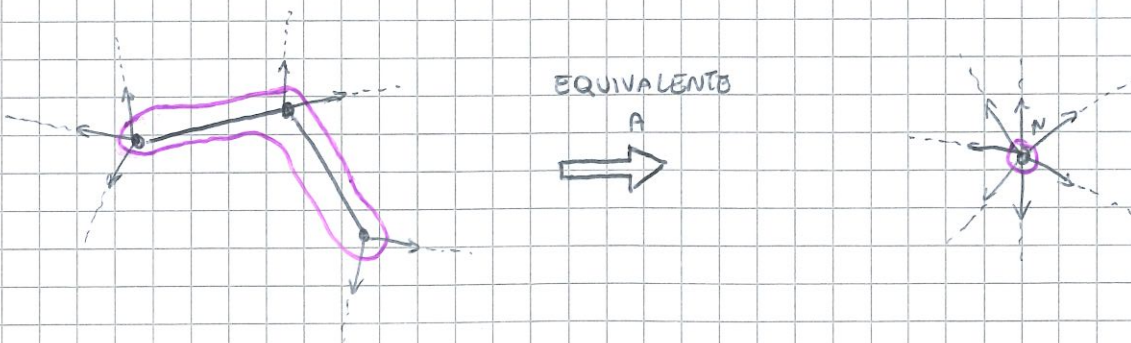
Osserviamo ora il seguente caso limite:



## BIPOLI COSTITUITI DA AGGREGAZIONI DI RESISTORI



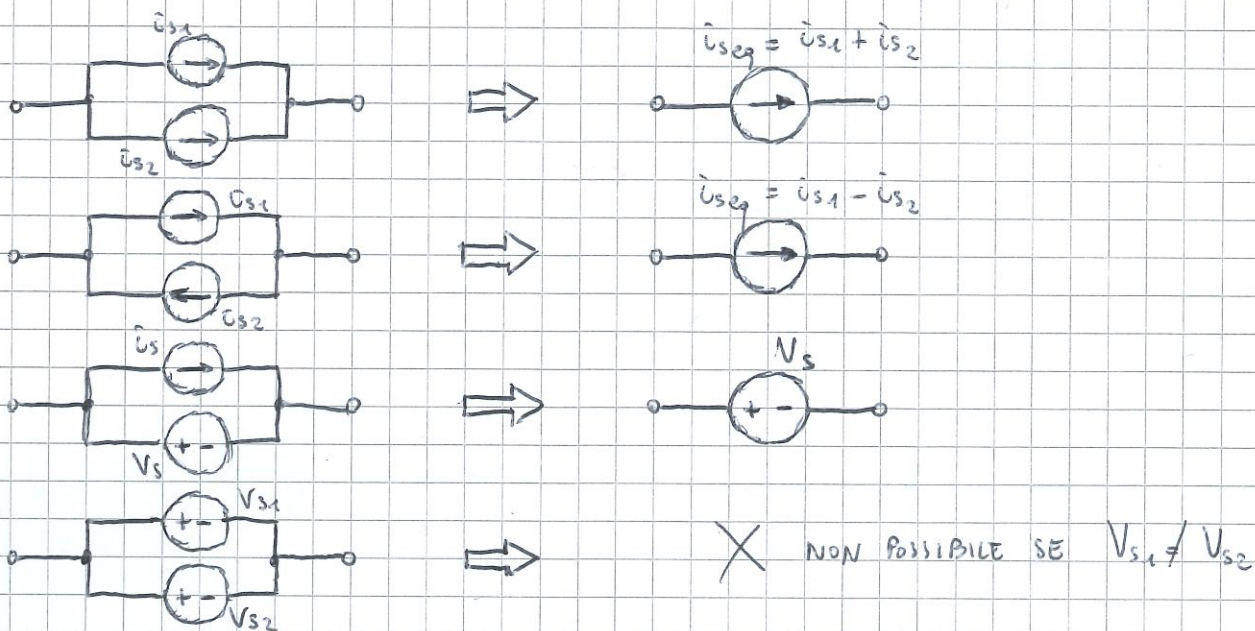
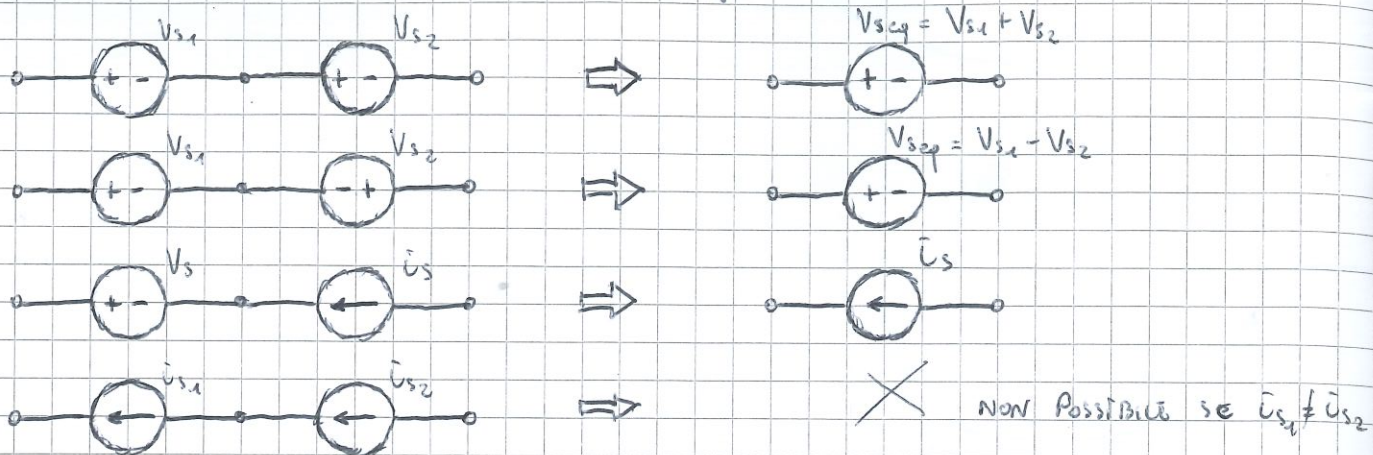
## NODI CONNESSI DA COLLEGAMENTI IDEALI (BIPOLO CORTOCIRCUITO)





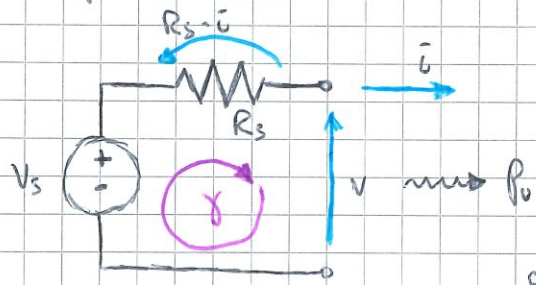
## SORGENTI E GENERATORI

Analizziamo le varie combinazioni di serie e paralleli dei generatori di corrente e delle sorgenti di tensione



## GENERATORI NON IDEALI

Trattiamo ora i modelli per i generatori reali di tensione e corrente.  
Per prima cosa osserviamo la **tensione**



$$\text{KVL } \gamma: V_s - R_s i - v = 0$$

$$\Rightarrow \text{R.C. : } V = V_s - R_s i$$

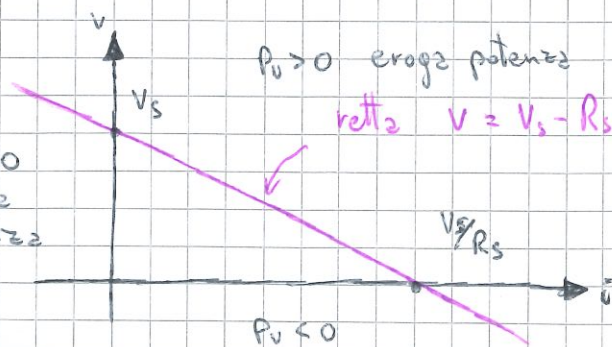
CIRCUITO APERTO

$P_v > 0$  ergo potenze

retta  $V = V_s - R_s i$

$P_v < 0$   
absorbierte  
potenz

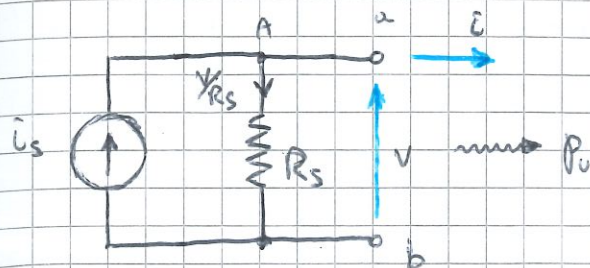
(CORRENTE DI CORTO CIRCUITO)





Osserviamo poi per la corrente

②

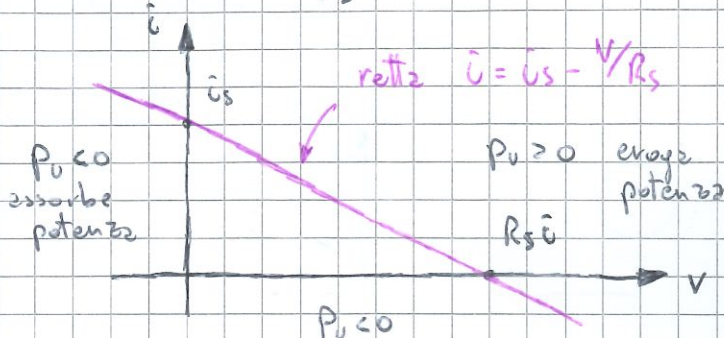


$$\text{KCL A: } \bar{i}_s - \frac{V}{R_s} - \bar{i} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{i} = \bar{i}_s - \frac{V}{R_s} \quad \text{R.C.}$$

per  $V=0 \rightarrow \bar{i} = \bar{i}_s$  (CORRENTE DI CORTO CIRCUITO)

per  $\bar{i}=0 \rightarrow V = R_s \bar{i}$  (TENSIONE A VUOTO)



Dalle seguenti deduciamo poi che le sorgenti di tensione e di corrente non ideali possono essere trasformate l'una nell'altra ESTERNAMENTE AL BIPOLO se ① e ② sono identiche se:

①  $V = V_s - R_s \bar{i}$

$R_{s\bar{i}} = R_{sv} = R_s$

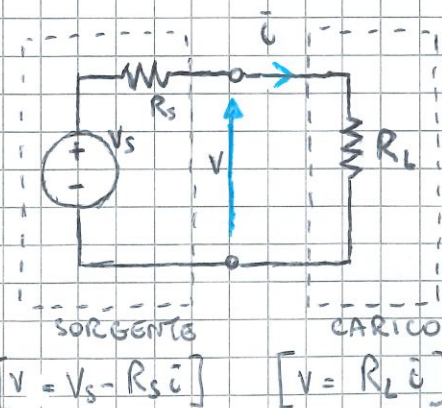
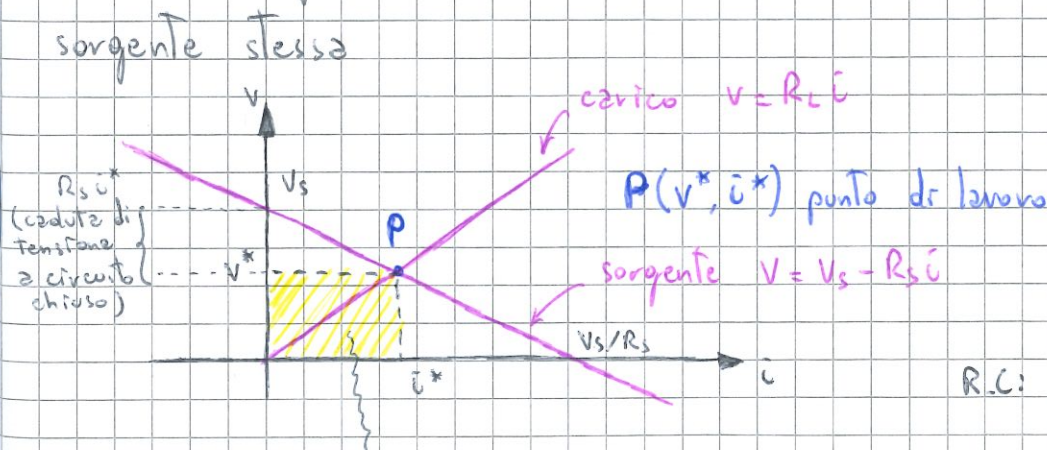
②  $V = R_{s\bar{i}} \bar{i}_s - R_{s\bar{i}} \bar{i}$

$V_s = R_{s\bar{i}} \bar{i}_s$

## CONSIDERAZIONI ENERGETICHE

La sorgente ideale non potrebbe esistere poiché andrebbe ad erogare una potenza illimitata, pertanto quale è la MASSIMA POTENZA EROGABILE di una sorgente non ideale???

Analizziamo il punto di lavoro ovvero il risultato dell'interazione tra la sorgente e il carico, influenzato dalle caratteristiche della sorgente stessa



L'area trovata è  $P_L = V \cdot \bar{i}$  ed è la potenza uscente della sorgente



## TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA

Torniamo alla richiesta di prima: data una sorgente ( $V_s, R_s$ ) quale condizione deve soddisfare  $R_L$  affinché la potenza trasferita dalla sorgente al carico sia massima?



con  $i = \frac{V_s}{R_s + R_L}$  da cui derivano i successivi calcoli di derivazione

$$P_L = R_L i^2 = R_L \frac{V_s^2}{(R_s + R_L)^2} \text{ è massimo quando } \frac{dP_L}{dR_L} = 0 :$$

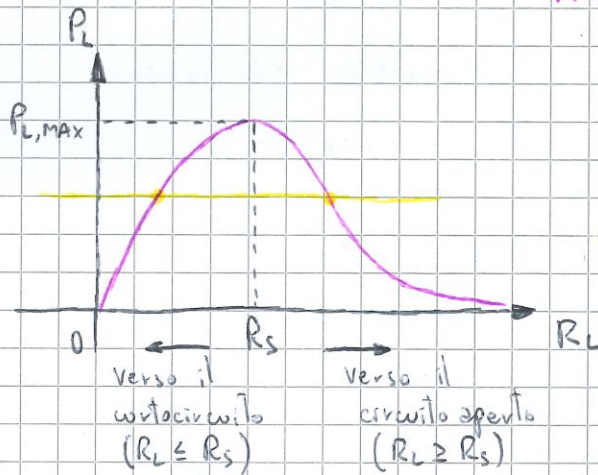
$$\Rightarrow V_s^2 \frac{(R_s + R_L)^2 - 2R_L(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4} = 0 \Rightarrow \frac{V_s^2}{(R_s + R_L)^4} (R_s^2 + R_L^2 - 2R_L^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V_s^2}{(R_s + R_L)^3} (R_s - R_L) = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_s}$$

Da ciò otteniamo la seguente considerazione

$$P_{L, \max} = \frac{V_s^2}{4R_s}$$

detta anche potenza disponibile



La funzione rappresentata è

$$P_L = V_s^2 \frac{R_L}{(R_s + R_L)^2}$$

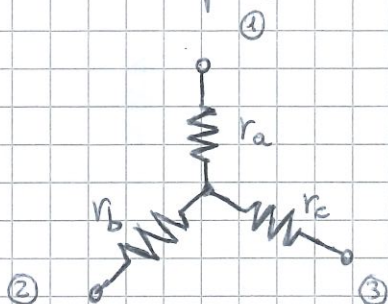
e V valore di potenza  $p < P_{L, \max}$  vi sono due  $R_L$  possibili!!!



## CONNESSIONI E PARTITORI

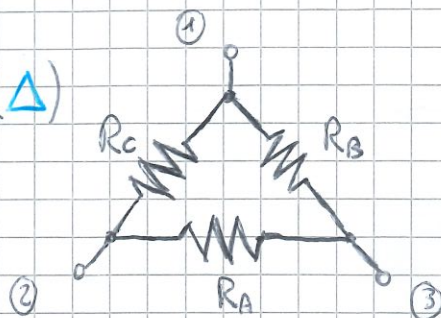
Andiamo ora ad osservare delle particolari strutture circuitali come le **connessioni a stella** e quelle **a triangolo** di resistori, ovvero dei TRIPOLI composti.

(Y)



?

(Δ)



Ci chiediamo ora se possono essere equivalenti ai morsetti esterni e pertanto troviamo, considerando l'opposto un cortocircuito nei "Y", delle formule da combinare poi:

$$R_{12} = r_a + r_b$$

$$R_{23} = r_b + r_c$$

$$R_{13} = r_a + r_c$$

(Y)

$$R_{12} = R_c // (R_a + R_b) = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_c + R_a + R_b}$$

$$R_{23} = R_a // (R_b + R_c) = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \quad (\Delta)$$

$$R_{13} = R_b // (R_a + R_c) = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c}$$

Eguagliando si ottengono le equazioni che poi scriveremo; pertanto nel **CASO GENERALE** le soluzioni sono le seguenti formule

$$\Delta \rightarrow Y \quad \begin{cases} r_a = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \\ r_b = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} \\ r_c = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} \end{cases}$$

Y → Δ

$$\begin{cases} R_a = r_b + r_c + \frac{r_b r_c}{r_a} \\ R_b = r_c + r_a + \frac{r_c r_a}{r_b} \\ R_c = r_a + r_b + \frac{r_a r_b}{r_c} \end{cases}$$

Se invece trattiamo il **caso particolare** delle resistenze uguali avremo:

$$\begin{cases} r_Y = r_a = r_b = r_c \\ R_\Delta = R_a = R_b = R_c \end{cases}$$

⇒

$$\begin{aligned} r_Y &= R_\Delta / 3 \\ R_\Delta &= 3 r_Y \end{aligned}$$

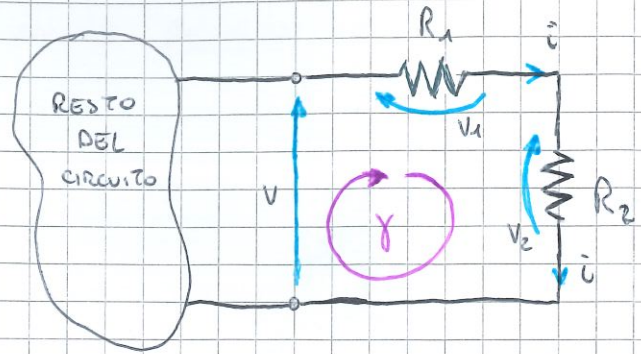


## PARTITORE DI TENSIONE E DI CORRENTE

È nota la tensione "V" ai poli di due resistori in serie, quanto valgono  $V_1$  e  $V_2$ ?

$$\text{KVL } \gamma: V - V_1 - V_2 = 0 \\ \rightarrow V = V_1 + V_2$$

$$\Rightarrow V = (R_1 + R_2) i \Rightarrow i = \frac{V}{R_1 + R_2}$$



e pertanto avremo  $V_1 = V \frac{R_1}{R_1 + R_2}$  ;  $V_2 = V \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Osserviamo che se

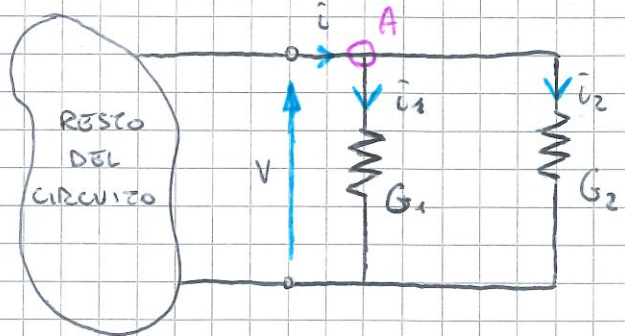
$$\frac{R_{1,2}}{R_1 + R_2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} V_1 \leq V \\ V_2 \leq V \end{cases}$$

e in GENERALE, con "N" resistori in serie, il partitore si esprime come

$$V_h = V \cdot \frac{R_h}{\sum_{k=1}^N R_k}$$

Nota invece la corrente "i", quanto valgono  $i_1, i_2$ ? I seguenti bipoli  $G_1$  e  $G_2$  sono in parallelo:

$$\text{KCL } \textcircled{A}: i - i_1 - i_2 = 0 \Rightarrow i = i_1 + i_2 \\ \Rightarrow i = (G_1 + G_2) V \Rightarrow V = \frac{i}{G_1 + G_2}$$



e pertanto avremo, nel caso due:

$$i_1 = i \frac{G_1}{G_1 + G_2} ; i_2 = i \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

Come prima osserviamo una particolarità ed enunciamo il caso GENERALE

$$\frac{G_{1,2}}{G_1 + G_2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} i_1 \leq i \\ i_2 \leq i \end{cases} ; i_h = i \cdot \frac{G_h}{\sum_{k=1}^N G_k}$$



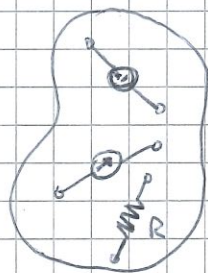
Se quest'ultimo partitore dovessimo esprimerlo alternativamente per mezzo delle resistenze, per il caso a due resistori, otterremmo:

$$\bar{u}_1 = \bar{i} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad ; \quad \bar{u}_2 = \bar{i} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

## TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Abbiamo un circuito lineare resistivo composto da:

(IPOTESI)



- $N_v$  generatori ideali di tensione  $V_{sk}$   $k=1, 2, \dots, N_v$
- $N_a$  generatori ideali di corrente  $\bar{i}_{sk}$   $k=1, 2, \dots, N_a$
- un numero arbitrario di resistori

Qualunque tensione o corrente  $x$  del circuito si può esprimere come combinazione lineare dei generatori, ovvero:

(TESI)

$$x = \sum_{k=1}^{N_v} \alpha_k V_{sk} + \sum_{j=1}^{N_a} \beta_j \bar{i}_{sj}$$

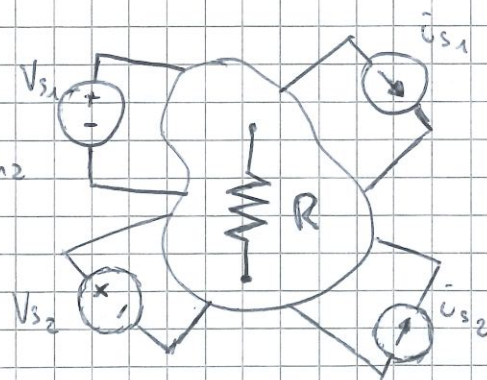
dove  $\alpha_k, \beta_j$  sono i coefficienti della combinazione lineare, dipendenti dalla  $x$  in oggetto.

## APPLICAZIONE DEL TEOREMA

Sia dato il seguente circuito. Per il teorema di sovrapposizione, con "x" corrente o tensione, si ha:

$$x = \alpha_1 V_{s1} + \alpha_2 V_{s2} + \beta_1 \bar{i}_{s1} + \beta_2 \bar{i}_{s2}$$

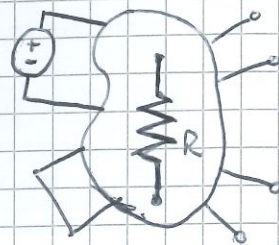
$$\Rightarrow \equiv x = x' + x'' + x''' + x^{IV}$$



Analizziamo ora la costruzione del sistema risolutivo



Difatti posso determinare il contributo di un generatore **spegnendo** tutti gli altri: nel seguente schema notiamo decisamente due circuiti aperti ( $i_{s1}=0$ ,  $i_{s2}=0$ ) e un cortocircuito ( $V_{s2}=0$ ) perciò solo  $V_{s1}$  acceso. Questo ci porta al contributo:

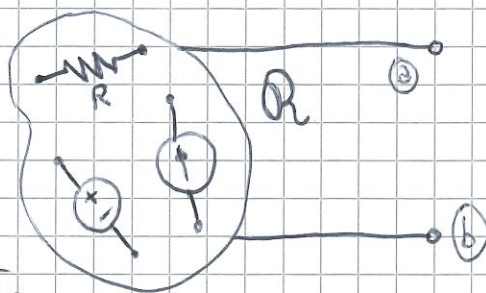


$$X = X' = \alpha_1 V_{s1}$$

## TEOREMA DI THEVENIN

Formulato dall'ing. Leon Thevenin (1827), ci consente di determinare un circuito equivalente ai morsetti esterni (equivalenza ESTERNA!!) di un bipolo costituito da un circuito lineare.

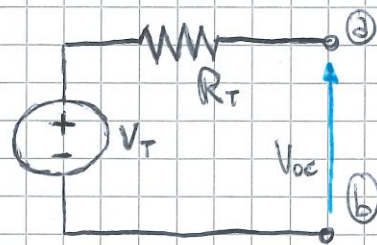
Si abbia un circuito lineare resistivo con due poli  $a, b$  accessibili come qua:



**IPOTESI)**

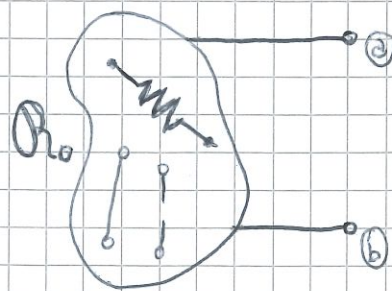
si può dimostrare sfruttando il teorema di sovrapposizione ma ci limitiamo all'enunciato

Il circuito  $R$  è equivalente ai morsetti  $a, b$  ad un generatore ideale di tensione detto "circuito equivalente di Thevenin" dove



1)  $V_T = V_{OC}$ , essendo  $V_{OC}$  la tensione a vuoto di  $R$  ai morsetti  $a, b$

2)  $R_T = R_{ab}$ , essendo  $R_{ab}$  la resistenza equivalente ai morsetti  $a, b$  del circuito  $R_0$  avendo spento tutti i generatori ideali al suo interno.



**TESI)**



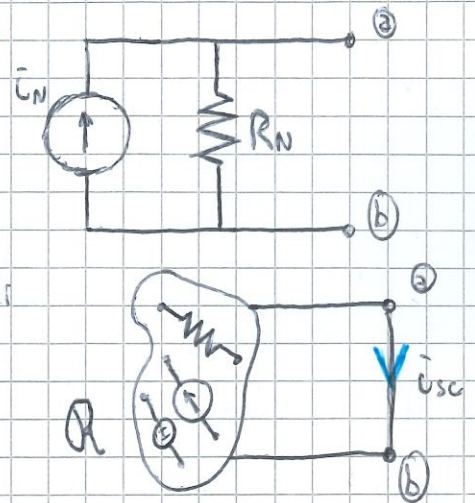
## TEOREMA DI NORTON

Formulato dall'ing. E.L. Norton (1926) è analogo al Teorema di Thevenin ma il circuito equivalente è un generatore non ideale di corrente.

Il circuito  $R$  è equivalente ai morsetti  $a, b$  ad un generatore non ideale di corrente detto "circuito equivalente di Norton" dove avremo:

Tesi)

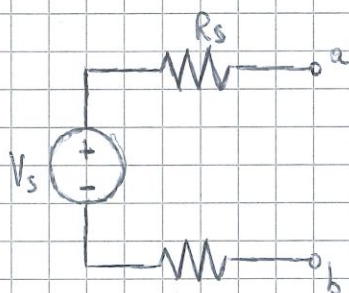
①  $\bar{I}_N = \bar{I}_{sc}$ , essendo  $\bar{I}_{sc}$  la corrente di cortocircuito di  $R$  ai morsetti  $a, b$  come in figura



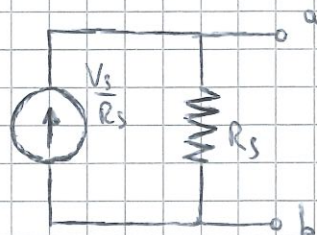
②  $R_N = R_{ab}$ , essendo  $R_{ab}$  la resistenza equivalente ai morsetti  $a, b$  di  $R$  avendo spento tutti i generatori ideali al suo interno.

## CASI PARTICOLARI THEVENIN/NORTON

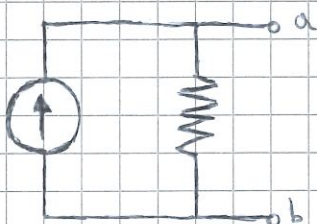
Le trasformazioni dei generatori non ideali, già viste, sono i casi particolari dei teoremi di Thevenin e Norton



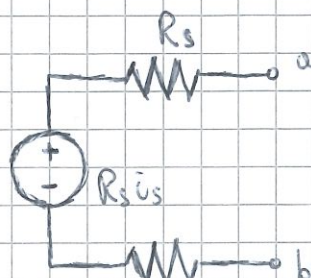
eq. Norton?



$$R_N = R_s, \quad \bar{I}_N = \frac{V_s}{R_s}$$



eq. Thevenin?



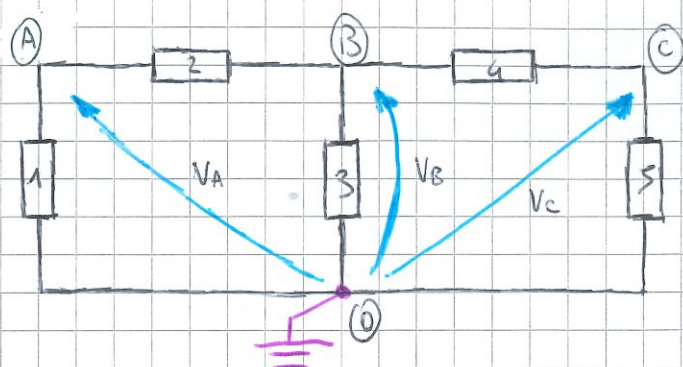
$$R_T = R_s, \quad V_T = R_s \bar{I}$$

Ne segue che  $R_T = R_N = \frac{V_T}{\bar{I}_N} = \frac{V_{oc}}{\bar{I}_{sc}}$



## METODO DELL'ANALISI NODALE

Si utilizzano come incognite le tensioni nodali invece che le tensioni/correnti dei bipoli. Si fissa in modo ARBITRARIO un nodo di riferimento e lo si indica con  $\perp$



"+" su A, B, C

"-" su 0 riferimento

Nel problema presentato abbiamo  $b = 5$  bipoli di cui dobbiamo trovare tensioni e correnti  $\Rightarrow b + b = 2b$ ; mentre avremo " $n$ " nodi con  $n = 4$  di cui  $n - 1$  tensioni nodali incognite  $V_A, V_B, V_C$ .  
Siccome  $n - 1 < 2b$  allora il metodo è efficiente dal punto di vista computazionale.

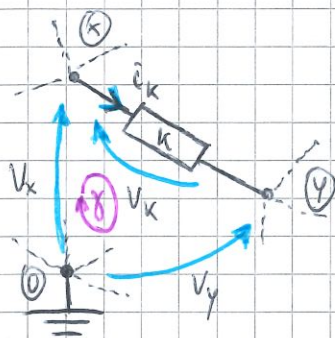
## RELAZIONE FRA TENSIONI NODALI E TENSIONI DEI BIPOLI

Si considerino due nodi  $(x)$  e  $(y)$  caratterizzati da tensioni nodali  $V_x$  e  $V_y$  rispetto al nodo di riferimento  $(0)$ .

Quanto vale  $V_k$  del bipolo " $k$ "?

$$\text{KCL } y: V_x - V_y - V_k = 0$$

$$\Rightarrow V_k = V_x - V_y$$



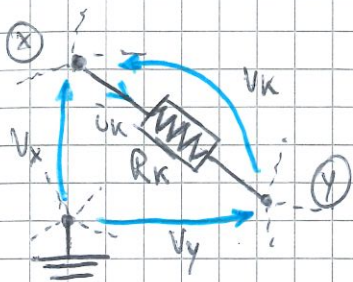
Quindi, date le tensioni nodali, sono univocamente determinabili tutte le tensioni dei bipoli nel circuito. Attraverso la relazione costitutiva dei bipoli, si possono determinare le correnti

$$\vec{I}_k = f(V_k)$$

quindi sono univocamente determinabili anche tutte le correnti.



Vediamo il caso particolare del resistore



$\Rightarrow$

$$V_k = V_x - V_y$$

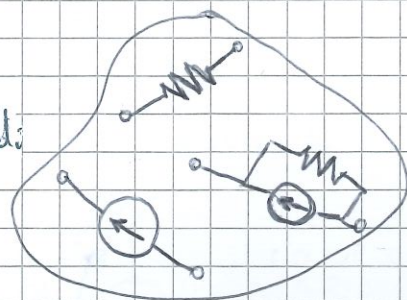
$$i_k = \frac{V_k}{R_k} = \frac{V_x - V_y}{R_k}$$

## SCRITTURA DEL SISTEMA DI EQUAZIONE

Supponiamo di avere un circuito lineare resistivo con solo sorgenti di corrente a "n" nodi

Il metodo è il seguente:

- ① si sceglie arbitrariamente un nodo di riferimento
- ② si numerano gli altri  $n-1$  nodi, individuando così  $n-1$  tensioni nodali incognite  $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$
- ③ A nodo (tranne il riferimento) si scrive KCL esprimendo  $i_k = f(V_k)$ : si ottiene un sistema di  $n-1$  equazioni in  $n-1$  incognite
- ④ si risolve il sistema



## OSSERVAZIONE SULLA STRUTTURA DEL SISTEMA DI EQUAZIONI

Solo per circuiti contenenti solo sorgenti di corrente  $[G_n] \cdot [V] = [i_s]$

1) MATRICE DELLE CONDUZZIANZE DI NODO  $[G_n] = \begin{bmatrix} G_{n1,1} & G_{n1,2} & \dots \\ G_{n2,1} & G_{n2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$

DIAGONALE:  $G_{n,i,i}$  è la somma delle conduttanze connesse al nodo  $(i)$

FUORI DIAGONALE:  $G_{n,i,k}$  (con  $k \neq i$ ) è uguale a -1 - somma delle conduttanze collegate fra il nodo  $(i)$  e il nodo  $(k)$

2) VETTORE DELLE SORGENTI  $[i_s] = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ \dots \end{bmatrix}$

$i_{sk}$  è la somma delle sorgenti di corrente entranti nel nodo  $(k)$



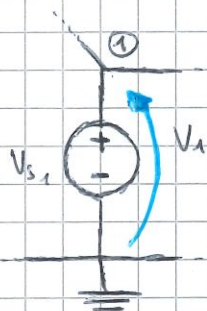
# COME TRATTARE I CIRCUITI CONTENENTI SORGENTI DI TENSIONE?

Affrontiamo questo problema per casistiche, ovvero:

**CASO 1)** Sono presenti generatori non ideali di tensione pertanto basta trasformarli in generatori non ideali di corrente equivalenti ai morsetti e la trattazione si riconduce alla precedente osservata

**CASO 2)** Se sono presenti 1 o + generatori di tensione non ideali al nodo di riferimento si procede così:

UNO SOLO:



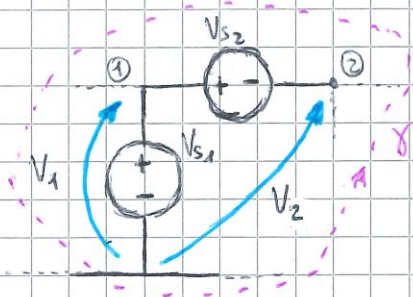
⇒ Non serve scrivere la KCL !!

$$V_1 = V_{s1}$$

è una tensione nodale nota

UN GRUPPO:

∃ un percorso per esprimere tutte le tensioni nodali dei nodi dei generatori come somma algebrica dei generatori (KVL):

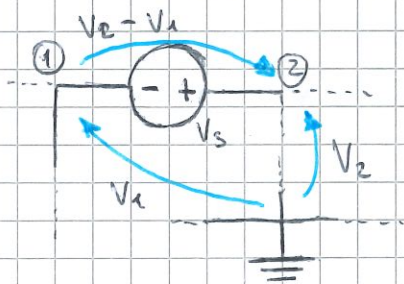


$V_1 = V_{s1}$  nota → KVL γ:  $V_2 = V_{s1} - V_{s2}$  nota  
⇒ Non scrivere KCL ① e KCL ② !!

**CASO 3)** Osserviamo ora la gestione di generatori non connessi al nodo di riferimento. La differenza " $V_2 - V_1$ " è imposta dal generatore ideale " $V_s$ " con la condizione

$$V_2 - V_1 = V_s$$

si sceglie  $V_1$  (oppure  $V_2$ ) come incognita e l'altra tensione sarà vincolata.

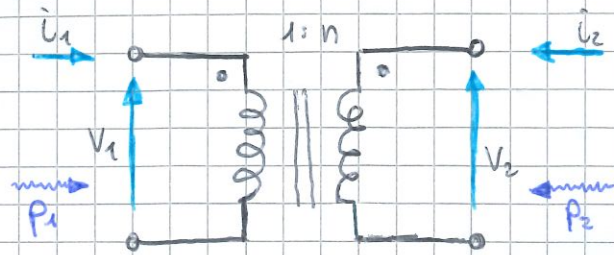




# TRASFORMATORI

In questo capitolo affronteremo i trasformatori e li vedremo come doppi bipoli con le seguenti caratteristiche e relazione costitutiva:

$$\begin{cases} V_2 = n V_1 \\ \bar{i}_1 = -n \bar{i}_2 \end{cases}$$



dove "n" il numero  $\in \mathbb{R}^+$  detto **rapporto di trasformazione** e porta alle spalle la seguente relazione

$$n = \frac{V_2}{V_1} = - \frac{\bar{i}_1}{\bar{i}_2} \quad (n > 0)$$

Si ha che la porta ① è detta PRIMARIO e la ② SECONDARIO e inoltre avremo le seguenti denominazioni del Trasformatore:

- ELEVATORE se  $n > 1 \Rightarrow |V_2| > |V_1|$  ( $|\bar{i}_2| < |\bar{i}_1|$ )
- RIDUTTORE se  $n < 1 \Rightarrow |V_2| < |V_1|$  ( $|\bar{i}_2| > |\bar{i}_1|$ )

## POTENZA ENTRANTE NEL TRASFORMATORE IDEALE

Come nel disegno riportato sopra possiamo intuire che la **potenza entrante** nel sistema del trasformatore sia la somma delle potenze entranti al primario e al secondario

$$P_e = P_1 + P_2 = V_1 \bar{i}_1 + V_2 \bar{i}_2 = V_1 (-n \bar{i}_2) + n V_1 \bar{i}_2 = 0$$

$$\Rightarrow P_e = 0 \quad ; \quad P_1 = -P_2$$

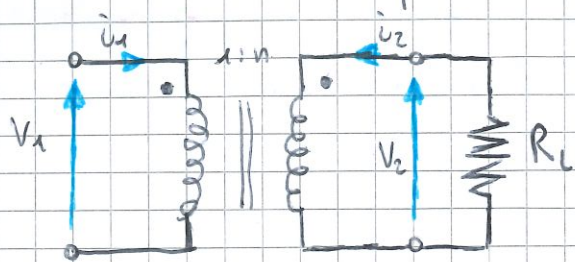
ne deriva che il trasformatore ideale non assorbe né eroga energia.

## TRASFORMAZIONE DELLE RESISTENZE

Andiamo ora a prendere in considerazione dei trasformatori non ideali e analizziamo le resistenze.



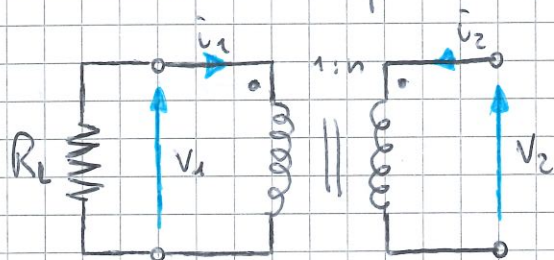
CASO 1) Facciamo dal secondario al primario: quanto vale la resistenza equivalente ( $R_{eq}$ ) vista al primario?



$$R_{eq} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{V_2/n}{-n i_2} = \frac{1}{n^2} \left( -\frac{V_2}{i_2} \right) = \frac{R_L}{n^2}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{R_L}{n^2}$$

CASO 2) Facciamo dal primario al secondario: quanto vale la resistenza equivalente ai morsetti del secondario?

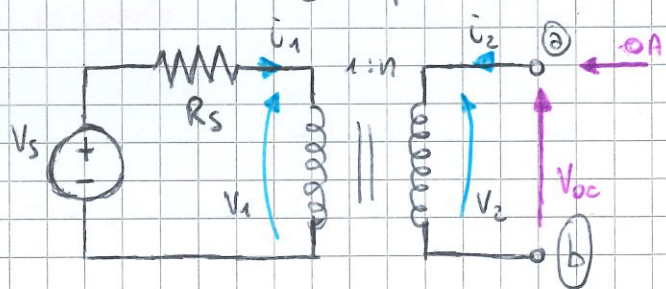


$$R_{eq} = \frac{V_2}{i_2} = \frac{n V_1}{-i_1/n} = n^2 \left( -\frac{V_1}{i_1} \right) = n^2 R_L$$

$$\Rightarrow R_{eq} = n^2 R_L$$

## TRASFORMAZIONE GENERATORI NON IDEALI DI TENSIONE (Th. Thevenin)

CASO 1) Determiniamo il circuito equivalente di Thevenin ai morsetti a) e b) passando dal primario al secondario



•  $V_{oc}$ :  $i_2 = 0 \rightarrow i_1 = -n i_2 = 0$

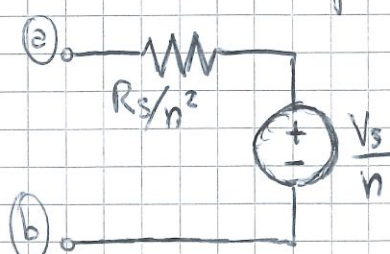
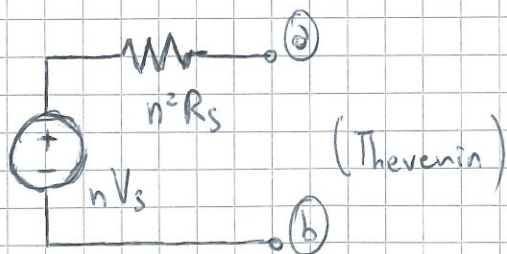
KVL:  $V_s - R_s i_1 - V_1 = 0 \rightarrow V_s = V_1$

$\rightarrow V_2 = n V_1 = n V_s$

$\Rightarrow V_{oc} = n V_s$

•  $R_{ab}$ ) Con gli stessi passaggi di prima e togliendo il generatore per mettere un cortocircuito si ottiene  $R_{ab} = n^2 R_s$

CASO 2) Dal secondario al primario: caso analogo coi passaggi, infine

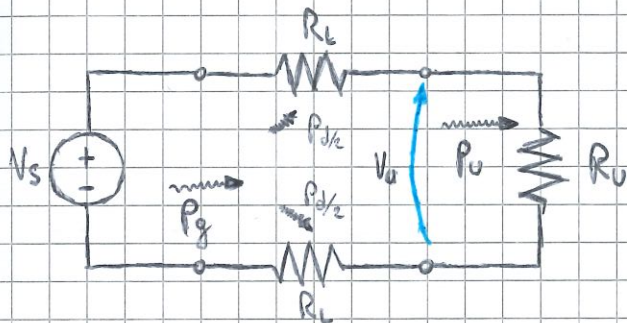




Come strategia risolutiva per la soluzione circuitale con trasformatori è consigliato sfruttare le proprietà già viste. In particolare, utilissima la trasformazione di generatori non ideali di tensione (teor. Thevenin) per eliminare il trasformatore includendolo in un equivalente circuito.

## APPLICAZIONE DEL TRASFORMATORE

Consideriamo ora il seguente circuito che modella una centrale di produzione, una linea a due conduttori, un carico resistivo utilizzatore. Affrontiamo quindi il problema della TRASMISSIONE dell'energia elettrica con dati reali:  $V_0 = 220V$ ,  $P_0 = 300kW$ ,  $L = 10km$ ,  $S = 25mm^2$ ,  $RAME: \rho = 1,73 \cdot 10^{-8} \Omega m$



$$P_U = \frac{V_U^2}{R_U} \Rightarrow R_U = \frac{V_U^2}{P_U} = \dots = 0,16 \Omega$$

$$R_L = \rho \frac{L}{S} = \dots = 6,9 \Omega$$

Passando per il partitore di tensione otteniamo il rapporto con la tensione a monte e il rendimento:

$$\frac{V_U}{V_s} = \frac{R_U}{2R_L + R_U} = \dots = 0,0115 \Rightarrow \eta = \frac{P_U}{P_g} = \frac{R_U}{2R_L + R_U} = 0,0115 \text{ (1,15\%)}$$

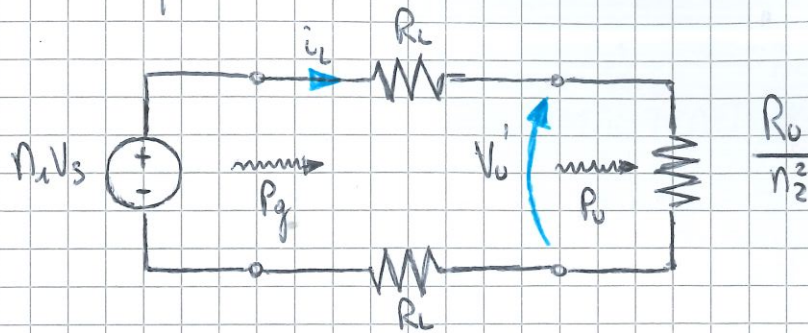
Da ciò deduciamo che " $\eta$ " è inaccettabile per quanto piccolo e in più, dato il rapporto tra le tensioni in entrata e uscita, anche accettando un  $V_s \gg V_U$ , un altro problema è che tale rapporto  $\frac{V_U}{V_s}$  dipende FORTEMENTE dal carico ( $\propto R_U$ ) e ciò impedisce una tensione di uscita " $V_U$ " ben regolata e non destonamente variabile con il carico.

Come soluzione interponiamo due trasformatori, riduttore e elevatore:





Si ottiene così una **linea ad alta tensione** (bassa corrente!) dove le perdite di potenza dissipata " $P_d$ " saranno minori a causa della bassa corrente e si avranno anche minori cadute di tensione. Vedremo il circuito equivalente ai fini dei calcoli (eq. di Thevenin):



$$\bar{i}_L = \frac{n_1 V_s}{2R_L + \frac{R_0}{n_2^2}} \Rightarrow P_g = n_1 V_s \bar{i}_L = \frac{n_1^2 V_s^2}{2R_L + \frac{R_0}{n_2^2}} ; P_0 = \frac{R_0}{n_2^2} \bar{i}_L^2 = \frac{R_0}{n_2^2} \frac{n_1^2 V_s^2}{(2R_L + \frac{R_0}{n_2^2})^2}$$

Da queste considerazioni ricaviamo:

$$\eta = \frac{P_0}{P_g} = \frac{R_0}{n_2^2 2R_L + R_0} ; \frac{V_0}{V_s} = n_1 n_2 \frac{R_0/n_2^2}{2R_L + \frac{R_0}{n_2^2}} = n_1 n_2 \frac{R_0}{n_2^2 2R_L + R_0}$$

da ciò osserviamo che " $\frac{V_0}{V_s} \rightarrow n_1 n_2$ " e " $\eta \rightarrow 1$ " per  $n_2 \rightarrow 0$ .  
Le conclusioni che si traggono riguardano naturalmente rendimenti di trasmissione maggiori e il rapporto tra le tensioni diventa totalmente arbitrario e indipendente dal carico (di  $R_0$ ), basta scegliere un valore di " $n_2$ " abbastanza piccolo.

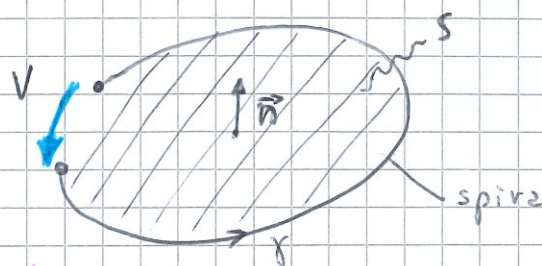


## FENOMENI INDUTTIVI

Vediamo ora una importante legge dell'induzione elettromagnetica trovando innanzitutto il **flusso** ( $\varphi$ ) del campo induzione magnetica " $\vec{b}$ " concatenato con la spira. Fissiamo come " $\vec{n}$ " la normale alla superficie e " $\gamma$ " la linea geometrica orientata come " $v$ ".

$$\varphi = \int_S \vec{b} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$[Wb] = [T \cdot m^2]$$



scriviamo ora la **legge di Faraday-Lenz** che correla il flusso variabile nel tempo alla tensione indotta ai capi della spira

$$V = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varphi = 0 \rightarrow V = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{costante} \rightarrow V = 0$$

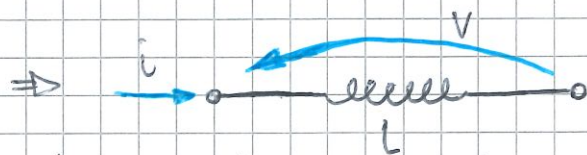
$$\varphi(t) \text{ variabile} \rightarrow V(t) \neq 0 \text{ in generale}$$

Ora invece vediamo l'**induttore** ovvero una spira percorsa da corrente che genera un campo induzione magnetica " $\vec{b}$ " secondo la legge di Ampere, pertanto ci sarà un flusso; definiamo l'**induttanza**

$$\varphi = L i : \quad L > 0 \quad [H] = \left[ \frac{Wb}{A} \right]$$

quindi si manifesta la tensione precedente, con convenzione utilizzatori, e definiamo il bipolo **INDUTTORE** nella teoria dei circuiti

$$V = \frac{d\varphi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$



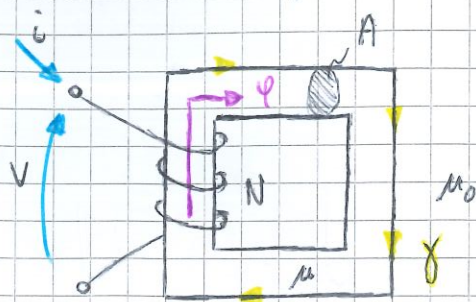
A questo punto andiamo a vedere le diverse applicazioni di questo nuovo elemento e parliamo di come è elettricamente costruito un trasformatore



## INDUTTORE AVVOLTO SU TOROIDE

Consideriamo un avvolgimento di " $N$ " spire su nucleo magnetico con " $\mu \gg \mu_0$ " e sia  $\varphi$  il flusso del campo magnetico " $\vec{b}$ ". Per la legge di Faraday-Lenz avremo le seguenti:

$$\varphi = \int_A \vec{b} \cdot \vec{n} dA \Rightarrow V = N \frac{d\varphi}{dt}$$



Troviamo ora la relazione che lega il flusso alla corrente tramite legge di Ampere e sia " $L$ " il perimetro della linea chiusa orientata " $\gamma$ ":

$$\oint_{\gamma} \vec{b} \cdot d\vec{l} = \mu I_{\gamma} \Rightarrow b \cdot L = \mu N i \Rightarrow b = \mu \frac{N i}{L}$$

a questo punto si ottiene

$$\varphi = b \cdot A = \mu \frac{N i}{L} A$$

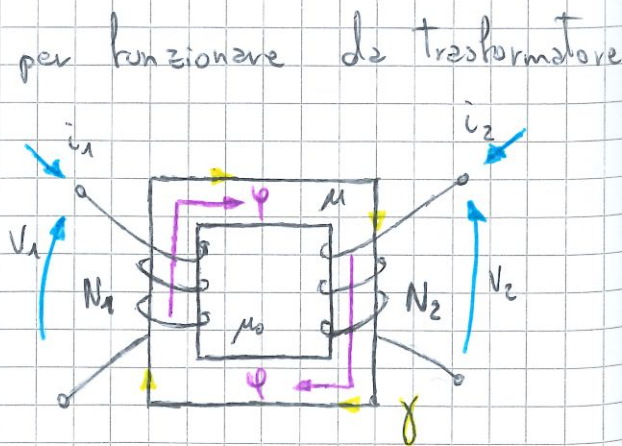
sostituendo così il flusso nella legge di Faraday-Lenz si ottiene la relazione costitutiva dell'induttore e sottolineeremo l'espressione dell'induttanza in funzione della geometria:

$$V = N \frac{d}{dt} \left[ \mu \frac{N i}{L} A \right] = N^2 \mu \frac{A}{L} \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow L = N^2 \mu \frac{A}{L}$$

## TRASFORMATORE A INDUZIONE IDEALE

Il seguente è stato il primo dispositivo ideato per funzionare da trasformatore ed è tutt'ora impiegato in applicazioni AC.

Come vediamo il nucleo di questo apparecchio è di materiale magnetico ideale ( $\mu \rightarrow \infty$ ) e possiede due avvolgimenti di  $N_1, N_2$  spire.





Definiamo innanzitutto il flusso concatenato al numero di spire per entrambi gli avvolgimenti: ( $[4] = [\varphi]$ )

$$\varphi_1 = N_1 \varphi$$

$$\varphi_2 = N_2 \varphi$$

Per la legge di Faraday-Lenz avremo

$$\begin{cases} V_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} \\ V_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} \\ V_2 = N_2 \frac{d\varphi}{dt} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

Mentre per quella di Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_g \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \oint \frac{\vec{B} \cdot d\vec{l}}{\mu} = I_g \rightarrow 0 \Rightarrow N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{i_1}{i_2} = - \frac{N_2}{N_1} = -n$$

dove le equazioni in viola sopra sono rispettivamente la prima e la seconda equazione della R.C del Trasformatore.

**Oss (!):** Il Trasformatore elettromeccanico funziona solo se c'è variazione nel tempo del flusso ( $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$ ) nel nucleo del Trasformatore  $\Rightarrow$  NON funziona per correnti/tensioni costanti (D.C.) ed è ottimizzato per lavorare con correnti sinusoidali (A.C.). Inoltre i materiali perfetti non esistono: le migliori leghe Fe-Si hanno " $\mu = 1000 \mu_0$ " e in sostanza il trasformatore reale approssima al caso ideale senza ovviamente raggiungerlo.

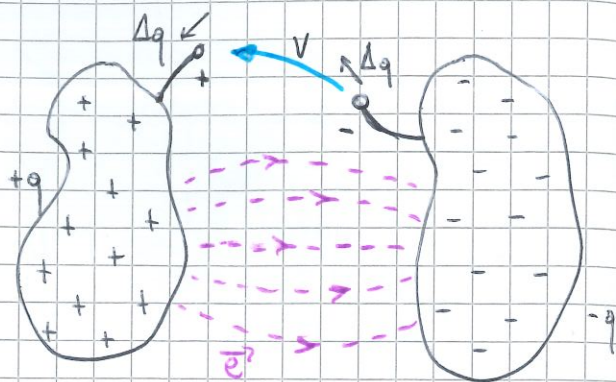


## FENOMENI CAPACITIVI

Analizziamo ora una categoria di fenomeni che andremo ad utilizzare in specifici circuiti: nel seguente disegno avremo due superfici metalliche allacciate, un campo elettrico e delle cariche libere.

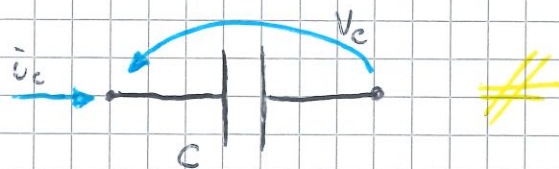
È una relazione lineare che ci introduce il termine di **capacità** ( $C$ ) dove:

$$q = C V, \quad C > 0: [F] = \frac{[C]}{[V]}$$

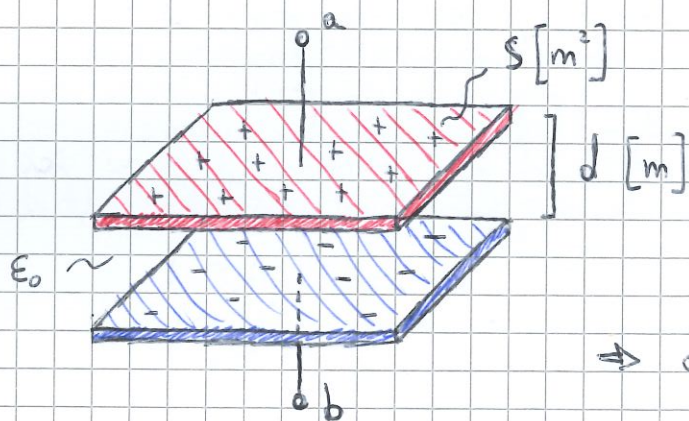


Possiamo ora passare ad una corrente e esprimiamo così la relazione costitutiva del bipolo CONDENSATORE, convenzione utilizzatori

$$i_C(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \approx \frac{\Delta q}{\Delta t} = C \frac{dv_C}{dt}$$



Vediamo ora il condensatore a due piastre parallele



$$V_{ab} = \int_{r:a \rightarrow b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E d \Rightarrow E = \frac{V_{ab}}{d}$$

$$\int_V \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow \epsilon S = \frac{q}{E}$$

$$\Rightarrow q = \epsilon \frac{S}{d} V_{ab} \Rightarrow C = \epsilon \frac{S}{d}$$

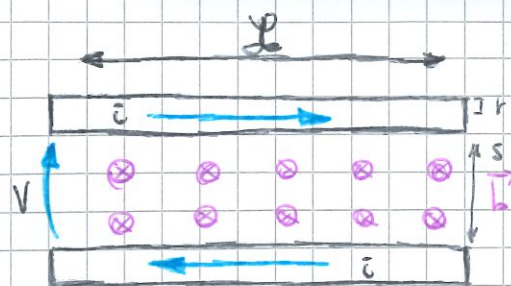
## CAPACITÀ E INDUTTANZA DI LINEE ELETTRICHE AEREE

Ogni volta che due superfici metalliche allacciate si trovano sottoposte ad una differenza di potenziale, si manifesta su esse una separazione di carica e di conseguenza un campo elettrico: ciò comporta la presenza di una **capacità**. Ogni volta che si ha una spira percorsa da corrente, che genera e concentra un campo magnetico, si ha una induttanza associata. In particolare questo fenomeno



avviene per le linee elettriche aeree.  
Si dimostra che:

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{s}{r}\right)} \mathcal{L} ; \quad L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{s}{r}\right) \mathcal{L}$$



con i valori di  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  e  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

## CIRCUITI RESISTIVI VS CIRCUITI DINAMICI

**CIRCUITI RESISTIVI:** Le relazioni costitutive degli elementi circuitali (es: resistore lineare e non, diodo, trasformatori, ...) sono **equazioni algebriche** come  $V(t) = R \cdot i(t)$  e legano la  $V(t)$  alla  $i(t)$  nel medesimo istante considerato. La soluzione di un circuito, in un dato istante, dipende dal valore delle sorgenti nello stesso.

SORGENTE all'istante  $t_k \Rightarrow$  soluzione all'istante  $t_k$

**CIRCUITI DINAMICI:** Le relazioni costitutive di alcuni elementi circuitali (dinamici) sono **equazioni differenziali**, ovvero contengono il termine  $\frac{d}{dt}$ , derivato rispetto al tempo. Questi elementi dinamici sono il condensatore e l'induttore.

## CONDENSATORE

Si osserva nella R.C. con comando in corrente di  $\neq$  per conoscere la tensione all'istante " $t$ ", serve conoscere la tensione di qualche istante precedente  $t_0 < t$  e la corrente da  $t_0$  a  $t$ :

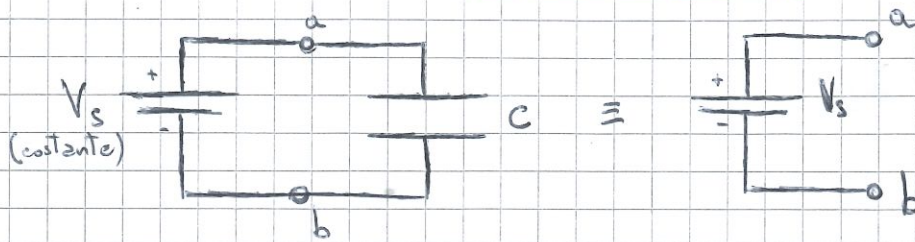
$$V_c(t) = V_c(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_c(t') dt'$$

Per questo motivo si dice che il condensatore è un bipolo "con memoria" e inoltre la R.C. non si può rappresentare nel piano  $V-i$  come per gli elementi resistivi perché c'è il termine  $\frac{d}{dt}$ .



Vediamo ora le **proprietà** del condensatore.

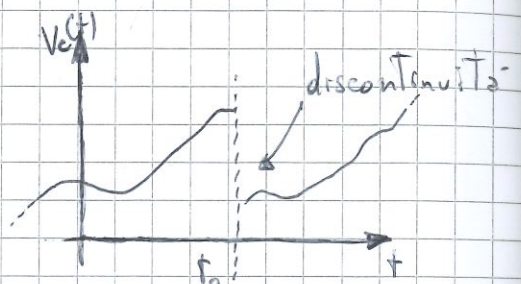
- ① Se  $\dot{V}_C = 0 \iff \frac{dV_C}{dt} = 0 \iff V_C = \text{costante}$  e un condensatore con tensione ai morsetti costante, equivale a quello che noi chiamiamo CIRCUITO APERTO



- ② La tensione nel condensatore è una **funzione continua**  $\forall t_0$

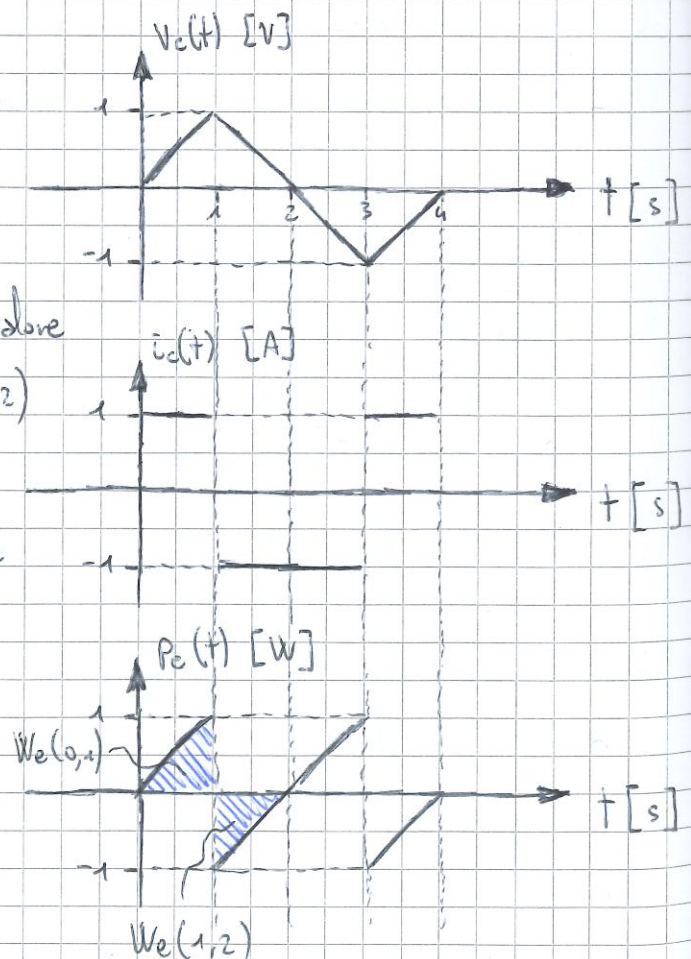
$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} V_C(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} V_C(t)$$

Inoltre, se così non fosse, quanto valrebbe la derivata  $\left. \frac{dV_C(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$ ? Considerando il salto come pendenza di retta  $\pm \infty$  allora la derivata sarebbe  $\dot{V}_C = C \frac{dV_C}{dt} = \pm \infty \Rightarrow \text{IMPOSSIBILE}$



- ③ Questo semplice esempio mostra una proprietà generale del condensatore: su un intervallo di tempo nel quale la tensione assume agli estremi lo stesso valore (es:  $V=0$ ), cioè in un ciclo (es:  $t=0$  e  $t=2$ ) della tensione l'energia entrante è nulla. Se  $|V|$  cresce  $P_C > 0$  mentre se  $|V|$  decresce  $P_C < 0$ : al netto l'energia entrante è nulla.

$$W_C(0,2) = W_C(0,1) + W_C(1,2) = 0 \text{ J}$$





## ENERGIA IMMAGAZZINATA NEL CONDENSATORE

Dalle osservazioni precedenti emerge come deve esistere una forma di energia internamente conservata, detta **energia immagazzinata** ( $W_c(t)$ ), dipendente da  $|V_c|$  tale che:

- $|V_c(t)|$  crescente  $\rightarrow p_c > 0 \rightarrow W_c(t)$  aumenta
- $|V_c(t)|$  decrescente  $\rightarrow p_c < 0 \rightarrow W_c(t)$  diminuisce

È vera infatti la seguente catena di uguaglianze

$$W_c(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} V_c i_c dt \Rightarrow p_c dt = V_c i_c dt = V_c C \frac{dV_c}{dt} dt = \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{1}{2} C V_c^2(t)}_{W_c(t)} \right) dt$$

In conclusione avremo che

$$W_c(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW_c}{dt} dt = W_c(t_2) - W_c(t_1) \Rightarrow W_c(t) = \frac{1}{2} C V_c^2(t)$$

## INDUTTORE

Vediamo ora l'elemento circuitale detto induttore di R.C. con comando in tensione e osserviamo come questa sia simile a quella del condensatore:  $\Rightarrow$  simili proprietà

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t V_L(t') dt'$$

osserviamo ora le **proprietà** dell'induttore:

① Se  $V_L = 0 \Leftrightarrow i_L = \text{costante}$ : induttore in cortocircuito ha  $i_L$  costante

② La corrente è **funzione continua**:  $\forall t_0 \quad \lim_{t \rightarrow t_0^-} i_L(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} i_L(t)$

③ L'induttore immagazzina (non dissipa) energia:  $W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_L(t) \geq 0 & \text{dipende da } |i_L(t)| \\ W_L(t) = 0 & \text{se } i_L(t) = 0 \text{ "induttore scarico"} \\ W_c(t_1, t_2) = W_L(t_2) - W_L(t_1) \end{cases}$$



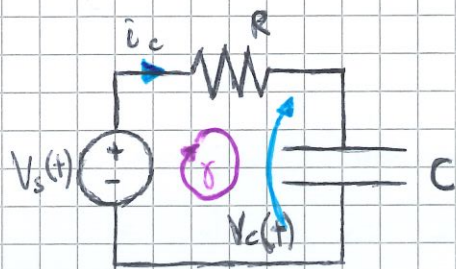
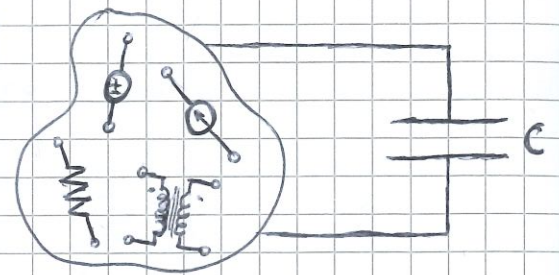
## CIRCUITI DINAMICI DEL PRIMO ORDINE

Trattiamo ora una categoria di circuiti caratterizzata dalla presenza di un elemento dinamico (condensatore/induttore) e la soluzione si otterrà risolvendo una equazione differenziale del primo ordine.

### CIRCUITO RC

Consideriamo un circuito dinamico lineare del primo ordine, costituito da un circuito lineare resistivo e un condensatore.

In base al teorema di Thevenin, il circuito lineare resistivo lo possiamo sempre sostituire con il suo equivalente generatore non ideale di tensione  $\Rightarrow$  tratt. generale



Consideriamo il caso di (DC) e supponiamo  $V_s(t) = V_s$  costante. Problema: nota la "condizione iniziale"  $V_c(0)$  determinare  $V_c(t)$  per  $t \geq 0$ .

$$\text{KVL } \oint: V_s - R \cdot i_c - V_c = 0 \\ \Rightarrow V_s - RC \frac{dV_c}{dt} - V_c = 0$$

$$\rightarrow \tau = R \cdot C$$

Scriviamo ora la costante di tempo ( $\tau$ ) e vediamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, del primo ordine,

non omogenea tramite la quale è possibile risolvere il circuito trovando la soluzione nella variabile " $V_c$ " detta

equazione di stato e variabile di stato:

$$\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{\tau} = \frac{V_s}{\tau}$$

Per risolvere questa equazione passeremo dai metodi algebrici proposti dall'Analisi II.



Al fine di questa risoluzione dovremo passare da una soluzione OMOGENEA e una PARTICOLARE partendo dalla generica

$$V_c(t) = V_{c,o}(t) + V_{c,p}(t)$$

- Eq. diff. omogenea associata:  $\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{\tau} = 0$  il cui polinomio caratteristico è  $\lambda + \frac{1}{\tau} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\tau}$  e pertanto

$$V_{c,o}(t) = K e^{\lambda t} = K e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (K \text{ arbitraria})$$

- Soluz. particolare: si cerca ora una soluzione con lo stesso andamento temporale del termine di sorgente. Nel nostro caso  $V_s/\tau = \text{costante}$  perciò cerchiamo una soluzione costante:

$$V_{c,p}(t) = A \Rightarrow \frac{dA}{dt} + \frac{A}{\tau} = \frac{V_s}{\tau} \Rightarrow A = V_s \Rightarrow V_{c,p}(t) = V_s$$

- Imponiamo la condizione iniziale per trovare "K": per  $t=0$

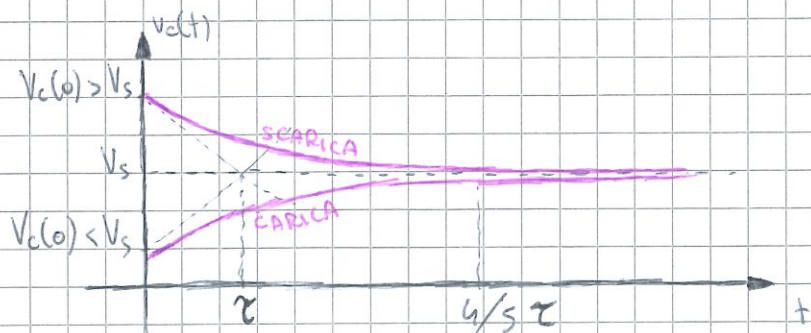
$$\Rightarrow V_c(0) = K e^{0/\tau} + V_s = K + V_s \Rightarrow K = V_c(0) - V_s$$

Pertanto otterremo, tramite  $i_c(t) = C \frac{dV_c}{dt}$ , sia per tensione che per corrente in dipendenza dal tempo

$$V_c(t) = [V_c(0) - V_s] e^{-\frac{t}{\tau}} + V_s \quad (\text{per } t \geq 0)$$

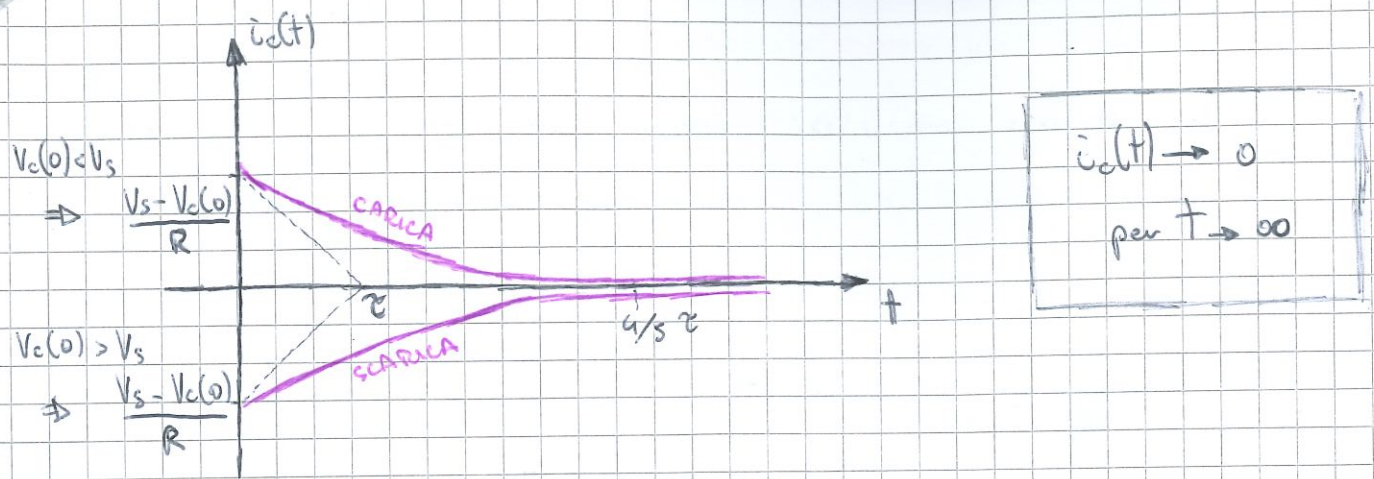
$$i_c(t) = \frac{V_s - V_c(0)}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{per } t \geq 0)$$

Andiamo ora a visualizzare l'andamento ovvero il grafico della soluzione



$$\boxed{V_c(t) \rightarrow V_s \text{ per } t \rightarrow \infty}$$



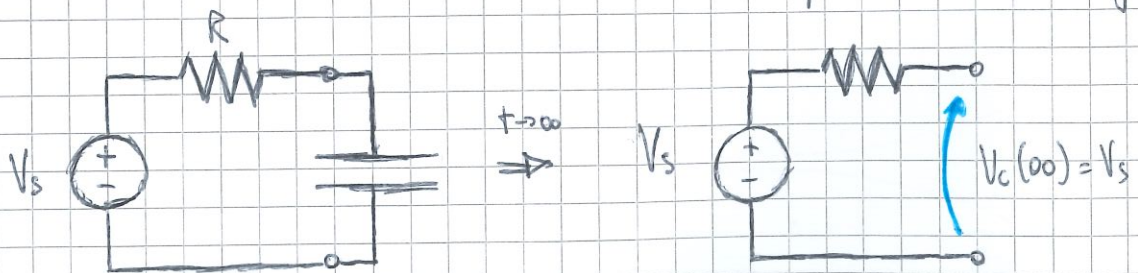


- Nel caso  $V_c(0) > V_s$  il condensatore si SCARICA fino a raggiungere, per  $t \rightarrow \infty$ , un valore  $V_c(t) = V_s$  (dopo  $\frac{4}{5} \tau$ )
- Nel caso  $V_c(0) < V_s$  il condensatore si CARICA fino a raggiungere, per  $t \rightarrow \infty$ , una tensione  $V_c(t) = V_s$  (dopo  $\frac{4}{5} \tau$ )

Analizziamo ora la **risposta transitoria e a regime** scomponendo la soluzione ottenuta, o "risposta" del circuito RC:

$$V_c(t) = \underbrace{[V_c(0) - V_s] e^{-t/\tau}}_{\text{"RISPOSTA TRANSITORIA"}} + \underbrace{V_s}_{\text{"RISPOSTA PERMANENTE" o "A REGIME"}}$$

- La risposta transitoria  $[V_c(0) - V_s] e^{-t/\tau} \rightarrow 0$ , per  $t \rightarrow \infty$
- La risposta a regime permane dopo che si è esaurito il transitorio e l'andamento temporale è analogo a quello delle sorgenti: nel nostro caso sorgenti costanti (DC)  $\Rightarrow$  regime costante. Poterz essere ottenuta considerando il circuito equivalente a regime:



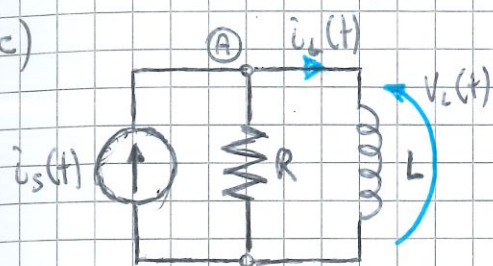
Infatti a regime costante il condensatore è uguale a un circuito APERTO



## CIRCUITO RL

Consideriamo un circuito lineare dinamico del primo ordine con un induttore e rappresentiamolo con un equivalente di Norton

(DC)



Per semplicità supponiamo  $i_s(t) = I_s = \text{costante}$

$$\text{KCL } \textcircled{A}: I_s - \frac{V_L}{R} - i_L = 0 \quad \text{ma} \quad V_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$\Rightarrow I_s - \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} - i_L = 0$$

Vediamo ora a lato la costante

$$\rightarrow \tau = \frac{L}{R}$$

di tempo ( $\tau$ ) e andiamo così

a scrivere l'equazione differenziale che anche prima, nel caso del circuito RC, abbiamo definito **equazione di stato** con  $i_L$  questa volta come **variabile di stato**:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{\tau} = \frac{I_s}{\tau}$$

Il metodo è analogo al precedente e abbiamo bisogno di  $i_L(0)$  per determinare  $i_L(t)$  con  $t \geq 0$ . La soluzione è pertanto la seguente

$$* \quad i_L(t) = [i_L(0) - I_s] e^{-\frac{t}{\tau}} + I_s \quad (\text{per } t \geq 0)$$

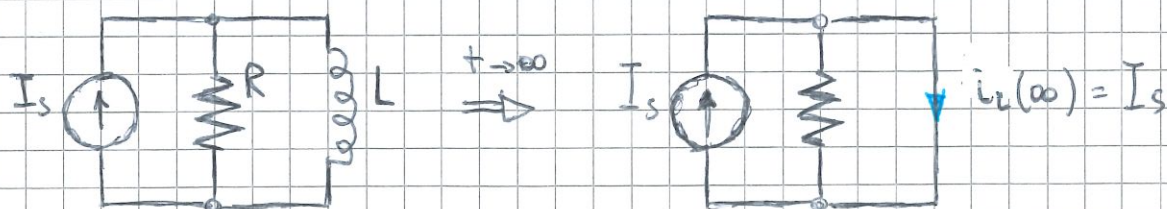
$$V_L(t) = R [I_s - i_L(0)] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{per } t > 0)$$

Trattiamo adesso la **risposta transitoria** e a **regime** di \*

e troviamo che:

• la risposta transitoria  $\rightarrow 0$ , per  $t \rightarrow \infty$

• la risposta a regime poteva essere ottenuta considerando il circuito



In effetti a regime costante l'induttore è uguale a un corto circuito



## GENERALIZZIAMO LE SOLUZIONI

Vediamo le soluzioni dei circuiti del primo ordine con sorgenti (DC) costituiti da:

### Condensatore

- 1) Si determina la condizione iniziale  $V_C(0)$ , se non nota la si trova per continuità

$$V_C(0^-) = V_C(0^+) = V_C(0)$$

- 2) Si determina la soluzione a regime risolvendo il circuito per  $t \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \text{CIRCUITO APERTO} \\ V_C(\infty)$$

- 3) Si determina la costante di tempo  $\tau = R_{eq} C$

- 4) Soluzione:

$$V_C(t) = [V_C(0) - V_C(\infty)] e^{-t/\tau} + V_C(\infty)$$

- 5) Se richieste si possono ora determinare altre tensioni/correnti nel circuito

### Induttore

- 1) Si determina la condizione iniziale  $i_L(0)$ , se non nota la si trova per continuità

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0)$$

- 2) Si determina la soluzione a regime risolvendo il circuito per  $t \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \text{CORTO CIRCUITO} \\ i_L(\infty)$$

- 3) Si determina la costante di tempo  $\tau = L / R_{eq}$

- 4) Soluzione:

$$i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)] e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$$

- 5) Se richieste si possono ora determinare altre tensioni/correnti nel circuito



## CIRCUITI LINEARI DINAMICI DI ORDINE QUALSIASI

Dato un circuito lineare, con un numero arbitrario di elementi resistivi,  $n_c$  condensatori,  $n_L$  induttori l'ordine del circuito è

$$n \leq n_c + n_L$$

ad esempio per un circuito del 2° ordine occorrono almeno o  
 $2 n_c$  o  $2 n_L$  oppure  $1 n_c + 1 n_L$ .

Il circuito di ordine  $n$  è governato da un sistema di  
"n" equazioni di stato in "n" variabili di stato, rispettivamente:  
- eq. differenziali lineari a coefficienti costanti, del 1° ordine  
- tensioni dei condensatori e correnti degli induttori

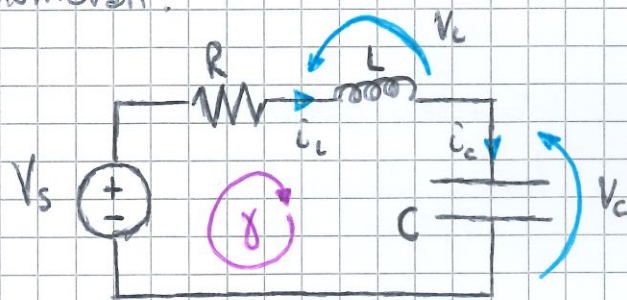
Vediamo ora un esempio di circuito del 2° ordine e  
trattiamolo con determinati passaggi numerati.

Le variabili sono  $V_c$  e  $\dot{u}_L$  mentre  
le equazioni di stato stanno così:

①  $\dot{u}_c = C \frac{dV_c}{dt}$ ,  $\dot{u}_c = \dot{u}_L \Rightarrow \frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} \dot{u}_L$

② KVL  $\gamma$ :  $V_s - R\dot{u}_L - V_c - V_L = 0$

ma  $V_L = L \frac{d\dot{u}_L}{dt} \Rightarrow \frac{d\dot{u}_L}{dt} = -\frac{R}{L} \dot{u}_L - \frac{V_c}{L} + \frac{V_s}{L}$



Ora che abbiamo le equazioni, vanno messe a sistema e  
mediante le condizioni iniziali  $V_c(0)$  e  $\dot{u}_L(0)$  vanno trovate  
le variabili in funzione del tempo  $t \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{dV_c}{dt} = \frac{\dot{u}_L}{C} \\ \frac{d\dot{u}_L}{dt} = -\frac{R}{L} \dot{u}_L - \frac{V_c}{L} + \frac{V_s}{L} \end{cases} \Rightarrow C \frac{d^2 V_c}{dt^2} = -\frac{RC}{L} \frac{dV_c}{dt} - \frac{V_c}{L} + \frac{V_s}{L}$$

Abbiamo ottenuto così una eq. diff. lineare a coeff. costanti del 2° ordine in  $V_c$ .



Riarrangeremo ora l'equazione nel modo seguente

$$C \frac{d^2 V_c}{dt^2} + \frac{RC}{L} \frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{L} = \frac{V_s}{L}$$

e in accordo con la matematica, la soluzione si esprime come:

$$V_c(t) = V_{c,o}(t) + V_{c,p}(t)$$

- Integrale generale eq. diff. omogenea associate:

Polinomio caratteristico  $C\lambda^2 + \frac{RC}{L}\lambda + \frac{1}{L} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{RC}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{RC}{L}\right)^2 - 4\frac{C}{L}}}{2C}$$

$$\Rightarrow V_{c,o}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \quad k_1, k_2 = \text{costanti}$$

È una risposta transitoria  $V_{c,o}(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ , infatti si può dimostrare che  $\text{Re}\{\lambda_1\} < 0$  e  $\text{Re}\{\lambda_2\} < 0$  (se  $R \neq 0$ )

- Integrale particolare (risposta a regime) presenta la stessa forma d'onda delle sorgenti: sorgenti AC/DC  $\Rightarrow$  regime AC/DC

$$V_{c,p}(t)$$

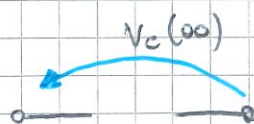
## CIRCUITI LINEARI DINAMICI IN REGIME CONTINUO (DC)

Tutte le sorgenti del circuito sono costanti e la risposta, o soluzione, a regime si ottiene sostituendo ai bipoli dinamici i loro modelli a regime costante

CONDENSATORE



$\Rightarrow$



CIRCUITO APERTO

INDUTTORE



$\Rightarrow$



CORTO CIRCUITO



## CIRCUITI LINEARI DINAMICI IN REGIME SINUSOIDALE (AC)

Tutte le sorgenti del circuito sono alternate sinusoidali. Lo studio del regime sinusoidale è importante dal punto di vista delle applicazioni poiché:

- la produzione, trasmissione, distribuzione, utilizzo industriale di energia elettrica è effettuata mediante uso di corrente alternata sinusoidale (50 Hz Europa; 60 Hz USA). Quando serve corrente continua, si fa uso di convertitori AC/DC (raddrizzatori).
- Qualunque forma d'onda periodica può essere decomposta in una somma di sinusoidi con frequenze multiple (serie di Fourier). Quindi lo studio del regime sinusoidale consente di trattare, per estensione, un regime periodico qualunque.

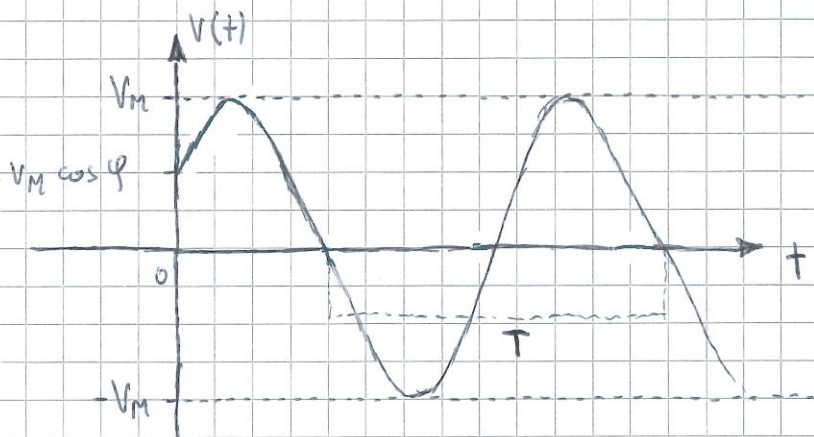
Per determinare la risposta a regime senza scrivere e risolvere le equazioni di stato, ci avvalremo di un metodo detto "ANALISI DEL DOMINIO DEI FASORI" che sfrutta l'algebra dei numeri complessi.

Vediamo ora la **forma d'onda sinusoidale** dove la tensione viene espressa per mezzo

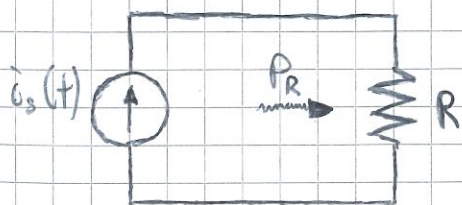
$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

dove " $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ " e

con " $V_M$ " valore massimo  
più " $\varphi$ " detta fase.



Facciamo ora delle considerazioni sul **valore efficace** ( $I_{eff}$ ) della sinusoide: consideriamo il seguente circuito



$$\text{con } i_s(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi)$$



Calcoliamo la potenza dissipata da  $R$  e il suo valore medio, di  $P_R(t)$ , nel periodo  $T$ :

$$P_R(t) = R \dot{u}_s^2(t) = R I_M^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$
$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T P_R(t) dt = \frac{1}{T} R I_M^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

facciamo ulteriori passaggi, anche trigonometrici.

$$P_R = \frac{1}{T} \frac{R I_M^2}{2} \int_0^T [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)] dt$$
$$\Rightarrow = \frac{1}{T} \frac{R I_M^2}{2} [t]_0^T + \frac{1}{T} \frac{R I_M^2}{2} \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t + 2\varphi)]_0^T$$
$$\Rightarrow = \frac{R I_M^2}{2} \frac{T-0}{T} + \frac{1}{T} \frac{R I_M^2}{2} \frac{1}{2\omega} \left[ \sin\left(2 \frac{2\pi}{T} T + 2\varphi\right) - \sin\left(2 \frac{2\pi}{T} \cdot 0 + 2\varphi\right) \right]$$
$$\Rightarrow = \frac{R I_M^2}{2} + \frac{1}{T} \frac{R I_M^2}{2} \frac{1}{2\omega} [\cancel{\sin(2\varphi)} - \cancel{\sin(2\varphi)}] = \frac{R I_M^2}{2}$$

Se a questo punto definiamo il **valore efficace** della sinusoide come la prossima, allora potremo scrivere la potenza dissipata

$$I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \longrightarrow P_R = R I_{eff}^2$$

La formula della potenza media è analoga a quella che si ha in corrente continua (costante). Il **valore efficace** di una forma d'onda periodica di tensione (o corrente) è quel valore di tensione (o corrente) **CONTINUA** che applicato ad un resistore lineare dà luogo alla stessa dissipazione di potenza media.



# SINUSOIDI E FASORI

Un **fasore** è un numero complesso in corrispondenza biunivoca con una sinusoide. La corrispondenza è così definita:

SINUSOIDE



FASORE

$$x(t) = \sqrt{2} X_{\text{eff}} \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$\bar{X} = X_{\text{eff}} e^{j\varphi_x}$$

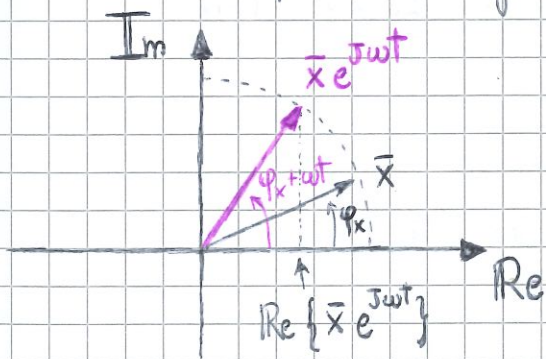
Avremo così che il modulo del fasore " $|\bar{X}| = X_{\text{eff}}$ " è uguale al valore efficace della sinusoide e il suo argomento è la fase della stessa ( $\varphi_x$ ). Vediamo ora il legame tra i due sopra:

$$x(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\bar{X} \cdot e^{j\omega t}\}$$

in fatti con la formula di Eulero e coi seguenti calcoli si ha:

$$x(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{X_{\text{eff}} e^{j\varphi_x} e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{X_{\text{eff}} e^{j(\omega t + \varphi_x)}\} = \sqrt{2} X_{\text{eff}} \cos(\omega t + \varphi_x)$$

Vediamo ora l'interpretazione geometrica nel piano complesso.



•  $\bar{X} e^{j\omega t}$  è un vettore rotante nel piano complesso, con velocità angolare  $\omega$ , in senso antiorario.

•  $\operatorname{Re}\{\bar{X} e^{j\omega t}\}$  è la proiezione di  $\bar{X} e^{j\omega t}$  sull'asse reale.

$\bar{X}$  è la posizione di  $\bar{X} e^{j\omega t}$  "fotografata" all'istante  $t=0$

Andiamo ora ad analizzare da vicino una delle applicazioni dei fasori appena osservati



## METODO DEI FASORI

Andiamo ora a trattare il metodo dei fasori complessi e vedremo così le ipotesi e le tesi:

Tutte le sorgenti del circuito sono alternate sinusoidali **isofrequenziali** - ovvero con la stessa pulsazione  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

**IPOTESI**)  $\iff$  A regime, qualunque tensione o corrente nel circuito è alternata sinusoidale con la stessa pulsazione  $\omega$ .  
Ad ognuna di queste sinusoidi, associeremo il proprio fasore.

## LEGGI DI KIRCHHOFF NEL DOMINIO DEI FASORI

$$\text{KCL: } \sum_{k=1}^N i_k(t) = 0 \quad \forall t, \forall \text{ supernodo}$$

Come si traduce la KCL in termini di fasori? Tramite lo stesso passaggio, valido per entrambi, otterremo KCL e KVL nel dominio dei fasori

$$\sum_{k=1}^N \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \bar{I}_k e^{j\omega t} \} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \left[ \sum_{k=1}^N \bar{I}_k \right] e^{j\omega t} \right\} = 0 \quad \forall t$$

che ci porta alle seguenti

$$\sum_{k=1}^N \bar{I}_k = 0$$

( $\forall$  supernodo)

$$\sum_{k=1}^N \bar{V}_k = 0$$

( $\forall$  percorso chiuso)

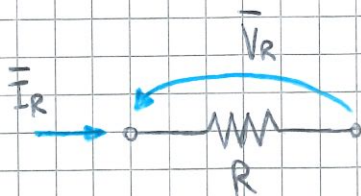
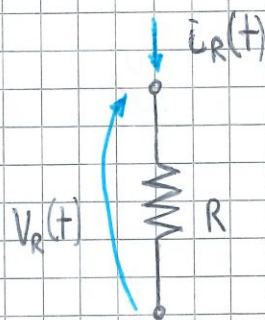
## RELAZIONE COSTITUTIVA DEL RESISTORE

Definiamo innanzitutto il resistore, a lato, e dettiamo le seguenti informazioni di partenza:

$$v_R(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \bar{V}_R e^{j\omega t} \}$$

$$i_R(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \bar{I}_R e^{j\omega t} \}$$

$$v_R(t) = R i_R(t)$$





Andiamo ora a trovare la relazione costitutiva, anche "simbolica", nel dominio dei fasori. Dall'ultima equazione si ottiene

$$\sqrt{2} \operatorname{Re}\{\bar{V}_R e^{j\omega t}\} = R \cdot \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\bar{I}_R e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{R \cdot \bar{I}_R e^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow \bar{V}_R = R \cdot \bar{I}_R$$

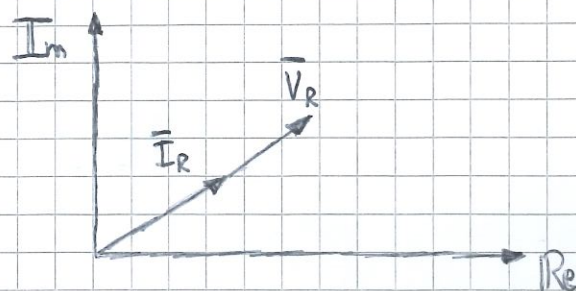
Notiamo come le grandezze siano IN FASE:

$$V_R = R \cdot I_R$$

(modulo)

$$\angle \bar{V}_R = \angle \bar{I}_R$$

(fase)



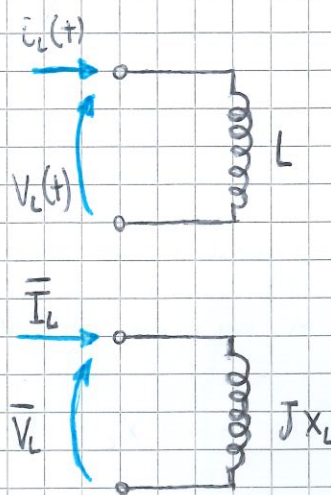
## RELAZIONE COSTITUTIVA DELL'INDUTTORE

Come fatto in precedenza analizziamo l'induttore:

$$V_L(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\bar{V}_L e^{j\omega t}\}$$

$$I_L(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\bar{I}_L e^{j\omega t}\}$$

$$V_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

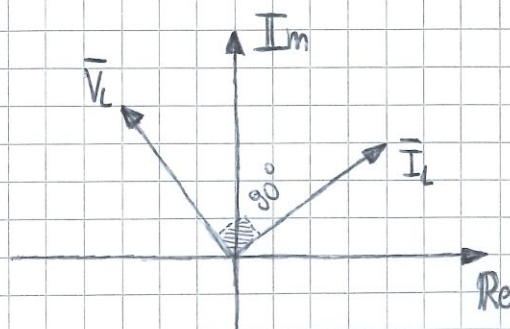


Andiamo a fare i conti e introduciamo il concetto di **reattanza induttiva** ( $X_L$ ) nelle seguenti:

$$\sqrt{2} \operatorname{Re}\{\bar{V}_L e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} L \cdot \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\bar{I}_L e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{j\omega L \bar{I}_L e^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow \bar{V}_L = j\omega L \bar{I}_L = jX_L \bar{I}_L$$

Le due grandezze sono in quadratura ( $90^\circ$ ) e  $\bar{I}_L$  è in ritardo di tale angolo rispetto a  $\bar{V}_L$ :



$$V_L = X_L I_L \quad (\text{modulo})$$

$$\angle \bar{V}_L = 90^\circ + \angle \bar{I}_L \quad (\text{fase})$$



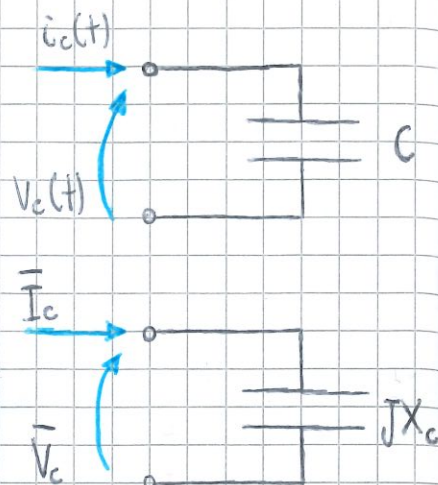
## RELAZIONE COSTITUTIVA DEL CONDENSATORE

Analogamente trattiamo il condensatore:

$$V_c(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \bar{V}_c e^{j\omega t} \}$$

$$i_c(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \bar{I}_c e^{j\omega t} \}$$

$$i_c(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt}$$

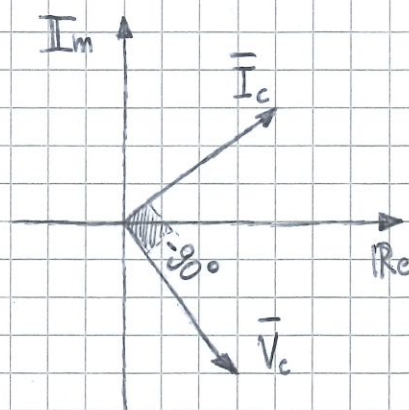


Andiamo a fare i conti e introduciamo il concetto di **reattanza capacitiva** ( $X_c$ ) nelle seguenti:

$$\sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \bar{I}_c e^{j\omega t} \} = \sqrt{2} C \cdot \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \{ \bar{V}_c e^{j\omega t} \} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ j\omega C \bar{V}_c e^{j\omega t} \}$$

$$\Rightarrow \bar{V}_c = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_c = -j \frac{1}{\omega C} \bar{I}_c = j X_c \bar{I}_c$$

Le due grandezze sono in quadratura e  $\bar{I}_c$  è in anticipo di  $90^\circ$  rispetto a  $\bar{V}_c$ :



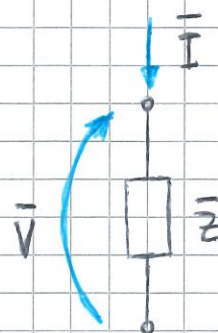
$$V_c = |X_c| I_c \quad (\text{modulo})$$

$$\angle \bar{V}_c = -90^\circ + \angle \bar{I}_c \quad (\text{fase})$$

## IMPEDENZA

Ora ci troviamo come prima nel dominio dei fasori e perciò andremo a semplificare le informazioni precedenti definendo l'**impedenza**, ovvero la "resistenza" di questo dominio, ( $\bar{Z}$ ):

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I} \quad (\text{con } \bar{Z} = [\Omega])$$



Vediamo ora il valore di tale fasore in tre casi particolari, ma prima

$$V = Z I$$

(modulo)

$$\angle \bar{V} = \angle \bar{Z} + \angle \bar{I}$$

(fase)



Osserviamo le casistiche, avrà valore reale o immaginario

$$\bar{Z} = R$$

(resistore)

$$\bar{Z} = jX_L = j\omega L$$

(induttore)

$$\bar{Z} = jX_C = -j\frac{1}{\omega C}$$

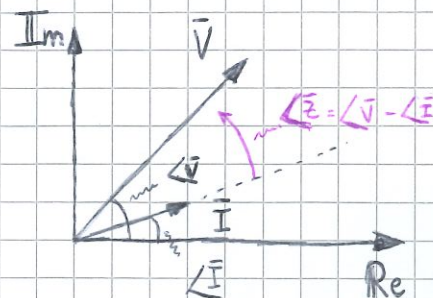
(condensatore)

In generale vediamo le seguenti considerazioni:

$$\bar{Z} = R + jX$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\angle \bar{Z} = \arctan \frac{X}{R}$$



Se abbiamo " $\angle \bar{Z} > 0$  ( $< 0$ )" allora siamo in presenza di una corrente in ritardo (anticipo) quindi l'impedenza sarà del tipo resistivo induttivo (conduttivo).

## AMMETTENZA

Come per l'impedenza trattiamo ora l'ammettanza, ovvero il reciproco, ( $\bar{Y}$ ):

$$\bar{I} = \bar{Y} \bar{V} \quad (\text{con } \bar{Y} = [\bar{Z}^{-1}])$$



da cui possiamo scrivere

$$I = Y V$$

(modulo)

$$\angle \bar{I} = \angle \bar{Y} + \angle \bar{V}$$

(fase)

in sostanza, essendo il reciproco dell'impedenza, ci darà:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$$

$$Y = \frac{1}{Z}$$

$$\angle \bar{Y} = -\angle \bar{Z}$$

definiamo invece ora la suscettanza induttiva o capacitiva

$$B_L = -\frac{1}{\omega L}$$

$$B_C = \omega C$$



Come visto in precedenza consideriamo i casi particolari

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} = G$$

(resistore / conduttanza)

$$\bar{Y} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = jB_L$$

(induttore)

$$\bar{Y} = j\omega C = jB_C$$

(condensatore)

In generale invece avremo, con  $-90^\circ \leq \angle \bar{Y} \leq 90^\circ$ :

$$Y = G + jB$$

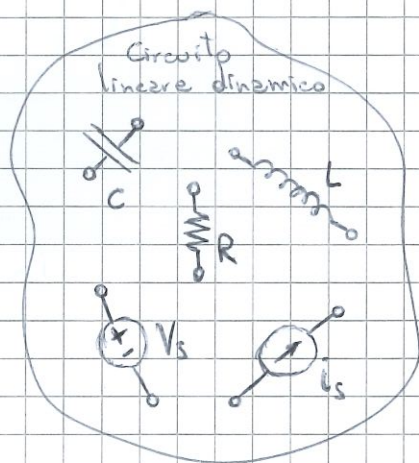
$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$\angle \bar{Y} = \arctan \frac{B}{G}$$

## ANALISI DI CIRCUITI NEL DOMINIO DEI FASORI

Passiamo ora alla vera e propria analisi circuitale. Si risolve il circuito simbolico con i metodi dei circuiti resistivi lineari, infatti tutte le relazioni costitutive simboliche sono equazioni algebriche lineari. Inoltre valgono tutti i metodi studiati: serie e parallelo,  $Y \leftrightarrow \Delta$ , partitori, trasf. gen., sovrapp. effetti, Thevenin, Norton, analisi nodale e i calcoli vanno fatti con i numeri complessi.

### DOMINIO DEL TEMPO



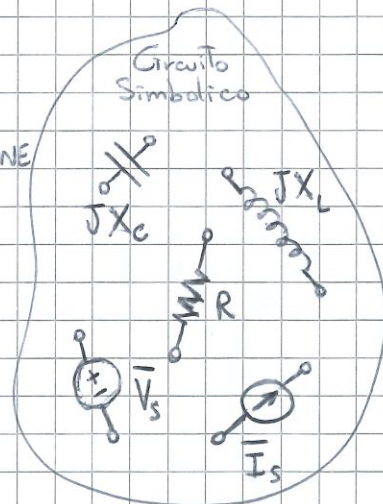
trasformazione  
DATI → RISOLUZIONE

antitrasformazione

risultato  
 $x(t)$

risultato  
 $\bar{x}$  fasore

### DOMINIO DEI FASORI



Come si evince dall'immagine è necessario cambiare dominio e poi ritrasformare il risultato da fasore complesso a variabile reale.



## SOVRAPPOSIZIONE DI REGIMI SINUSOIDALI CON FREQUENZE DIVERSE

Le sorgenti non sono isofrequenziali, ma hanno diverse pulsazioni  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$

IPOTESI)

⇒ Non si possono considerare insieme i fasori associati a sinusoidi con diverse " $\omega$ " !!

Vedremo ora le conseguenze pratiche:

LINEARITÀ  
del circuito dinamico



Vale il teor. di sovrapposizione

(nel dominio  
del tempo)

$$i(t) = i'(t) + i''(t) + i'''(t) + \dots + i^N(t)$$

$$v(t) = v'(t) + v''(t) + v'''(t) + \dots + v^N(t)$$

definiamo ora l'utilizzo degli apici numerici, ovvero:

- $i'(t), v'(t)$  a regime, sorgenti con pulsazione  $\omega_1$  accese, tutte le altre spente
- $i''(t), v''(t)$  a regime, sorgenti con pulsazione  $\omega_2$  accese, tutte le altre spente
- etc.....

Per ogni gruppo di sorgenti isofrequenziali, si può considerare il corrispondente circuito simbolico del dominio dei fasori, e utilizzato per determinare la soluzione a regime. Si sovrappongono poi le varie soluzioni nel dominio del tempo.

## VALORE EFFICACE CON PULSAZIONI DIVERSE

Si dimostra la seguente formula:

$$\Rightarrow X_{\text{eff}} = \sqrt{X_{\text{eff}}'^2 + X_{\text{eff}}''^2 + \dots + X_{\text{eff}}^N{}^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^N X_{\text{eff},k}^2}$$



## REGIME PERIODICO E APERIODICO

Consideriamo le seguenti pulsazioni diverse, dipendenti dai relativi periodi diversi tra loro e non consideriamo la presenza di un eventuale regime costante

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}, \quad \dots, \quad \omega_N = \frac{2\pi}{T_N}$$

$$T_1 \neq T_2 \neq T_3 \neq \dots \neq T_N$$

allora avremo che:

- la sovrapposizione dei regimi sinusoidali dà luogo ad un regime **periodico** se esiste " $T$ " tale che

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N = T \quad m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N} - \{0\}$$

cioè " $T$ " è un multiplo comune. Il regime periodico che si crea ha periodo pari al minimo comune multiplo dei periodi.

- In caso contrario il regime risulta non periodico, ovvero **aperiodico**.

## VALORE EFFICACE DI UNA FORMA D'ONDA PERIODICA

**IPOTESI)** Sia  $x(t)$  una tensione o una corrente periodica di periodo " $T$ "

Il valore efficace di  $x(t)$  è il seguente, ovvero la radice quadrata del valore medio, in " $T$ ", del quadrato di  $x(t)$

**TESI)**

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

nel mondo anglosassone viene detto "r.m.s.", ovvero "root mean square value".

Un caso particolare è se la forma d'onda è SINUSOIDALE:

$$X_{\text{eff}} = \frac{X_M}{\sqrt{2}} \quad \longrightarrow \quad X_M = \sqrt{2} X_{\text{eff}}$$



## REGIME PERIODICO QUALUNQUE: LA SERIE DI FOURIER

Lo sviluppo in serie di Fourier consente di esprimere qualunque funzione periodica come somma di sinusoidi aventi frequenze multiple (armoniche).  
Definiamo la **pulsazione fondamentale** e scriviamo la serie

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

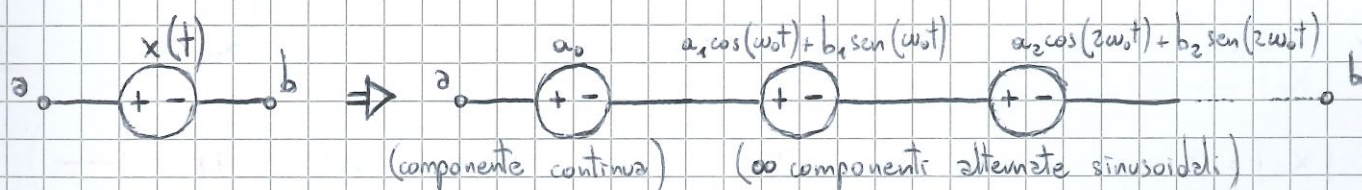
chiamiamo ora il significato delle altre variabili:

• Valore medio nel periodo:  $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$

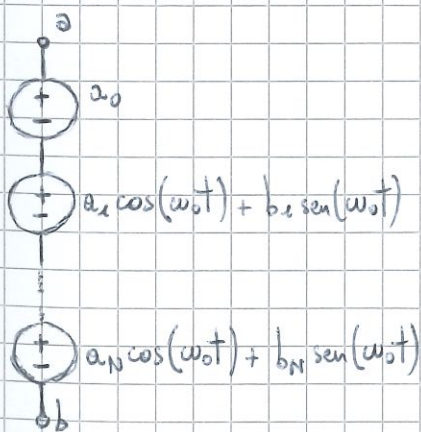
• Ampiezze delle sinusoidi aventi pulsazioni multiple di  $\omega_0$  (armoniche)

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

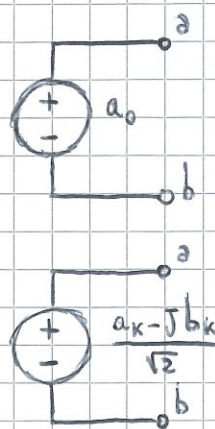
Vediamo il seguente **esempio**: se  $x(t)$  esprime la tensione di generatore ideale:



In pratica, siccome  $a_k \rightarrow 0$  e  $b_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$ , si può troncare la serie ad un numero finito di  $N$  termini, che dipende dal grado di approssimazione accettato.



ANALISI  
DEL REGIME  
MEDIANTE  
SOVRAPPOLIZIONE  
EFFETTI



STUDIO DI  
UN CIRCUITO A  
REGIME COSTANTE

STUDIO DI  $N$   
CIRCUITI NEL DOMINIO  
DEI FASORI  
(ognuno riferito alla propria  
pulsazione " $k\omega_0$ ")

( $N$  ordine massimo delle  
armoniche considerate)

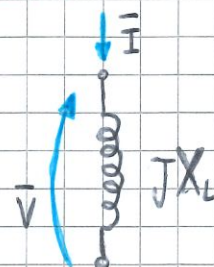
= SOVRAPPOLIZIONE NEL DOMINIO  
DEL TEMPO DELLE  
SOLUZIONI OTTENUTE



Quindi, mediante la serie di Fourier, la sovrapposizione degli effetti, l'analisi nel dominio dei fasori, è possibile determinare la soluzione a regime di un circuito contenente sorgenti con andamento periodico qualunque.

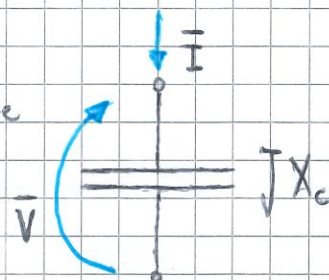
## COMPORTAMENTO DI L E C AL VARIARE DELLA FREQUENZA

- L'induttore presenta una bassa impedenza a frequenze piccole, e una elevata impedenza a frequenze elevate



$$\begin{cases} X_L = 0 & \text{per } \omega = 0 \Rightarrow \text{cortocircuito} & (\text{DC}) \\ X_L \rightarrow \infty & \text{per } \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \text{circuito aperto} & (\text{elevate frequenze}) \end{cases} \quad (X_L = \omega L)$$

- Il condensatore presenta una elevata impedenza a frequenze piccole, e una bassa impedenza a frequenze elevate

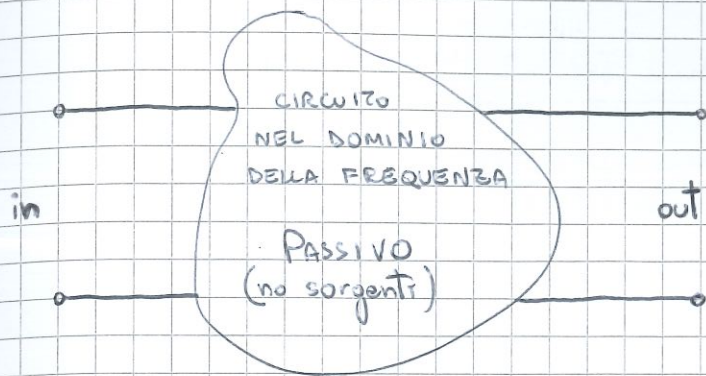


$$\begin{cases} |X_C| \rightarrow \infty & \text{per } \omega = 0 \Rightarrow \text{circuito aperto} & (\text{DC}) \\ |X_C| = 0 & \text{per } \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \text{cortocircuito} & (\text{elevate frequenze}) \end{cases} \quad (|X_C| = \frac{1}{\omega C})$$

- Quando, nei circuiti simbolici nel dominio dei fasori (regime sinusoidale!), consideriamo il comportamento del circuito al variare della frequenza, si dice che studiamo il circuito nel dominio della frequenza



# FUNZIONI DI TRASFERIMENTO (o funzioni di rete)



Scriviamo la funzione di rete  
dove  $\bar{X}$  è una tensione o una  
corrente del circuito

$$\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{X}_{out}}{\bar{X}_{in}}$$

	$\bar{X}_{in}$	$\bar{X}_{out}$	$\bar{H}(j\omega)$
1)	tensione	tensione	funzione di trasferimento di tensione
2)	corrente	corrente	funzione di trasferimento di corrente
3)	tensione	corrente	ammettenza di trasferimento $[\Omega^{-1}]$
4)	corrente	tensione	impedenza di trasferimento $[\Omega]$

L'effetto del circuito sul segnale di ingresso è descritto dalla funzione di rete sia per variazione di modulo che di fase: DIPENDE DA  $\omega$ !

$$\bar{X}_{out} = \bar{H}(j\omega) \cdot \bar{X}_{in} \Rightarrow \begin{aligned} X_{out} &= |\bar{H}(j\omega)| \cdot X_{in} \quad (\text{modulo}) \\ \angle \bar{X}_{out} &= \angle \bar{H}(j\omega) + \angle \bar{X}_{in} \quad (\text{fase}) \end{aligned}$$

Possiamo così dire che la **risposta in frequenza** è l'insieme delle due funzioni della frequenza

• RISPOSTA IN AMPIEZZA  $|\bar{H}(j\omega)|$       • RISPOSTA IN FASE  $\angle \bar{H}(j\omega)$

## PROPRIETÀ

Perché si scrive " $\bar{H}(j\omega)$ " e non semplicemente " $\bar{H}(\omega)$ "? Si scrive in questo modo perché vale la seguente proprietà generale

" $\bar{H}(j\omega)$  è una funzione razionale frazionaria della variabile  $j\omega$ "



dove con funzione razionale protta significa rapporto di due polinomi

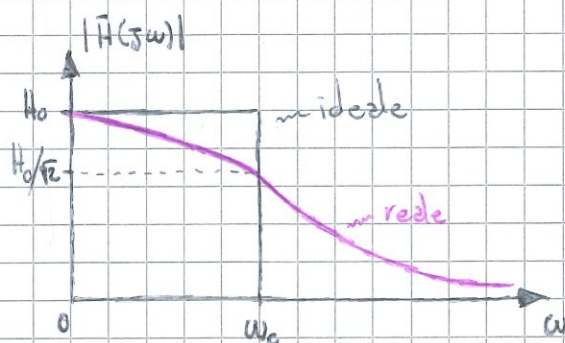
$$\bar{H}(j\omega) = \frac{a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0}{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}$$

I gradi  $m, n$  e i coefficienti  $a_k, b_k$  dipendono dal circuito e dalla funzione di rete considerata

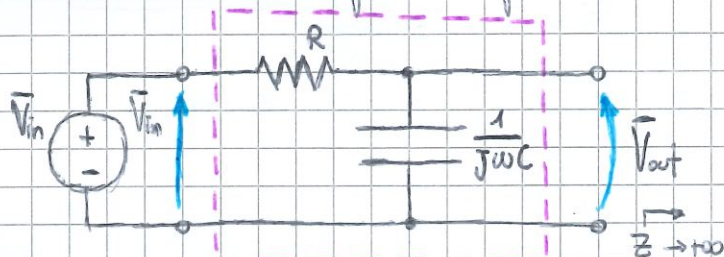
## RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN FILTRO PASSA-BASSO

Il filtro passa-basso è caratterizzato da questa risposta in ampiezza:

- $\omega_c$  = pulsazione di taglio
- $[0, \omega_c]$  = banda passante



La realizzazione più semplice è un circuito RC del primo ordine:



Partitore di tensione:

$$\bar{V}_{out} = \bar{V}_{in} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \bar{V}_{in} \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Se poi definiamo la pulsazione di taglio:

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow \frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}} = \bar{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \left( \omega_c = \frac{R}{2L} \right)$$

Si ha pertanto la risposta in frequenza precedente come:

$$|\bar{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad \angle \bar{H}(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Notare che " $\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$ " dove " $\tau$ " è la costante di tempo del circuito di 1° ordine, quindi:

$\omega_c$  basse  $\Rightarrow \tau$  elevate

(ovvero il transitorio che precede l'instaurarsi del regime dura più a lungo)



Vediamo ora l'andamento per resistive

$$\omega \ll \omega_c : |\bar{H}(j\omega)| \approx 1, \quad \angle \bar{H}(j\omega) \approx 0^\circ$$

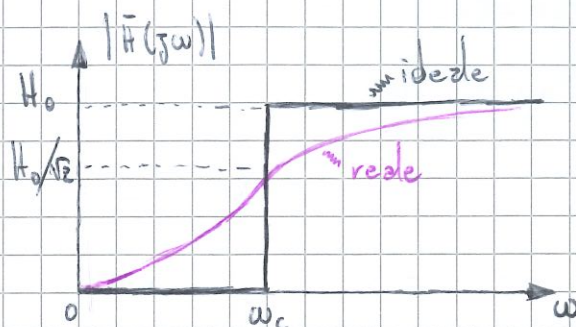
$$\omega = \omega_c : |\bar{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \angle \bar{H}(j\omega) = -45^\circ$$

$$\omega \gg \omega_c : |\bar{H}(j\omega)| \approx 0, \quad \angle \bar{H}(j\omega) \approx -90^\circ$$

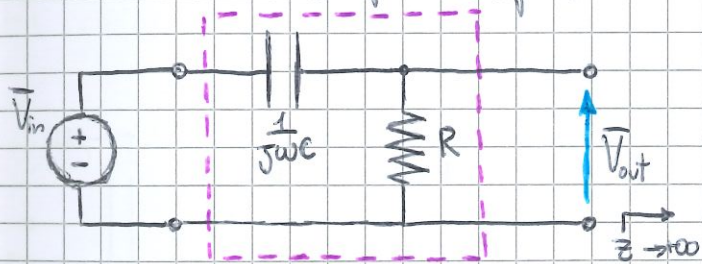
## RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN FILTRO PASSA-ALTO

Il filtro passa-alto è caratterizzato da questa risposta in ampiezza:

- $\omega_c$  = pulsazione di taglio
- $[\omega_c, \infty)$  = banda passante



La realizzazione più semplice consiste in:



Partitore di tensione:

$$\bar{V}_{out} = \bar{V}_{in} \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \bar{V}_{in} \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Se poi definiamo la pulsazione di taglio:

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow \frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}} = \bar{H}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \left( \omega_c = \frac{R}{2L} \right)$$

Si ha pertanto la seguente risposta in frequenza:

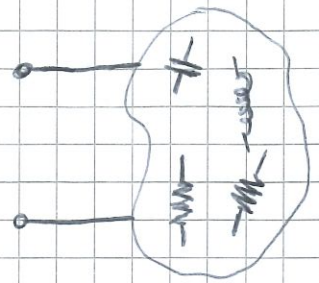
$$|\bar{H}(j\omega)| = \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

$$\angle \bar{H}(j\omega) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$



## CIRCUITI RISONANTI

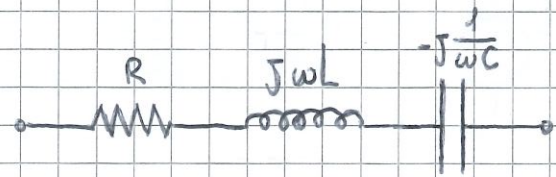
Si consideri un circuito che contenga almeno 1 C e 1 L e siano  $\bar{Z}(j\omega)$ ,  $\bar{Y}(j\omega)$  l'impedenza e l'ammettenza viste a due morsetti del circuito. Allora avremo che:



- Se  $\text{Im}\{\bar{Z}(j\omega)\} = 0$ ;  $\text{Im}\{\bar{Y}(j\omega)\} = 0$  il circuito è in condizioni di **risonanza**
- La/le pulsazioni " $\omega$ " a cui ciò avviene sono dette **pulsazioni di risonanza** ( $f = \frac{\omega}{2\pi}$  frequenza di risonanza)
- In condizioni di risonanza, l'impedenza è un numero reale, ovvero è resistiva (gli effetti reattivi di L e C si compensano).

## CIRCUITO RISONANTE SERIE E PARALLELO

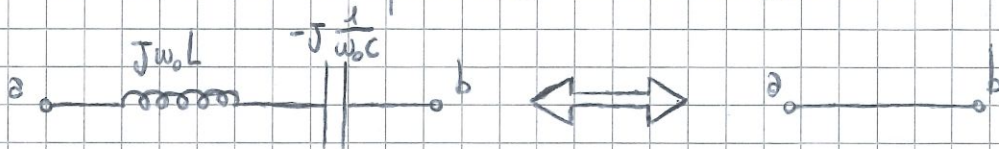
Vediamo per primo il caso della **serie**:



$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \xrightarrow{\text{Im}\{\bar{Z}\}=0} \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

$$\text{da cui: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \bar{Z}(j\omega) = R \quad (\text{pulsazione di risonanza})$$

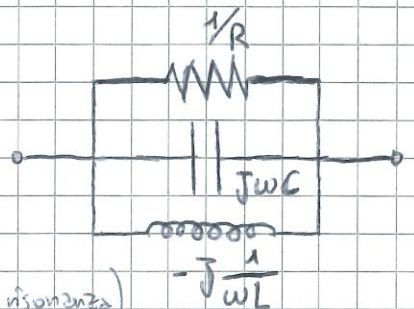
La serie di L e C è equivalente ad un cortocircuito:



Vediamo ora invece il caso del **parallelo**:

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \xrightarrow{\text{Im}\{\bar{Y}\}=0} \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

$$\text{da cui: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \bar{Y}(j\omega) = \frac{1}{R} \quad (\text{pulsazione di risonanza})$$



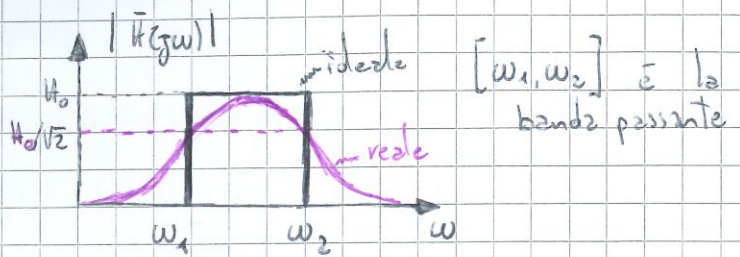
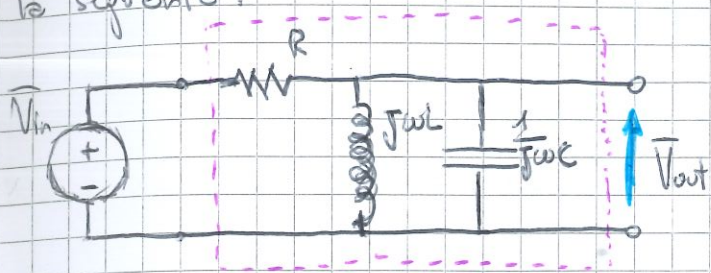
Il parallelo di L e C è equivalente ad un circuito aperto:





## FILTRO PASSA - BANDA

È un filtro tale che si abbia:  
Una delle possibili realizzazioni è la seguente:



Chiamiamo " $S = j\omega$ " e deriviamo la risposta in ampiezza analiticamente:

$$(SL \parallel \frac{1}{SC}) = \frac{SL \frac{1}{SC}}{SL + \frac{1}{SC}} = \frac{SL}{S^2 LC + 1}$$

Partitore di tensione: 
$$\bar{V}_{out} = \bar{V}_{in} \frac{(SL \parallel \frac{1}{SC})}{R + (SL \parallel \frac{1}{SC})} = \dots = \bar{V}_{in} \frac{SL}{RLCS^2 + R + SL}$$

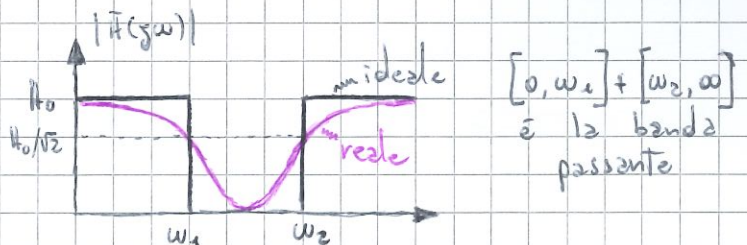
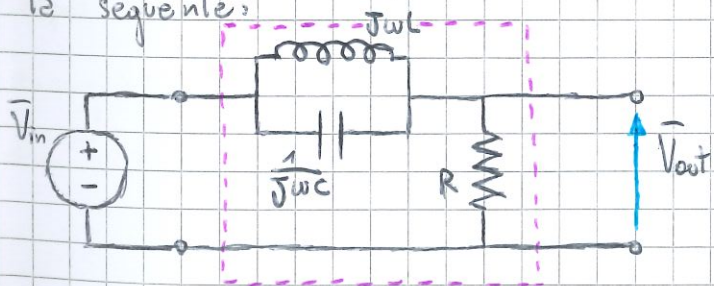
$$\Rightarrow \bar{H}(s) = \bar{H}(j\omega) = \frac{j\omega L}{(j\omega)^2 RLC + (j\omega)L + R} \Rightarrow |\bar{H}(j\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2}}$$

Al variare della pulsazione, varierà anche la funzione di rete:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |\bar{H}(j\omega)| = 0 \quad ; \quad \omega \rightarrow \infty \Rightarrow |\bar{H}(j\omega)| = 0 \quad ; \quad \omega = \omega_0 \Rightarrow |\bar{H}(j\omega)| = 1$$

## FILTRO ELIMINA - BANDA

È un filtro tale che si abbia:  
Una delle possibili realizzazioni è la seguente:



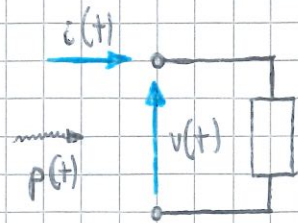
Senza ricalcolare il nuovo modulo della funzione di rete andiamo a scrivere la dipendenza da " $\omega$ ":

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |\bar{H}(j\omega)| = 1 \quad ; \quad \omega \rightarrow \infty \Rightarrow |\bar{H}(j\omega)| = 1 \quad ; \quad \omega = \omega_0 \Rightarrow |\bar{H}(j\omega)| = 0$$



## POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE

Siano innanzitutto le seguenti, considerando che  $V, I$  sono i valori efficaci di tensione e corrente:



$$\begin{cases} v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \varphi_v) \\ i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases}$$

Dalle considerazioni a sinistra si ottiene poi la **potenza istantanea** entrante

$$p(t) = v(t) i(t) = 2VI \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Riscriviamola ora attraverso alcune elaborazioni matematiche

• Formula di Werner:  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

$$\Rightarrow p(t) = VI [\cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i) + \cos(\varphi_v - \varphi_i)]$$

• Definiamo " $\varphi = \varphi_v - \varphi_i$ " ovvero l'angolo di sfasamento della tensione rispetto alla corrente ( $\varphi > 0$  ( $< 0$ ) = ritardo (anticipo)). Aggiungo e tolo  $\varphi_i$ :

$$\Rightarrow p(t) = VI [\cos \varphi + \cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi)]$$

• Formula: " $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ "

$$\Rightarrow p(t) = VI [\cos \varphi + \cos(2\omega t + 2\varphi_i) \cos \varphi - \sin(2\omega t + 2\varphi_i) \sin \varphi]$$

• Definiamo **potenza attiva** ( $P$ ) e **potenza reattiva** ( $Q$ ) così:

$$P = VI \cos \varphi \quad [W] \quad Q = VI \sin \varphi \quad [VAR]$$

• Decomposizione di  $p(t)$

$$p(t) = P [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)] - Q \sin(2\omega t + 2\varphi_i)$$

- Oss (!):
- $p(t)$  oscilla con frequenza doppia ( $2\omega$ ) rispetto a tensione e corrente (periodo metà  $T/2$ )
  - oscilla attorno al valore " $P$ "
  - per descrivere l'oscillazione ci servono due ampiezze " $P, Q$ "



## SIGNIFICATO DELLA POTENZA ATTIVA "P"

Se calcolo il valore medio di  $p(t)$  nel periodo  $T/2$

$$\begin{aligned} \text{VALORE MEDIO} &= \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} p(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} P dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} P \cos(2\omega t + 2\varphi_x) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} Q \sin(2\omega t + 2\varphi_x) dt \\ &= \frac{2}{T} [P(\frac{T}{2} - 0)] = P \quad \left\{ \text{il valore medio di sen/cos è Nullo!} \right\} \end{aligned}$$

Ne deriva che la potenza attiva è il valore medio della potenza istantanea.

## ENERGIA ENTRANTE NELL'INTERVALLO $[0, \tilde{T}]$

Dai calcoli precedenti ricaviamo anche:

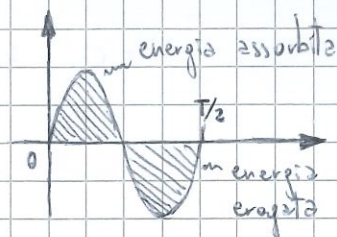
$$W_e(0, \tilde{T}) = \int_0^{\tilde{T}} p(t) dt = N \cdot \int_0^{T/2} p(t) dt = N \cdot P \frac{T}{2} = P \tilde{T}$$

In generale anche se  $\tilde{T}$  non è multiplo del periodo  
ma " $\tilde{T} \gg T/2$ " (l'errore è uguale a una frazione di periodo)  $\Rightarrow W_e(0, \tilde{T}) = P \tilde{T}$

Quindi la potenza attiva è responsabile del trasferimento energetico

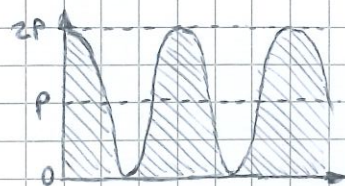
## SIGNIFICATO DELLA POTENZA REATIVA "Q"

"Q" tiene conto di scambi energetici a valore medio sul periodo. Tali scambi sono presenti, per esempio, nei bipoli dinamici (condensatore e induttore) che immagazzinano energia. C e L si caricano e si scaricano continuamente due volte per ogni periodo T della loro variabile di stato ( $V_C, i_L$ ).

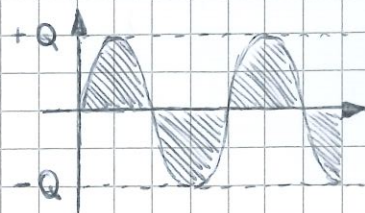


$$p(t) = P[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_x)] - Q \sin(2\omega t + 2\varphi_x)$$

■ ( $\geq 0$ ) oscillazione UNIDIREZIONALE che trasporta energia, con valore medio pari a "P"



■ ( $\geq 0$ ) oscillazione BIDIREZIONALE con valore medio nullo!





## BIPOLI : FORMULE CARATTERISTICHE SPECIFICHE DI $P$ E $Q$

- Vediamo il caso del **resistore**:

Se consideriamo:

$$\bar{V}_R = R \bar{I}_R \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ V_R = R I_R \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(tensione e corrente)} \\ \text{sono in fase} \end{array}$$

avremo che: " $P = V_R I_R \cos 0 = R I_R^2$ " e " $Q = V_R I_R \sin 0 = 0$ "  
perciò il flusso di potenza è unidirezionale (assorbita)

$$[P \geq 0, Q = 0] \Rightarrow p(t) = P[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_r)]$$

- Vediamo il caso dell'**induttore**:

Se consideriamo:

$$\bar{V}_L = j X_L \bar{I}_L \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 90^\circ \\ V_L = X_L I_L \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(corrente in} \\ \text{ritardo di } 90^\circ) \end{array}$$

avremo che: " $P = V_L I_L \cos 90^\circ = 0$ " e " $Q = V_L I_L \sin 90^\circ = X_L I_L^2$ "  
perciò il flusso di potenza è bidirezionale (assorbita/erogata)

$$[P = 0, Q \geq 0] \Rightarrow p(t) = -Q \sin(2\omega t + 2\varphi_r)$$

- Vediamo il caso del **condensatore**:

Se consideriamo:

$$\bar{V}_C = j X_C \bar{I}_C \quad (X_C < 0) \Rightarrow \begin{cases} \varphi = -90^\circ \\ V_C = |X_C| I_C \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(corrente in} \\ \text{anticipo di } 90^\circ) \end{array}$$

avremo che: " $P = V_C I_C \cos(-90^\circ) = 0$ " e " $Q = V_C I_C \sin(-90^\circ) = -|X_C| I_C^2$ "  
perciò il flusso di potenza è bidirezionale (assorbita/erogata)

$$[P = 0, Q \leq 0] \Rightarrow p(t) = -Q \sin(2\omega t + 2\varphi_r)$$



## POTENZA COMPLESSA

Si definisce **potenza complessa** ( $\bar{S}$ ) la seguente, in due formule, e si nota come possa essere anche direttamente calcolata nel dominio dei fasori (\*: indica il complesso coniugato)

$$\bar{S} = P + jQ = \bar{V} \bar{I}^*$$

[VA] = "Volt-Ampere"

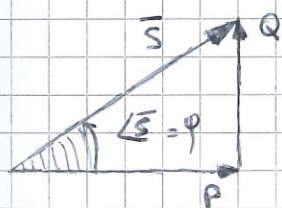
La dimostrazione è la seguente, partendo da " $\bar{V} = V e^{j\varphi_V}$ " e " $\bar{I} = I e^{j\varphi_I}$ ",

$$\bar{S} = V e^{j\varphi_V} \cdot I e^{-j\varphi_I} = VI e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi = P + jQ$$

Vediamo ora la **potenza apparente**, ovvero il modulo della complessa:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = VI \quad (\text{sostituendo si dimostra})$$

Analizziamo ora il **TRIANGOLO DELLE POTENZE**, utile a ricordare tutte le relazioni matematiche che abbiamo trovato

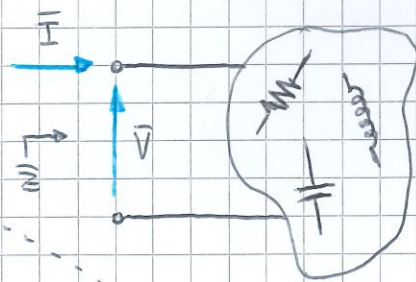


$$\angle \bar{S} = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) = \arctan(\tan \varphi) = \varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = VI, \quad P = S \cos \varphi, \quad Q = S \sin \varphi$$

## FATTORE DI POTENZA

Per un bipolo composto da R, L, C e senza generatori all'interno la fase è l'angolo dell'impedenza!!! Per  $\varphi > 0$  ( $< 0$ ) si avranno carichi resistivi-induttivi (resistivi-capacitivi) e " $\cos \varphi$ " è detto **fattore di potenza**.



$$\varphi = \varphi_V - \varphi_I = \angle \bar{Z}$$

Siccome " $\cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$ " questo fattore non consente di distinguere se il bipolo è induttivo o capacitivo, quindi per ovviare al problema si aggiunge l'informazione:

« rit. » (ritardo)

« ant. » (anticipo)



Spesso per le apparecchiature industriali, i dati di assorbimento vengono forniti dichiarando: la potenza apparente " $S$ " e il fattore di potenza " $\cos \varphi$ ".

## TEOREMA DI BOUCHEROT

Di questo teorema ometteremo la dimostrazione basata sul teorema di Tellegen applicato al dominio dei fasori

- IPOTESI)
- circuito lineare dinamico in regime sinusoidale, pulsazione " $\omega$ " unica (sorgenti isofrequenziali!)
  - $N$  bipoli;  $\bar{S}_K$  potenza complessa entrante nel  $K$ -esimo bipolo

TESI)

$$\sum_{K=1}^N \bar{S}_K = 0$$

ovvero la potenza complessa si CONSERVA!!

Il suo COROLLARIO è il seguente:

- la potenza attiva si conserva!
- la potenza reattiva si conserva!

$$\sum_{K=1}^N (P_K + jQ_K) = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{K=1}^N P_K = 0} ; \boxed{\sum_{K=1}^N Q_K = 0}$$



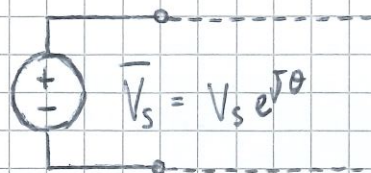
# SISTEMI TRIFASE

La produzione, trasmissione, distribuzione e l'utilizzazione industriale dell'energia elettrica prevede l'utilizzo di sistemi trifase, ai seguenti vantaggi:

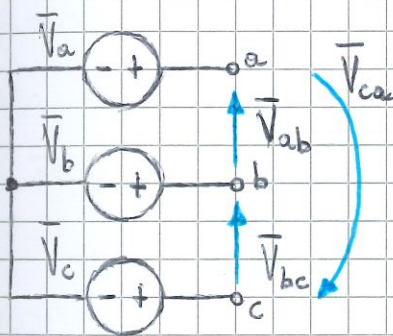
1. Riduzione dei costi d'impianto
2. Macchine elettriche trifase più efficienti

## GENERATORE MONOFASE (2 conduttori) DI TENSIONE

L'utilizzo di due conduttori, connessi col generatore (una fase), è il modo più semplice per distribuire energia elettrica, ma non è la soluzione migliore dal punto di vista industriale

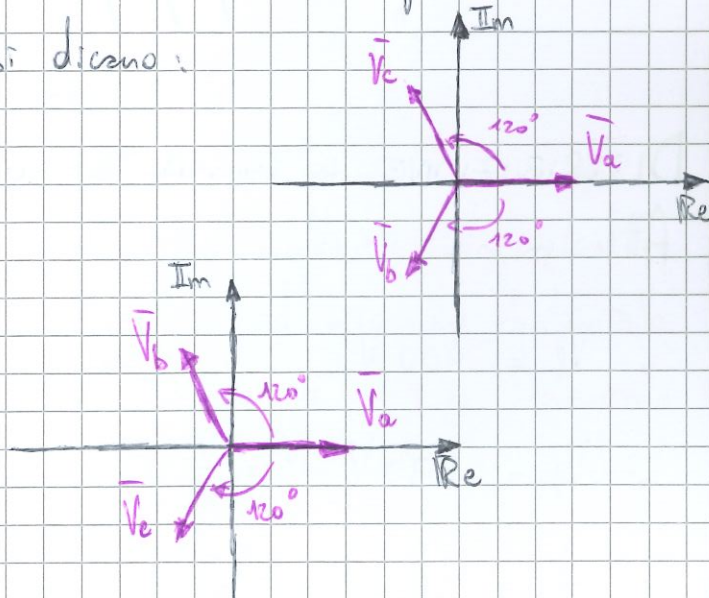


## GENERATORE TRIFASE SIMMETRICO DI TENSIONE (3 conduttori)



Le tensioni  $\bar{V}_a, \bar{V}_b, \bar{V}_c$  sono dette **tensioni di fase**. Hanno uguale modulo e sono sfasate tra loro di  $120^\circ$ . Ci sono due possibilità che osserveremo si dicono:

$\bar{V}_a = V_f$	"terna diretta"	
$\bar{V}_b = V_f e^{-j120^\circ}$		"sequenza diretta"
$\bar{V}_c = V_f e^{j120^\circ}$		"sequenza positiva"
$\bar{V}_a = V_f$	"terna inversa"	
$\bar{V}_b = V_f e^{j120^\circ}$		"sequenza inversa"
$\bar{V}_c = V_f e^{-j120^\circ}$		"sequenza negativa"

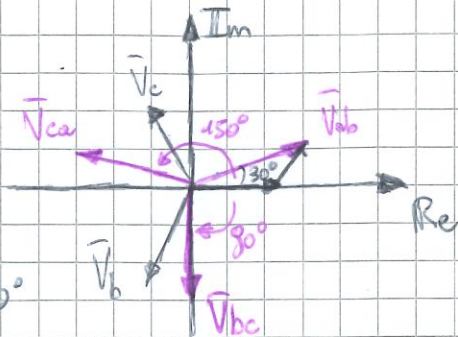


In ogni caso " $\bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c = 0$ " e basta scambiare due fili per trasformare una sequenza diretta in inversa, e viceversa. Le tensioni fra i conduttori sono dette **tensioni di linea** o **tensioni concatenate**



Vediamo un esempio con la sequenza diretta:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{ab} &= \bar{V}_a - \bar{V}_b = V_f - V_f e^{j120^\circ} = V_f - V_f \cos 120^\circ + j V_f \sin 120^\circ \\ &= V_f + \frac{V_f}{2} + j \frac{V_f}{2} \sqrt{3} = \left( \frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) V_f = \\ &= \frac{V_f}{2} \sqrt{3+3} e^{j \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{3} e^{j30^\circ} = \sqrt{3} V_f e^{j30^\circ}\end{aligned}$$



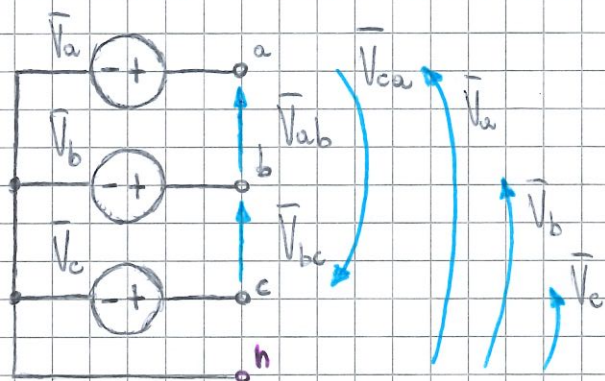
$$\bar{V}_{bc} = \dots = \sqrt{3} V_f e^{j30^\circ}; \quad \bar{V}_{ca} = \dots = \sqrt{3} V_f e^{j150^\circ}$$

Anche le tensioni concatenate sono sfasate di  $120^\circ$ ;

hanno la stessa sequenza di quelle di fase e modulo  $\Rightarrow$

$$V_l = \sqrt{3} V_f$$

## GENERATORE TRIFASE SIMMETRICO DI TENSIONE, CON NEUTRO (4 conduttori)



Questo generatore rende accessibile il centro-stella all'esterno, attraverso un conduttore detto **neutro** (n), cosicché sia disponibile la tensione di fase oltre a quella concatenata

## DISTRIBUZIONE IN BASSA TENSIONE IN ITALIA

Attualmente i valori efficaci nominali di bassa tensione sono

- $V_l = 400 \text{ V}$  (tensione di linea/concatenata)
- $V_f = 230 \text{ V} \left( = \frac{V_l}{\sqrt{3}} \right)$  (tensione di fase)

In valore efficace, alla frequenza di  $f = 50 \text{ Hz}$  con una soglia di tolleranza tipica del  $\pm 5\%$

## CARICHI TRIFASE

Vediamo i sistemi stella-triangolo con tot. carichi: ( $\bar{Z}_A = \bar{Z}_B = \bar{Z}_C \Rightarrow$  carico EQUILIBRATO)

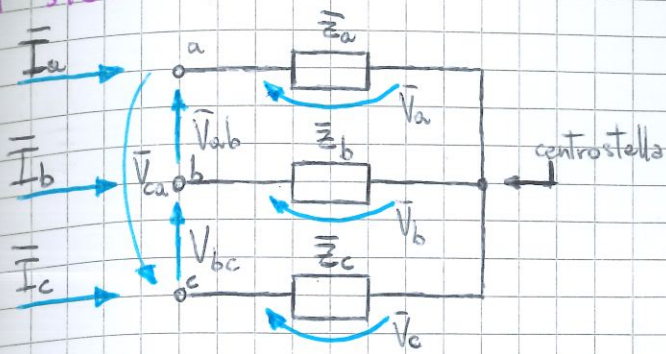
l'equivalenza Y- $\Delta$  impone che, a parità, un carico Y è uguale a un carico  $\Delta$  se:

$$\bar{Z}_Y = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3}$$

$$\bar{Z}_\Delta = 3 \bar{Z}_Y$$



## A STELLA (Y)

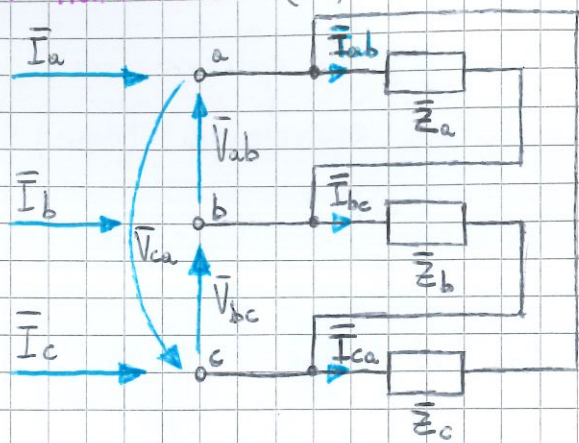


$\bar{V}_a, \bar{V}_b, \bar{V}_c$  TENSIONI DI FASE

$\bar{V}_{ab}, \bar{V}_{bc}, \bar{V}_{ca}$  TENSIONI DI LINEA

$\bar{I}_a, \bar{I}_b, \bar{I}_c$  CORRENTI DI LINEA

## A TRIANGOLO ( $\Delta$ )



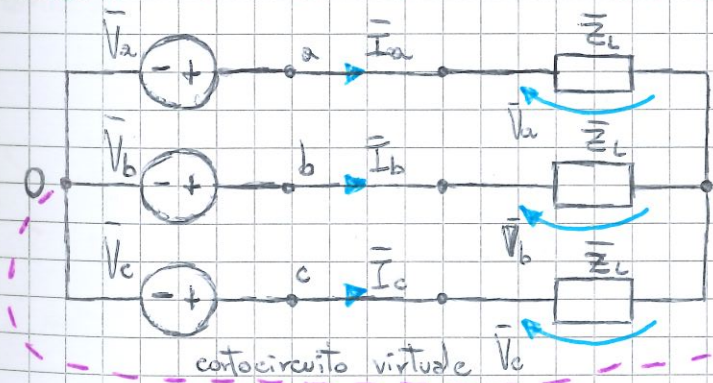
$\bar{V}_{ab}, \bar{V}_{bc}, \bar{V}_{ca}$  TENSIONI DI LINEA

$\bar{I}_a, \bar{I}_b, \bar{I}_c$  CORRENTI DI LINEA

$\bar{I}_{ab}, \bar{I}_{bc}, \bar{I}_{ca}$  CORRENTI DI FASE

La differenza nelle due diverse conformazioni si riscontra in modo facile: le correnti nelle impedenze (Y) coincidono con le correnti di linea mentre, allo stesso tempo, le tensioni sulle impedenze ( $\Delta$ ) coincidono con le tensioni di linea.

## CIRCUITI TRIFASE SIMMETRICI ED EQUILIBRATI



Troviamo la tensione ai capi del circuito  $V_{00'}$  con generatore simmetrico ad un carico equilibrato in circuito a (Y). Troveremo un corto circuito virtuale, perché:

$$\bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c = 0 \Rightarrow \bar{V}_{00'} = \frac{\frac{\bar{V}_a}{\bar{Z}_L} + \frac{\bar{V}_b}{\bar{Z}_L} + \frac{\bar{V}_c}{\bar{Z}_L}}{\frac{1}{\bar{Z}_L} + \frac{1}{\bar{Z}_L} + \frac{1}{\bar{Z}_L}} = \frac{\bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c}{3} = 0$$

Ne deriva così una terza simmetrica di correnti, in sequenza con le tensioni, con sfasamenti a  $120^\circ$ . Anche se si collegasse un conduttore di **neutro** non cambierebbe nulla poiché si cortocircuiterebbe un percorso già cortocircuitato.

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_a}{\bar{Z}_L}; \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_b}{\bar{Z}_L}; \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_c}{\bar{Z}_L}$$

$$|\bar{I}_a| = |\bar{I}_b| = |\bar{I}_c| \Rightarrow \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$



Ogni fase funziona per conto proprio, senza interazioni con le altre e ciò suggerisce di estrarre un

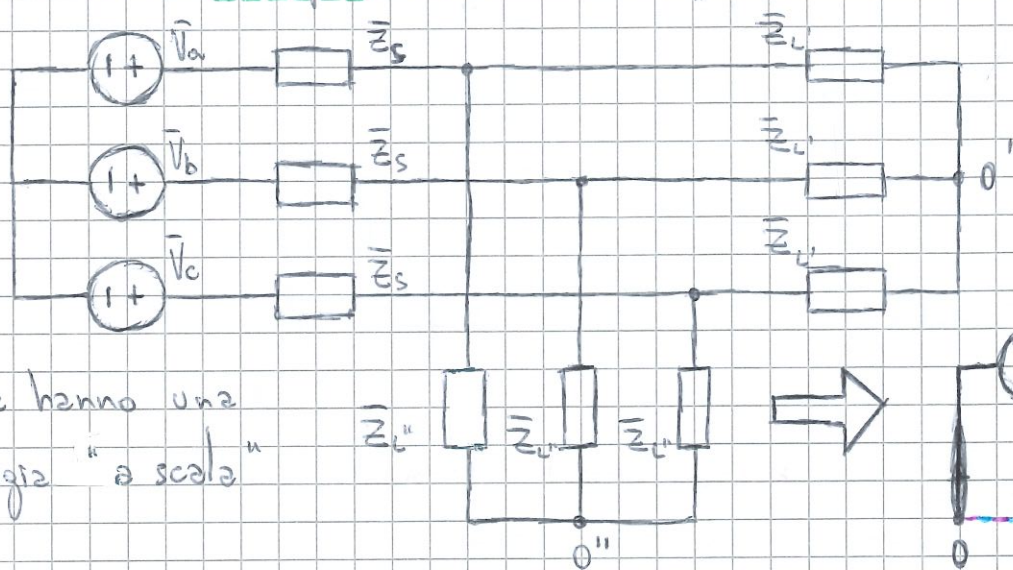
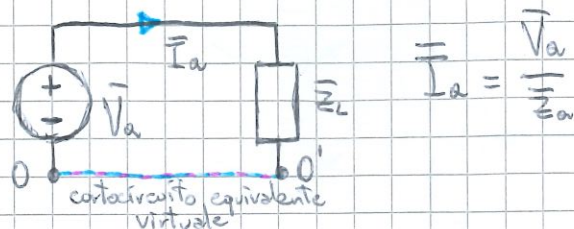
**circuito monofase equivalente (cme):**

Risolvendo il cme(a) otteniamo le grandezze per la fase "a". Lo stesso

procedimento può essere seguito per "b" e "c", più facilmente si deduce però

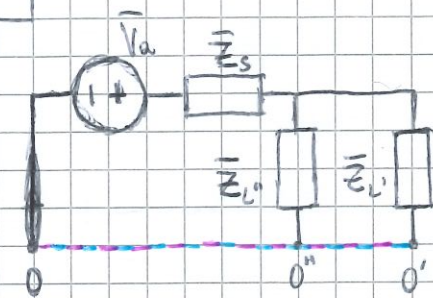
⇒ Qualunque sia il numero di centri-stella, questa proprietà continua a valere! Tutti i centri-stella saranno equipotenziali in tale sistema

Vediamo come esempio due carichi in // trifase:



Il perché del  
PARALLELO TRIFASE  
è visivo ( $Z_L // Z_L // Z_L$ )

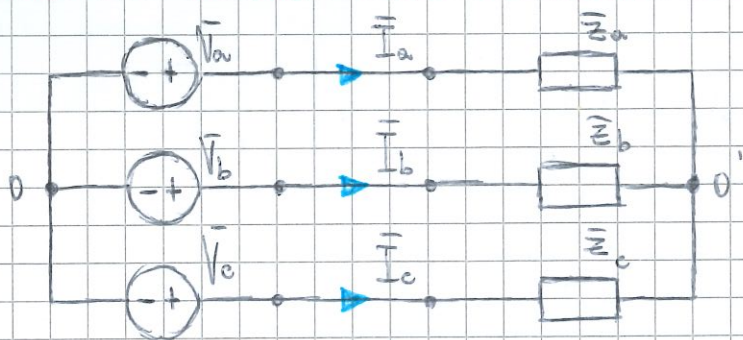
I cme hanno una  
tipologia "a scala"



## CIRCUITI TRIFASE CON CARICHI NON EQUILIBRATI (squilibrati)

Sia  $V_a, V_b, V_c$  una terna  
simmetrica e sia che i  
carichi:  $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$

Allora avremo



$$\bar{V}_{00'} = \frac{\frac{\bar{V}_a}{\bar{Z}_a} + \frac{\bar{V}_b}{\bar{Z}_b} + \frac{\bar{V}_c}{\bar{Z}_c}}{\frac{1}{\bar{Z}_a} + \frac{1}{\bar{Z}_b} + \frac{1}{\bar{Z}_c}} \neq 0 \Rightarrow \bar{I}_a = \frac{\bar{V}_a - \bar{V}_{00'}}{\bar{Z}_a}; \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_b - \bar{V}_{00'}}{\bar{Z}_b}; \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_c - \bar{V}_{00'}}{\bar{Z}_c}$$

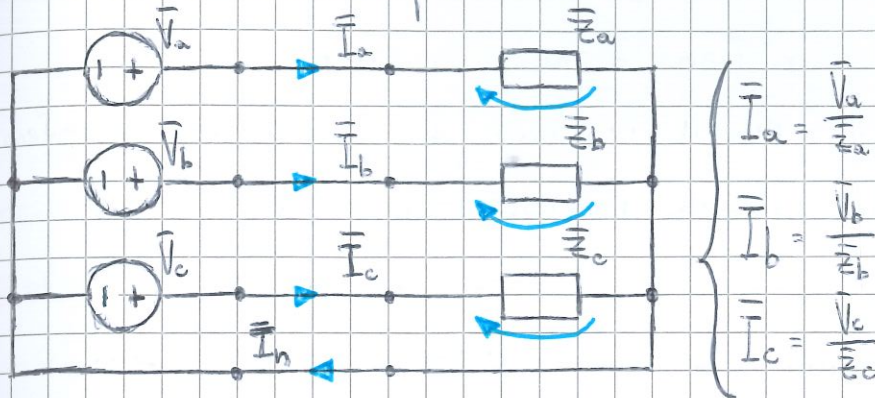
in generale avremo  $\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$  ma  $|\bar{I}_a| \neq |\bar{I}_b| \neq |\bar{I}_c|$   
poiché è una terna non simmetrica di correnti con sfasamenti  $\neq 120^\circ$



## CIRCUITI TRIFASE CON NEUTRO

- Caso simmetrico ed equilibrato: il neutro non ha alcun effetto infatti  $\exists$  già un cortocircuito virtuale perciò la corrente è nulla  $\Rightarrow I_n = 0$

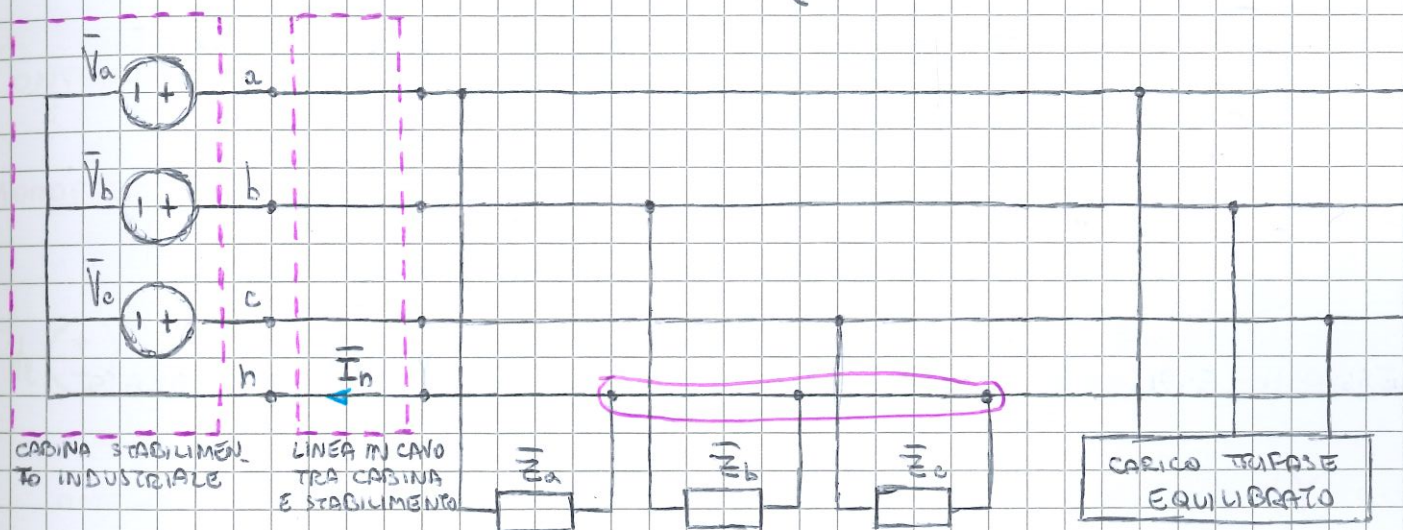
- Per circuiti a carichi squilibrati:



In generale  $|\bar{I}_a| \neq |\bar{I}_b| \neq |\bar{I}_c|$   
con sfasamenti  $\neq 120^\circ$ .

Il **neutro** è percorso dalla somma delle correnti di linea

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = \bar{I}_n$$



- Se distribuisco i carichi monofasi equamente nelle tre fasi, ovvero  $\bar{Z}_a \equiv \bar{Z}_b \equiv \bar{Z}_c$ , posso avere correnti  $\bar{I}_n$  a monte più piccole  $\Rightarrow$  dimensionamento meno oneroso dal punto di vista economico

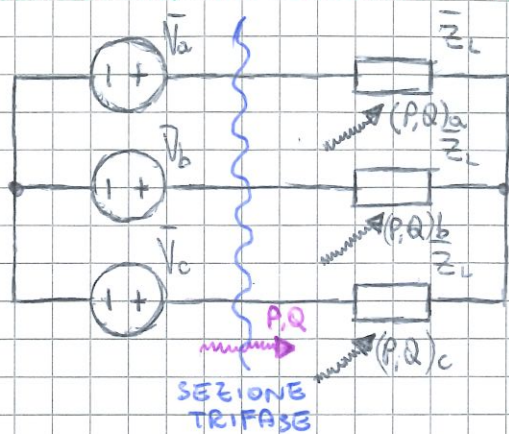
- Lo stesso principio è adottato dall'ente distributore di energia: distribuire le utenze domestiche di un quartiere equamente sulle tre fasi in uscita dalla cabina

Finiamo con le sole formule di trasformazione da corrente di linea a corrente di fase in un circuito ( $\Delta$ ) equilibrato:

$$\frac{I_l}{I_f} = \sqrt{3} \Rightarrow I_l = \sqrt{3} I_f$$



## POTENZE IN UN SISTEMA TRIFASE SIMMETRICO ED EQUILIBRATO



Identifichiamo una "SEZIONE TRIFASE" che tagli i tre conduttori della linea. Definiamo la **potenza attiva trifase (P)** e la **potenza reattiva trifase (Q)** in transito nella sezione trifase.

Per il teorema di Boucherot le potenze trifase sono le somme delle potenze di ogni fase. Ma in un sistema simmetrico ed equilibrato  $P_a = P_b = P_c$  ;  $Q_a = Q_b = Q_c$  infatti le tre fasi si comportano nello stesso modo: i moduli delle tensioni, i moduli delle correnti, gli sfasamenti tra tensione e corrente sono uguali.

$$P = P_a + P_b + P_c$$

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c$$

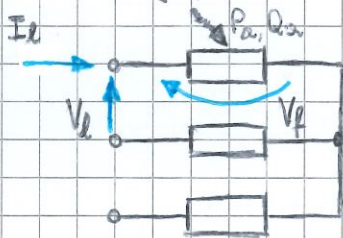


$$P = 3 P_a$$

$$Q = 3 Q_a$$

## ESPRESSIONI ESPLICITE DELLE POTENZE TRIFASE IN Y o Δ EQUILIBRATO

• STELLA (Y)



sfruttando le formule dei capitoli precedenti otteniamo

$$P = 3 V_f I_f \cos \varphi = \sqrt{3} V_l I_l \cos \varphi$$

$$Q = 3 V_f I_f \sin \varphi = \sqrt{3} V_l I_l \sin \varphi$$

• TRIANGOLO (Δ)



sfruttando tutte le formule precedenti otteniamo

$$P = 3 V_l I_f \cos \varphi = \sqrt{3} V_l I_l \cos \varphi$$

$$Q = 3 V_l I_f \sin \varphi = \sqrt{3} V_l I_l \sin \varphi$$

Oss (!):

$$P = \sqrt{3} V_l I_l \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3} V_l I_l \sin \varphi$$

Le formule sono le stesse per Y e Δ quindi conviene usare queste e impararle



## POTENZA APPARENTE TRIFASE

Si definisce potenza complessa trifase

$$\bar{S} = P + jQ = \sqrt{3} V_L I_L (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

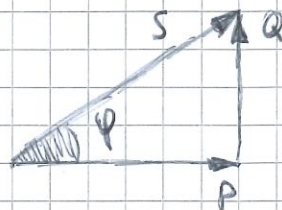
Il modulo di  $\bar{S}$  è la POTENZA APPARENTE trifase

$$S = |\bar{S}| = \sqrt{3} V_L I_L$$

Vediamo il triangolo delle potenze e stabiliamo

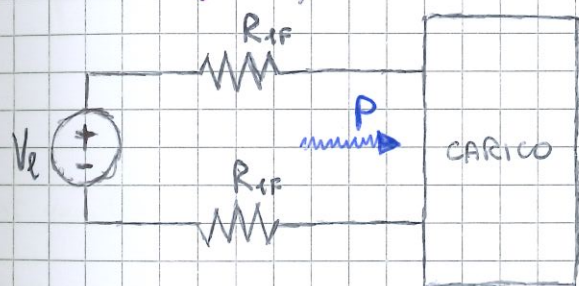
il FATTORE DI POTENZA

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

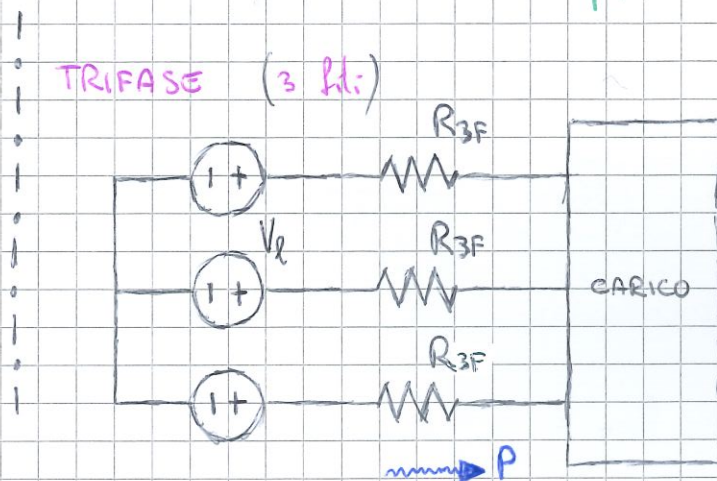


## CONVENIENZA ECONOMICA DI UN SISTEMA TRIFASE (sim. ed eq.)

MONOFASE (2 fili)



TRIFASE (3 fili)



Supponiamo uguali:

- la potenza attiva  $P$  assorbita dal carico
- la potenza attiva  $P_d$  dissipata dalla linea  $\Leftrightarrow$  uguale rendimento di trasmissione!
- la tensione di linea  $V_L$ , ovvero la coppia di conduttori  $\Leftrightarrow$  uguali costi di isolamento!
- il fattore di potenza del carico ( $\cos \varphi$ )  $\Leftrightarrow$  stesso carico!
- le lunghezze delle linee "L"

Perché il sistema trifase è più economico?



• Caso monofase:

$$P = V_L I_L \cos \varphi \Rightarrow I_L = \frac{P}{V_L \cos \varphi} \quad \text{corrente di linea (modulo!)} \quad \text{perdite nella linea}$$

$$P_{1F} = \underset{2 \text{ fili}}{2} R_{1F} I_L^2 = 2 R_{1F} \frac{P^2}{V_L^2 \cos^2 \varphi}$$

• Carico trifase:

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \Rightarrow I_L = \frac{P}{\sqrt{3} V_L \cos \varphi} \quad \text{corrente di linea (modulo!)} \quad \text{perdite nella linea}$$

$$P_{3F} = \underset{3 \text{ fili}}{3} R_{3F} I_L^2 = 3 R_{3F} \frac{P^2}{3 V_L^2 \cos^2 \varphi} = R_{3F} \frac{P^2}{V_L^2 \cos^2 \varphi}$$

Imponendo l'uguaglianza " $P_{1F} = P_{3F}$ " otteniamo " $R_{3F} = 2 R_{1F}$ " quindi dimensioniamo la linea trifase con fili che hanno resistenza doppia rispetto a quelli che hanno linea monofase: ( $A$  = sezione filo)

$$R_{3F} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A_{3F}}$$

$$R_{1F} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A_{1F}}$$

Quindi otteniamo

$$R_{3F} = 2 R_{1F} \Rightarrow A_{3F} = \frac{A_{1F}}{2}$$

e la sezione trifase è la metà della sezione della linea monofase.  
Volumi di materiale:

$$V_{1F} = 2 L A_{1F}$$

$$V_{3F} = 3 L A_{3F} = 3 L A_{1F}/2$$

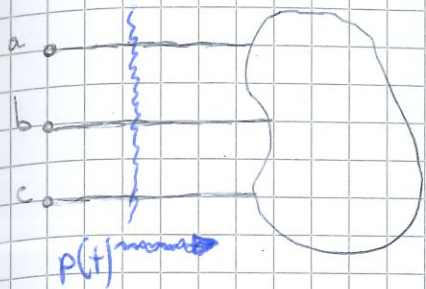
$$\Rightarrow \frac{V_{3F}}{V_{1F}} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow$$

RISPARMIO COSTI  
IMPIANTO : 25%

Il volume di rame (o alluminio) richiesto dalla linea 3F è il 75% di quello richiesto dalla linea 1F



## POTENZA Istantanea NEI SISTEMI TRIFASE (sim. ed eq.)



Calcoliamo la **potenza istantanea** ( $p(t)$ ) entrante nel tripolo (attraversante la sezione trifase mostrata in figura)

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)$$

Otteniamo quindi la seguente, poi spostiamo di  $120^\circ$  per le altre

$$p_a(t) = p_a [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_{Ia})] - Q_a \sin(2\omega t + 2\varphi_{Ia})$$

$$\Rightarrow p_{b,c}(t) = p_a [1 + \cos(2\omega t + (2\varphi_{Ia} \pm 120^\circ \cdot 2))] - Q_a \sin(2\omega t + (2\varphi_{Ia} \pm 120^\circ \cdot 2))$$

si ottiene quindi

$$p(t) = 3p_a + p_a [\cos(2\omega t + 2\varphi_{Ia}) + \cos(2\omega t + 2\varphi_{Ia} + 120^\circ) + \cos(2\omega t + 2\varphi_{Ia} - 120^\circ)] + \\ - Q_a [\sin(2\omega t + 2\varphi_{Ia}) + \sin(2\omega t + 2\varphi_{Ia} + 120^\circ) + \sin(2\omega t + 2\varphi_{Ia} - 120^\circ)]$$

Si verifica agevolmente che sono nulli poiché si tratta di tre sinusoidi con uguali ampiezze e sfasate di  $120^\circ$ ! Quindi si ha

$$p(t) = 3p_a \Rightarrow p(t) = P$$

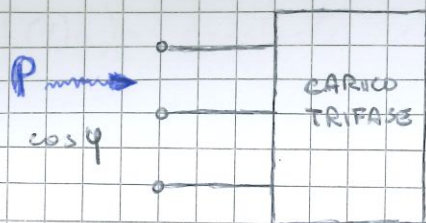
In un sistema trifase simmetrico ed equilibrato, la potenza istantanea coincide con la potenza media (pot. attiva) ed è costante nel tempo.

Questo è il motivo per cui le macchine elettriche trifase { generatori elettrici  
motori elettrici sono tecnicamente superiori alle macchine monofase:

la potenza istantanea è costante nel tempo, invece che pulsante con frequenza  $2f$  (pulsazione  $2\omega$ ). Nei motori elettrici ciò elimina le vibrazioni trasmesse all'intero motore.



# RIPASAMENTO SISTEMI TRIFASE



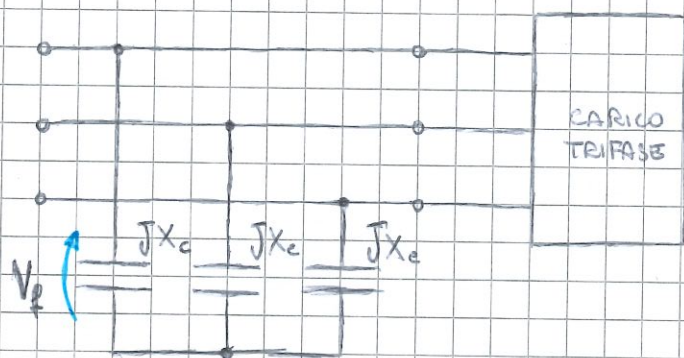
Abbiamo un carico trifase con potenza attiva trifase "P" e fattore di potenza "cos φ".  
Vogliamo rifasarlo portandolo a  $\cos \hat{\varphi} > \cos \varphi$

Potenza reattiva capacitiva per il rifasamento (come sul monofase) che metterò a seguire

$$Q_c = P [\tan \hat{\varphi} - \tan \varphi]$$

si possono avere batterie di condensatori a Y o a Δ:

## • STELLA (Y)

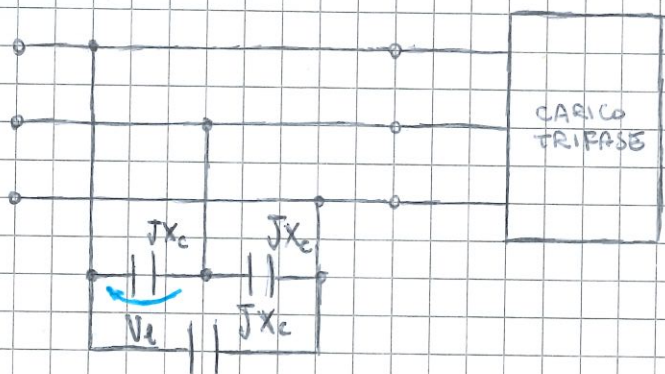


$$Q_c = 3 \frac{V_f^2}{X_c} \Rightarrow X_c = 3 \frac{V_f^2}{Q_c}$$

$$X_c = -\frac{1}{\omega C_Y}$$

$$\Rightarrow C_Y = -\frac{1}{\omega X_c} = -\frac{Q_c}{3 \omega V_f^2}$$

## • TRIANGOLO (Δ)



$$Q_c = \frac{3 V_c^2}{X_c} \Rightarrow X_c = \frac{3 V_c^2}{Q_c}$$

$$X_c = -\frac{1}{\omega C_\Delta}$$

$$\Rightarrow C_\Delta = -\frac{1}{\omega X_c} = -\frac{Q_c}{3 \omega V_c^2}$$

Quale soluzione è migliore?

$$\frac{C_Y}{C_\Delta} = \frac{V_c^2}{V_f^2} = \sqrt{3}^2 = 3 \Rightarrow C_\Delta = \frac{C_Y}{3}$$

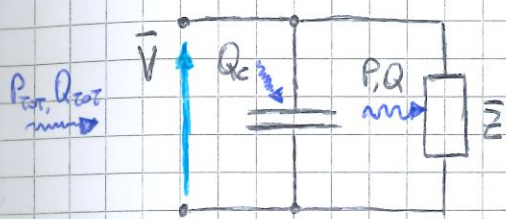
Con condensatori a Δ basta una capacità minore tuttavia devono essere dimensionati per una tensione di isolamento maggiore  $V_c = \sqrt{3} V_f$



SISTEMI BT (bassa tensione): più economica la soluzione A  
 SISTEMI MT (media tensione): più economica la soluzione Y

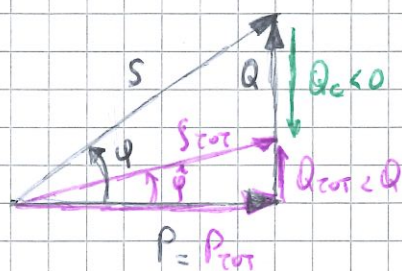
## RIFASAMENTO CARICHI INDUSTRIALI IN MONOFASE

Ragioniamo a partire di effetto utile (cioè potenza attiva  $P$ ). Per aumentare il fattore di potenza, poniamo in parallelo al carico un condensatore che ha potenza reattiva entrante negativa  $Q_c < 0$ . In altre parole, generiamo localmente, vicino al carico, la potenza reattiva di cui questo ha bisogno, senza scambiarla con la sorgente attraverso la linea.



Per Pochenti:

$$\begin{cases} P_{tot} = P \\ Q_{tot} = Q + Q_c \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \hat{\phi} &< \phi \\ \cos \hat{\phi} &> \cos \phi \end{aligned}$$

Vediamo ora come esempio, un tipico problema di rifasamento:

DATI: triangolo delle potenze di carico ( $P, \cos \phi$ )  
 nuovo fattore di potenza desiderato  $\cos \hat{\phi}$   
 valore efficace della tensione al carico  $V$   
 frequenza " $f$ "

DA TROVARE: capacità " $C$ " del condensatore di rifasamento

$$Q_c = Q_{tot} - Q$$

$$Q_{tot} = P \tan \hat{\phi} \Rightarrow Q_c = P [\tan \hat{\phi} - \tan \phi]$$

$$Q = P \tan \phi$$

$$Q_c = \frac{V^2}{X_c} = \frac{V^2}{(-\frac{1}{2\pi f C})} = -2\pi f C V^2 \Rightarrow C = \frac{-Q_c}{2\pi f V^2}$$