

FUNZIONI

Funzioni continue

DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA IN UN PUNTO

Sia $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ una **funzione reale di variabile reale**, e sia $x_0 \in Dom(f)$ un **punto di accumulazione** per il suo **dominio**. Diciamo che f è una funzione continua nel punto x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (\bullet)$$

Nel caso di un punto $x_0 \in Dom(f)$ che sia un **punto isolato** per il dominio diciamo che la funzione f è continua in x_0 a prescindere.

A parole, una funzione è continua in un punto di accumulazione del suo dominio se il limite per x tendente ad x_0 di $f(x)$ coincide con la valutazione della funzione nel punto, ossia con $f(x_0)$.

Nel caso dei punti isolati del dominio, per i quali evidentemente non è possibile considerare alcun limite, stabiliamo che la funzione è continua senza bisogno di alcuna ulteriore condizione

DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI FUNZIONE CONTINUA IN UN PUNTO

Tenendo a mente le definizioni di **limite sinistro e destro**, possiamo esprimere la condizione (\bullet) in una forma del tutto equivalente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

A parole, una funzione è continua in un punto di accumulazione se:

- i due limiti sinistro e destro esistono finiti ed hanno lo stesso valore;
- il comune valore dei due limiti sinistro e destro coincide con la valutazione della funzione nel punto.

DEFINIZIONE EQUIVALENTE DI F. CONTINUA IN UN PUNTO CON DELTA ED EPSILON

A prescindere che $x_0 \in \text{Dom}(f)$ sia un punto di accumulazione o un punto isolato, diciamo che f è una funzione continua nel punto x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ per cui se } x \in \text{Dom}(f) \text{ è tale che } |x - x_0| < \delta$$

$$\text{allora risulta che } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Vi facciamo notare che, nel caso di un punto isolato, la condizione viene soddisfatta solamente considerando il punto $x = x_0$. Anticipiamo inoltre che questa definizione è la meno pratica e più teorica, ed è quella su cui dobbiamo basare momentaneamente il nostro studio.

LE SEGUENTI FUNZIONI ELEMENTARI

- POTENZE (es: $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, ...)
- FUNZIONI ESPONENZIALI (es: $y = 2^x$, $y = e^x$, ...)
- FUNZIONI LOGARITMICHE (es: $y = \log_3 x$, $y = \ln x$, ...)
- FUNZIONI GONIOMETRICHE (es: $y = \sin x$, $y = \cos x$, ...)

SONO CONTINUE IN TUTTI I PUNTI DEL LORO INSIEME DI DEFINIZIONE.

Tutte le funzioni che si possono ottenere con somma, prodotto, quoziente e composizioni da funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione. (es. $y = \sin x \cdot \cos x$)

Calcolare il limite in un punto di una funzione continua corrisponde a sostituire x_0 all'interno della funzione e fare i conti.

Punti di discontinuità

1) PRIMA SPECIE (A SALTO)

A) Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per $\text{Dom}(f)$ e supponiamo che f sia definita in un intorno circolare, eventualmente bucato, di x_0 . Diciamo che la funzione f ha in x_0 una **discontinuità di prima specie** se esistono finiti i due **limiti sinistro e destro**, ma non sono uguali:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ entrambi finiti}$$

2) SECONDA SPECIE

A) Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per $Dom(f)$ e supponiamo che f sia definita in un intorno circolare, eventualmente bucato, di x_0 . Diciamo che la funzione f ha in x_0 un **punto di discontinuità di seconda specie** se almeno uno dei due limiti, sinistro o destro, è infinito oppure non esiste.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \begin{cases} \neq \\ = \infty \end{cases} \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \begin{cases} \neq \\ = \infty \end{cases}$$

3) TERZA SPECIE O ELIMINABILI

A) Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per $Dom(f)$ e supponiamo che f sia definita in un intorno circolare, eventualmente bucato, di x_0 . Diciamo che la funzione f ha in x_0 un **punto di discontinuità di terza specie** se i due limiti sinistro e destro esistono finiti e sono uguali tra loro, ma non coincidono con la valutazione della funzione nel punto (a patto che $x_0 \in Dom(f)$).

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{esistono finiti e } \neq f(x_0)$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{esistono finiti e } x_0 \notin Dom(f)$$