

# Appunti sullo Spazio-Sottospazio Vettoriale, Dipendenza Lineari, Basi,

...

## Fonti

- YouMath: [MATRICI E VETTORI](#)
- Andrea Minini: [Lo spazio vettoriale](#)

# SPAZI VETTORIALI

Per parlare di spazio vettoriale bisogna introdurre il concetto di campo

intuitivamente, per campo si intende un insieme all'interno del quale possiamo fare le 4 operazioni, ovvero la somma, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione

sostanzialmente si riducono a 2: la somma algebrica e la moltiplicazione, visto che la divisione la possiamo pensare come una moltiplicazione per il reciproco

Un campo è un insieme  $\mathbb{K}$  in cui sono definite due operazioni interne (somma e prodotto) che godono delle seguenti proprietà:

c1.  $\forall x, y, z \in \mathbb{K} \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELLA SOMMA

c2.  $\forall x, y \in \mathbb{K} \quad x+y = y+x$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELLA SOMMA

c3.  $\exists 0 \in \mathbb{K} \quad x+0 = 0+x = x \quad \forall x \in \mathbb{K}$

ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA

c4.  $\forall x \in \mathbb{K} \exists y \in \mathbb{K} \quad x+y = 0$

ESISTENZA DELL'OPPOSTO

c5.  $\forall x, y, z \in \mathbb{K} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DEL PRODOTTO

c6.  $\forall x, y \in \mathbb{K} \quad x \cdot y = y \cdot x$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA DEL PRODOTTO

c7.  $\exists 1 \in \mathbb{K} \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{K}$

ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO

c8.  $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{K} \quad x \cdot y = 1$

ESISTENZA DELL'INVERSO

c9.  $\forall x, y, z \in \mathbb{K} \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA

Uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$  è un insieme  $V$  in cui sono definite

- un'operazione interna tra elementi di  $V$ , detta somma
  - un'operazione di prodotto che associa ad ogni coppia formata da un elemento di  $V$  e da un elemento di  $\mathbb{K}$ , un (unico) elemento di  $V$
- vettore                      scalare

che devono rispettare le seguenti proprietà:



$$SV1. \forall u, v, w \in V \quad (u+v)+w = u+(v+w)$$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA  
DELLA SOMMA

$$SV2. \exists 0 \in V \text{ TALE CHE } 0+v = v+0 = v \quad \forall v \in V$$

ESISTENZA DELL'ELEMENTO  
NEUTRO DELLA SOMMA  
( $0 = \text{vettore nullo}$ )

$$SV3. \forall v \in V \exists w \in V \text{ TALE CHE } v+w = 0$$

ESISTENZA DELL'OPPOSTO

$$SV4. \forall v, w \in V \quad v+w = w+v$$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA  
DELLA SOMMA

$$SV5. \forall \lambda, \mu \in K \quad \forall v \in V \quad (\lambda(\mu v)) = (\lambda\mu)v$$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA  
DEL PRODOTTO FRA SCALARI  
E VETTORE  
oppure  
COMPATIBILITÀ

$$SV6. \forall \lambda, \mu \in K \quad \forall v \in V \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA  
RISPETTO ALLA SOMMA  
TRA SCALARI

$$SV7. \forall \lambda \in K \quad \forall v, w \in V \quad \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA  
RISPETTO ALLA SOMMA  
DI VETTORI

$$SV8. \forall v \in V \quad 1v = v$$

ESISTENZA DELL'ELEMENTO  
NEUTRO RISPETTO AL PRODOTTO  
( $1 \in K$ )

L'insieme  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$  di tutte le  $n$ -uple ordinate di numeri reali con le due operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare così definite:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

È uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

In particolare:

- il vettore nullo di cui si parla in SV2 è  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ ;
- l'opposto di  $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  di cui si parla in SV3 è  $-v = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ ;
- l'insieme dei vettori nel piano e dei vettori nello spazio possono essere identificati, rispettivamente, con  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

L'insieme  $M_{n \times n}$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{R}$  con le due operazioni di somma tra matrici e moltiplicazione di un numero reale per una matrice è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

In particolare:

- lo  $0$  di cui si parla in SV2 è la matrice nulla, quella con tutti i coefficienti uguali a zero;
- l'opposto di cui si parla in SV3 è la matrice avente tutti gli elementi cambiati di segno.



L'insieme  $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$  dei polinomi a coefficienti reali con le due operazioni di somma tra polinomi e moltiplicazione di un numero reale (scalare) per un polinomio è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

In particolare:

- lo  $0$  di cui si parla in  $SV2$  è il polinomio nullo,  $p(x) = 0$ , avente tutti i coefficienti nulli;
- l'opposto di cui si parla in  $SV3$  è il polinomio avente tutti i coefficienti cambiati di segno.

## SOTTOSPAZI VETTORIALI

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$ .

Un sottoinsieme  $W \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  se valgono le seguenti proprietà:

$$S1 \quad \forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$$

$$S2 \quad \forall \lambda \in K, \forall w \in W \quad \lambda w \in W$$

Quindi si tratta di un sottoinsieme chiuso rispetto alle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare.

Ogni sottospazio vettoriale è a sua volta uno spazio vettoriale con le stesse operazioni di somma e prodotto di  $V$  e valgono quindi tutte le corrispondenti proprietà: in particolare  $W$  contiene lo  $0$  e l'opposto di ogni suo elemento.

se in un certo sottoinsieme non c'è il vettore nullo, possiamo immediatamente escludere che si tratta di un sottospazio

## Esempio

Stabilire se  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - 3x = 0\}$  è un sottospazio di  $V = \mathbb{R}^2$

Prima di procedere, notiamo preliminarmente che il sottoinsieme  $W$  è dato dai vettori del piano che godono di questa caratteristica:  $2y - 3x = 0$

Quello che dobbiamo chiederci per verificare se questo sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  è anche un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$  è se è chiuso rispetto all'operazione di somma tra vettori e se è chiuso rispetto alla moltiplicazione per lo scalare.

Considero 2 generici vettori  $w_1 = (x_1, y_1) \in W$  e  $w_2 = (x_2, y_2) \in W$ :

$$w_1 + w_2 \in W?$$

$$w_1 + w_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ora, per verificare se questo nuovo vettore appartiene a  $W$ , dobbiamo controllare se è vero che il doppio della sua seconda componente meno il triplo della sua prima componente dà come risultato zero.

$$2(y_1 + y_2) - 3(x_1 + x_2) = 2y_1 + 2y_2 - 3x_1 - 3x_2 = \underbrace{2y_1 - 3x_1}_{=0 \text{ perché } w_1 \in W} + \underbrace{2y_2 - 3x_2}_{=0 \text{ perché } w_2 \in W} = 0 \quad \leadsto \text{S1 verificata}$$



Considero un generico vettore  $w_1 = (x_1, y_1) \in W$  e un generico  $\lambda \in \mathbb{R}$ :  $\lambda w_1 \in W$ ?

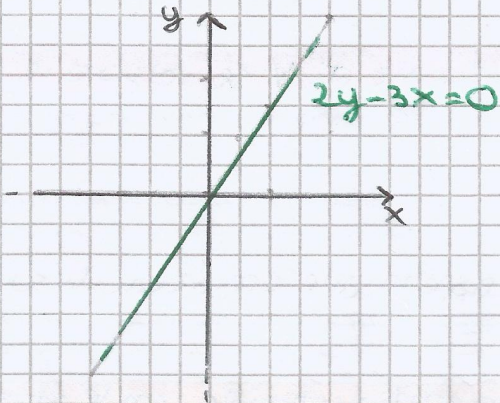
$$\lambda w_1 = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

Per verificare se questo vettore sta in  $W$ , devo al solito vedere se il doppio della seconda componente meno il triplo della prima componente dà come risultato zero.

$$2 \cdot \lambda y_1 - 3 \cdot \lambda x_1 = \lambda(2y_1 - 3x_1) = 0 \leadsto \text{S2 verificata}$$

$$= 0 \text{ perché } w_1 \in W$$

Dunque, essendo  $W \subseteq \mathbb{R}^2$  ed essendo S1 e S2 verificate, possiamo concludere che  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ .



Il nostro sottospazio  $W$  è dato dai vettori che giacciono su questa retta.

↓  
infatti  $2y - 3x = 0$  è l'equazione di una retta scritta in forma implicita

Ed è anche facile convincersi che formano un sottospazio perché se sommo due vettori che giacciono su questa retta, quindi due vettori paralleli, il vettore somma giace ancora su questa retta, ed è anche chiaro che se prendo un vettore che sta su questa retta e lo moltiplico per uno scalare, il risultato che ottengo è ancora un vettore che sta su questa retta.

## ✓ Esempio

Stabilire se  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - 3x = 1\}$  è un sottospazio vettoriale di  $V = \mathbb{R}^2$

Questa volta facciamo il test preliminare consistente nel controllare se il vettore nullo appartiene al sottoinsieme oppure no.

$(0, 0) \in W$ ? No, visto che  $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \neq 1 \leadsto W$  non contiene il vettore nullo, dunque non può essere un sottospazio

Alternativamente, avremmo potuto procedere come prima e verificare se valgono le proprietà S1 e S2

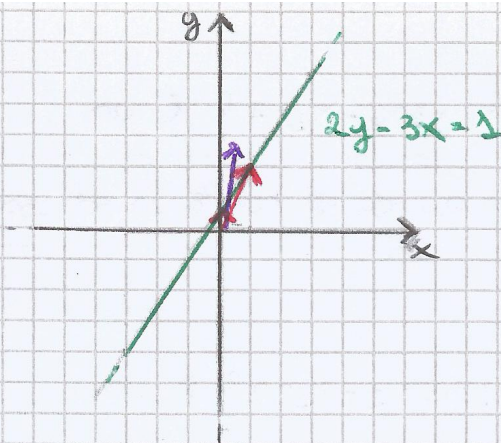
Considero 2 generici vettori  $w_1 = (x_1, y_1) \in W$  e  $w_2 = (x_2, y_2) \in W$ :  $w_1 + w_2 \in W$ ?

$$w_1 + w_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$2(y_1 + y_2) - 3(x_1 + x_2) = 2y_1 + 2y_2 - 3x_1 - 3x_2 = \underbrace{2y_1 - 3x_1}_{=1 \text{ perché } w_1 \in W} + \underbrace{2y_2 - 3x_2}_{=1 \text{ perché } w_2 \in W} = 2 \leadsto \text{S2 non è verificata}$$

↓  
non è un sottospazio





Anche a partire dal pratico possiamo convincerci che le osservazioni fatte prima sono corrette, e cioè che il vettore nullo non appartiene al nostro ~~spazio~~ sottoinsieme



infatti l'origine non giace su questa retta

Possiamo anche convincerci che se sommiamo due vettori che abitano in  $W$  (quelli in rosso), il vettore risultante non è più un vettore come quei due, cioè che termina sulla retta

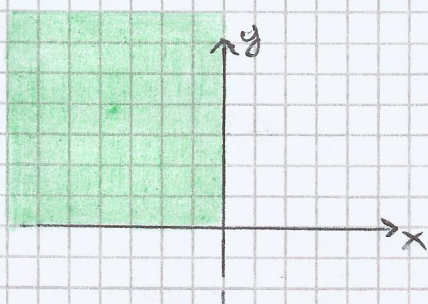
## ~ Esempio

Stabilire se  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\}$  è un sottospazio vettoriale di  $V = \mathbb{R}^2$

Nel sottoinsieme  $W$  ci abitano i vettori di  $\mathbb{R}^2$  che hanno la prima componente minore o uguale di zero e la seconda componente maggiore o uguale di zero



Sono i vettori che abitano nel secondo quadrante del piano cartesiano



-  $(0,0) \in W$ ? Sì, quindi procedo con le verifiche

- La somma di 2 qualsiasi elementi di  $W$  sta ancora in  $W$ ? Sì, dunque **S1** è verificata

- Se moltiplico un elemento di  $W$  per un generico numero  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il risultato sta ancora in  $W$ ? No, è vero solo se  $\alpha \geq 0$ , dunque **S2** non è verificata



Se prendo un qualunque vettore appartenente a  $W$  e lo moltiplico per un qualsiasi numero negativo, il nuovo vettore che ottengo come risultato avrà le componenti cambiate di segno a quelle del vettore di partenza



$W$  non è un sottospazio vettoriale

Sì può dimostrare che gli unici sottospazi di  $\mathbb{R}^2$  sono:

- $\{0\}$  } sottospazi vettoriali
- $\mathbb{R}^2$  } impropri o banali
- rette passanti per l'origine



### NE esempio

Stabilire se  $W = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$

$(0,0,0) \in W$ ? No;  $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 0 \neq 7 \rightarrow$  quindi  $W$  non è un sottospazio

### NE esempio

Stabilire se  $W = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$

$(0,0,0) \in W$ ? Sì

Considero 2 generici vettori  $w_1 = (x_1, x_2, x_3) \in W$  e  $w_2 = (y_1, y_2, y_3) \in W$ :  $w_1 + w_2 \in W$ ?

$$2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = \underbrace{2x_1 + 3x_2 - x_3}_{=0 \text{ perché } w_1 \in W} + \underbrace{2y_1 + 3y_2 - y_3}_{=0 \text{ perché } w_2 \in W} = 0 \rightarrow \text{S1 verificata}$$

Considero un generico vettore  $w_1 = (x_1, x_2, x_3) \in W$  e un generico  $\lambda \in \mathbb{R}$ :  $\lambda w_1 \in W$ ?

$$\lambda w_1 = \lambda (x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

$$2\lambda x_1 + 3\lambda x_2 - \lambda x_3 = \lambda (2x_1 + 3x_2 - x_3) = 0 \rightarrow \text{S2 verificata}$$

$= 0$  perché  $w_1 \in W$

$W$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$

Si può dimostrare che gli unici sottospazi di  $\mathbb{R}^3$  sono:

- $\{0\}$
- $\mathbb{R}^3$

sottospazi vettoriali propri e banali

- rette passanti per l'origine
- piani passanti per l'origine

### VE esempio

$V = \mathbb{R}_{\leq m}[x]$ , ovvero l'insieme dei polinomi di grado  $\leq m$ , è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}[x]$ .

Infatti se sommo 2 polinomi di grado  $\leq m$  ne ottengo un altro di grado  $\leq m$  e se moltiplico un polinomio di grado  $\leq m$  per un numero reale ottengo un polinomio di grado  $\leq m$ .

### VE esempio

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, 3 \right\}, \text{ ovvero l'insieme delle matrici triangolari superiori } 3 \times 3 \text{ è un sottospazio vettoriale di } M_{3 \times 3}$$

Infatti se sommo 2 matrici triangolari superiori  $3 \times 3$  ne ottengo una di grado dello stesso tipo e se moltiplico una matrice triangolare superiore  $3 \times 3$  per un numero reale ne



ottengo un'altra dello stesso tipo.

## VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI-INDIPENDENTI

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$  e siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  elementi di  $K$ . Si dice combinazione lineare di  $n$  vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  una qualunque somma del tipo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_n v_n \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{il risultato è ancora} \\ \text{un vettore di } V \end{array}$$

coefficienti

Si dice che i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono linearmente dipendenti se esiste una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, che dà come risultato il vettore nullo

Si dice che i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella con tutti i coefficienti nulli, ovvero se

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \text{ implica } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

### Esempio

I vettori  $v_1 = (1, 2)$  e  $v_2 = (4, 1)$  di  $\mathbb{R}^2$  sono linearmente dipendenti o indipendenti?

Per scoprirlo devo risolvere  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_1 (1, 2) + \lambda_2 (4, 1) &= (0, 0) \rightsquigarrow (\lambda_1, 2\lambda_1) + (4\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow (\lambda_1 + 4\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4\lambda_2 \\ 2(-4\lambda_2) + \lambda_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

L'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo ha tutti i coefficienti nulli. Quindi  $v_1$  e  $v_2$  sono linearmente indipendenti.

In termini geometrici...

2 vettori sono linearmente indipendenti quando non sono paralleli

2 vettori sono linearmente dipendenti quando stanno sulla stessa retta, ovvero quando  $v_1 = \lambda v_2$

### Esempio

I vettori  $v_1 = (1, 1, 3)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$  e  $v_3 = (1, 0, 2)$  sono linearmente dipendenti o indipendenti?

Per scoprirlo devo risolvere  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$



$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ 3\lambda_1 - \lambda_1 - 2\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

questo significa che il sistema ammette infinite soluzioni

Ne segue che tutte le terne  $(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_1)$  sono soluzioni e quindi, se scelgo ad esempio  $\lambda_1 = 1$ , ho che

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi i vettori  $v_1, v_2$  e  $v_3$  sono linearmente dipendenti.

Il fatto che siano linearmente dipendenti equivale a dire che uno dei 3 si può scrivere come combinazione lineare degli altri 2. Nel nostro caso ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad v_1 = 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$$

In termini geometrici questo ci dice che  $v_1, v_2$  e  $v_3$  stanno su uno stesso piano, mentre 3 vettori linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^3$  non sono coplanari.

## SPAN, INSIEMI DI GENERATORI E BASI

Dati  $n$  vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  di uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $K$  si definisce span lineare l'insieme

$$\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in K \}$$

di tutti i vettori che si possono scrivere come combinazione lineare di  $v_1, v_2, \dots, v_n$

Si può dimostrare che  $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  ed è anche chiamato il sottospazio vettoriale generato da  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . È talvolta indicato con  $L(v_1, v_2, \dots, v_n)$  o  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ .



### ~Esempio

Se  $v_1 \neq 0$  è un vettore di  $\mathbb{R}^2$ , allora  $L(v_1)$  contiene tutti i vettori del tipo  $\lambda_1 v_1$ . Si tratta quindi della retta passante per l'origine di direzione  $v_1$ .



### ~Esempio

Se  $v_1 \neq 0$  e  $v_2 \neq 0$  sono 2 vettori di  $\mathbb{R}^2$ , allora  $L(v_1, v_2)$  contiene tutti i vettori del tipo  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ . Si tratta quindi:

- dell'intero  $\mathbb{R}^2$  se i 2 vettori non sono paralleli
- della retta passante per l'origine che contiene  $v_1$  e  $v_2$  se i 2 vettori sono paralleli

↓  
in questo caso  $L(v_1, v_2) = L(v_1)$ ,  
in quanto l'altro, multiplo del precedente,  
lo possiamo ottenere come una sua combinazione

### ~Esempio

Se  $v_1 \neq 0$  è un vettore di  $\mathbb{R}^3$ , allora  $L(v_1)$  contiene tutti i vettori del tipo  $\lambda_1 v_1$ . Si tratta quindi della retta passante per l'origine di direzione  $v_1$ .

### ~Esempio

Se  $v_1 \neq 0$  e  $v_2 \neq 0$  sono 2 vettori di  $\mathbb{R}^3$ , allora  $L(v_1, v_2)$  contiene tutti i vettori del tipo  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ . Si tratta quindi:

- del piano passante per l'origine che contiene  $v_1$  e  $v_2$  se i 2 vettori non sono paralleli;
- della retta passante per l'origine che contiene  $v_1$  e  $v_2$  se i 2 vettori sono paralleli

↓  
in questo caso  $L(v_1, v_2) = L(v_1)$

### ~Esempio

Se  $v_1 \neq 0$ ,  $v_2 \neq 0$  e  $v_3 \neq 0$  sono 3 vettori di  $\mathbb{R}^3$ , allora  $L(v_1, v_2, v_3)$  contiene tutti i vettori del tipo  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ . Si tratta quindi:

- dell'intero  $\mathbb{R}^3$ , se i 3 vettori non sono complanari;
- di un piano passante per l'origine, se almeno 2 non sono paralleli e sono tutti e 3 complanari;
- di una retta passante per l'origine, se sono tutti e 3 paralleli.

Si dice che i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono un sistema di generatori di  $V$  se ogni vettore di  $V$  si può ottenere come combinazione lineare di  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , ovvero se  $V = L(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

Si dice che i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono una base di  $V$  se

- sono linearmente indipendenti
  - sono un sistema di generatori
- } si dice anche "un sistema libero di generatori"



Si dimostra che, se  $V$  ha una base costituita da  $n$  vettori, ogni altra base di  $V$  è costituita da  $n$  vettori. In questo caso si dice che lo spazio vettoriale è finitamente generato e che ha dimensione  $n$  ( $\dim V = n$ ).

La scomposizione di un vettore  $V$  come combinazione lineare dei vettori di una base è unica, ovvero se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono una base dello spazio vettoriale  $V$ , allora per ogni  $v \in V$  esistono unici  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \Rightarrow \text{i coefficienti } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ si dicono componenti di } v \text{ rispetto alla base } v_1, v_2, \dots, v_n$$

In  $\mathbb{R}^2$  ( $\dim = 2$ ) una possibile base è  $v_1 = (1, 0)$  e  $v_2 = (0, 1)$ . Infatti

- sono linearmente indipendenti (non sono paralleli);
- sono generatori, infatti per ogni generico  $v = (a, b)$  di  $\mathbb{R}^2$  vale la relazione  $v = a(1, 0) + b(0, 1)$

In  $\mathbb{R}^3$  ( $\dim = 3$ ) una possibile base è  $v_1 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (0, 0, 1)$ .

- sono linearmente indipendenti (non sono paralleli);
- sono generatori, infatti per ogni generico  $v = (a, b, c)$  di  $\mathbb{R}^3$  si ha che  $v = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$

In  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  (spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado  $\leq 2$ ) una possibile base è  $1, x, x^2$ .

Infatti se  $p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  allora  $p(x) = ax^2 + bx + c$  e  $p(x) = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$  ( $\mathbb{R}_{\leq 2}[x] \sim \dim = 3$ )

Si può dimostrare che, se  $\dim V = n$  e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti, allora sono una base.

## ESERCIZI CLASSICI SULLE BASI DI SPAZI VETTORIALI

### ✓ Esercizio

Dimostrare che i vettori  $v_1 = (1, 2)$  e  $v_2 = (5, 1)$  formano una base di  $\mathbb{R}^2$ . Trovare poi le componenti di  $v_3 = (11, 4)$  rispetto a questa base.

Dimostro che sono linearmente indipendenti, prendendo una generica combinazione dei vettori  $v_1$  e  $v_2$  e imponendo che sia uguale al vettore nullo. Quindi dobbiamo far vedere che l'unica soluzione dell'equazione è quella che ha entrambi i coefficienti della combinazione lineare uguale a zero

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \leadsto \lambda_1 (1, 2) + \lambda_2 (5, 1) = (0, 0) \leadsto (\lambda_1 + 5\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \leadsto \begin{cases} \lambda_1 = -5\lambda_2 \\ 2(-5\lambda_2) + \lambda_2 = 0 \end{cases} \leadsto \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

Dimostro che sono un sistema di generatori, quindi bisogna far vedere che qualunque vettore in  $\mathbb{R}^2$  si può scrivere come una combinazione lineare di  $v_1$  e  $v_2$  con opportuni coefficienti. In altre parole devo far vedere che, comunque scelta le 2 componenti  $a$  e  $b$  di un generico vettore in  $\mathbb{R}^2$ , l'equazione di seguito ammette sempre soluzione

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (a, b) \leadsto \lambda_1 (1, 2) + \lambda_2 (5, 1) = (a, b) \leadsto (\lambda_1 + 5\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (a, b)$$



$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = b \end{cases} \leadsto \begin{cases} \lambda_1 = a - 5\lambda_2 \\ 2(a - 5\lambda_2) + \lambda_2 = b \end{cases} \leadsto \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5b-a}{9} \\ \lambda_2 = \frac{2a-b}{9} \end{cases}$$

Quindi, comunque io scelga le 2 componenti  $a$  e  $b$  di un generico vettore in  $\mathbb{R}^2$ , riesco sempre a trovare un'opportuna combinazione lineare dei vettori  $v_1$  e  $v_2$  che dà come risultato il vettore di componenti  $(a, b)$

Abbiamo dimostrato che i vettori  $v_1$  e  $v_2$  formano un sistema di generatori e quindi una base dello spazio  $\mathbb{R}^2$ , visto che sono anche linearmente indipendenti.

È opportuno notare che avevamo un'alternativa più rapida al fare queste due verifiche per mostrare che questi due vettori sono effettivamente una base di  $\mathbb{R}^2$

↓  
esiste infatti un teorema che ci garantisce che se ho a che fare con uno spazio di dimensione  $n$  e riesco a far vedere che lì dentro ho  $n$  vettori linearmente indipendenti, allora si tratta automaticamente di una base e quindi, in particolare, di un sistema di generatori, oppure se ho a che fare con un sistema di  $n$  generatori in uno spazio di dimensione  $n$ , posso concludere che si tratta di una base e quindi di vettori linearmente indipendenti

↓  
avrei potuto dire che  $\mathbb{R}^2$  ha dimensione 2 e quindi, se  $v_1$  e  $v_2$  sono linearmente indipendenti, allora sono automaticamente una base (ed in particolare generatori).

Per trovare le componenti del vettore  $v_3 = (11, 4)$  rispetto alla base costituita da  $v_1$  e  $v_2$ , basto ricordarmi che le componenti di un certo vettore rispetto a una base sono i coefficienti della combinazione lineare di quella base il che dà come risultato il vettore che mi interessa

↓  
quindi basto sostituire  $a=11$  e  $b=4$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{5b-a}{9} = \frac{20-11}{9} = 1 \\ \lambda_2 = \frac{2a-b}{9} = \frac{22-4}{9} = 2 \end{cases}$$

$$\leadsto 1 \cdot (1, 2) + 2 \cdot (5, 1) = (11, 4) \leadsto 1v_1 + 2v_2 = v_3$$

1 e 2 sono le componenti del vettore  $v_3$  rispetto alla base data da  $v_1$  e  $v_2$

## ~Esercizio

Dopo aver verificato che  $v_1 = (1, 2, 3)$  e  $v_2 = (2, 0, 3)$  sono linearmente indipendenti, completare l'insieme  $\{v_1, v_2\}$  in modo da ottenere una base di  $\mathbb{R}^3$

Per verificare che sono linearmente indipendenti devo risolvere  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

l'unica soluzione è  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  quindi  $v_1$  e  $v_2$  sono linearmente indipendenti

↓  
più semplicemente posso notare che le componenti dei 2 vettori non sono proporzionali, cioè un vettore non è multiplo dell'altro, e questo mi garantisce subito che ho a che fare con 2 vettori linearmente indipendenti



lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  ha dimensione 3 e quindi le sue basi sono costituite da 3 vettori



di conseguenza, per completare l'insieme in modo da ottenere una base di  $\mathbb{R}^3$  dovrò aggiungere un terzo vettore in modo tale che i 3 risultino ancora linearmente indipendenti



dal punto di vista geometrico un vettore  $v_3$  che non si può scrivere come combinazione lineare dei vettori  $v_1$  e  $v_2$  non è in  $\mathbb{R}^2$  nel piano generato dai vettori  $v_1$  e  $v_2$

$$v_3 \neq a_1 v_1 + a_2 v_2$$

Quindi

o vado a studiarli come sono fatte queste combinazioni lineari e dopo vado a prendere un vettore che non soddisfa quelle condizioni

o scegliere un vettore random all'interno di  $\mathbb{R}^3$  e poi faccio vedere che i 3 vettori sono linearmente indipendenti

$$v_3 = (0, 0, 1)$$

si verifica facilmente che  $v_1, v_2$  e  $v_3$  sono linearmente indipendenti e quindi una base di  $\mathbb{R}^3$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \Rightarrow a_1 (1, 2, 3) + a_2 (2, 0, 3) + a_3 (0, 0, 1) = (0, 0, 0) \\ (a_1 + 2a_2, 2a_1, 3a_1 + 3a_2 + a_3) = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_1 = 0 \\ 3a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_2 = -a_1 \\ a_1 = 0 \\ 3a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

## Esercizio

Determinare la dimensione del sottospazio di  $\mathbb{R}^5$  generato da  $v_1 = (1, 2, -1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 2, -1, 0, 0)$ ,  $v_3 = (0, 0, -1, 1, 0)$  e  $v_4 = (3, 6, -3, 3, 3)$

Se fossero linearmente indipendenti sarebbero una base del sottospazio che avrebbe quindi dimensione 4.



si osserva però che  $v_4 = 3v_1$ , quindi i vettori sono linearmente dipendenti

Mi limito allora a considerare solo  $v_1, v_2$  e  $v_3$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 = 0 \\ -a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Quindi  $v_1, v_2$  e  $v_3$  sono linearmente indipendenti



Ne segue che  $L(v_1, v_2, v_3, v_4) = L(v_1, v_2, v_3)$  ha dimensione 3 e  $\{v_1, v_2, v_3\}$  è una base

il quarto è inutile essendo un multiplo del primo

## INTERSEZIONE E SOMMA DI SOTTOSPAZI:

### FORMULA DI GRASSMANN

Sia  $V$  uno spazio vettoriale e siano  $U$  e  $W$  due suoi sottospazi: allora l'intersezione è a sua volta un sottospazio vettoriale di  $V$  e lo si indica con  $U \cap W$

Dimostrazione. Siano  $v_1$  e  $v_2$  due generici vettori di  $U \cap W$

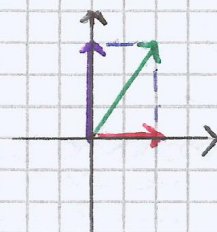
$$\left. \begin{array}{l} v_1 + v_2 \in U \text{ visto che } v_1 \in U \text{ e } v_2 \in U \\ v_1 + v_2 \in W \text{ visto che } v_1 \in W \text{ e } v_2 \in W \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda v_1 \in U \text{ visto che } v_1 \in U \\ \lambda v_1 \in W \text{ visto che } v_1 \in W \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda v_1 \in U \cap W$$

Ne segue quindi che  $U \cap W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

Sia  $V$  uno spazio vettoriale e siano  $U$  e  $W$  due suoi sottospazi: la loro unione è un sottospazio generale? In generale no.

Supponiamo di essere in  $\mathbb{R}^2$ , ovvero nel piano, e consideriamo 2 sottospazi di dimensione 1, ovvero 2 rette passanti per l'origine, per esempio gli assi cartesiani



l'unione dei 2 sottospazi sarebbe rappresentata da tutti i vettori che giacciono o sull'asse  $x$  o sull'asse  $y$ , e a questo punto si vede subito che non si tratta di un sottospazio vettoriale, perché se prendo 2 elementi e provo a sommarli, il vettore somma non abita più all'interno dell'unione e quindi l'unione non ha una delle 2 caratteristiche che sono necessarie per poter parlare di sottospazio

Si può invece dimostrare che  $\{u+w: u \in U \text{ e } w \in W\} \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ . Questo sottospazio è detto sottospazio somma e si indica con  $U+W$ .

se sommo tra loro 2 vettori del piano sono sicuro di ottenere un altro vettore del piano e tutti i multipli di un qualsiasi vettore che sta nel piano stanno a loro volta nel piano



Se  $V$  uno spazio vettoriale e siano  $U$  e  $W$  due suoi sottospazi vettoriali con dimensione finita. Allora:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \rightsquigarrow \text{Formula di Grassman}$$

questa formula è molto simile a quella usata per calcolare il numero degli elementi dell'unione di 2 insiemi intersecati



se  $U \cap W = \{0\}$  allora  $\dim(U \cap W) = 0$  e  $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$

In questo caso si dice che  $U+W$  è una somma diretta e lo si indica con  $U \oplus W$

Supponiamo di avere una rappresentazione cartesiana di  $U$  e  $W$ : in questo caso per trovare una rappresentazione cartesiana di  $U \cap W$  basta mettere in un unico sistema le equazioni di  $U$  e  $W$ .

Esempio: se  $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = x + z = 0\}$  e  $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x - z + w = 0\}$  allora  $U \cap W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = x + z = 3x - z + w = 0\}$

in questo sottospazio ci sono tutti i vettori le cui componenti sono soluzioni di

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ 3x - z + w = 0 \end{cases}$$

la dimensione del sottospazio è  $n - \text{rk}(A)$

dove  $n$  è il numero di incognite e  $A$  la matrice associata al sistema

Supponiamo di avere una rappresentazione parametrica di  $U$  e  $W$ : in questo caso per trovare una rappresentazione parametrica di  $U+W$  basta mettere insieme i vettori che generano  $U$  con quelli che generano  $W$

Esempio: se  $U = \text{span}\{(2, 1, 0, 3), (1, 1, 1, 1)\}$  e  $W = \text{span}\{(-2, 8, 3, 1), (-1, 0, 1, 1)\}$  allora  $U+W = \text{span}\{(2, 1, 0, 3), (1, 1, 1, 1), (-2, 8, 3, 1), (-1, 0, 1, 1)\}$

Per stabilirne la dimensione devo capire quanti di questi sono linearmente indipendenti

il modo più veloce per farlo è determinare il rango della matrice avente per colonne i vettori considerati



## SOTTOSPAZI VETTORIALI: ESERCIZI DI RIEPILOGO

### ~Esercizio

siano  $U$  e  $W$  due sottospazi di  $\mathbb{R}^7$  con  $\dim U = \dim W = 4$ .

- Dimostrare che esiste almeno un vettore non nullo in  $U \cap W$ .
- È possibile che  $\dim(U \cap W) = 4$ ?

1) Dalla Formula di Grassmann segue che

$$\dim(U \cap W) = \underbrace{\dim U}_{4} + \underbrace{\dim W}_{4} - \underbrace{\dim(U+W)}_{\text{al massimo } 7} \geq 1$$

al massimo è 7  
essendo  $U$  e  $W$   
sottospazi di  $\mathbb{R}^7$

allora è  
chiaro che  
al suo interno  
deve esserci  
almeno un  
vettore non  
nullo, perché  
se l'unico  
"abitante"  
fosse il vettore  
nullo,

quindi nell'intersezione  
non può essere  
solo il vettore nullo

allora la dimensione  
del sottospazio  
dovrebbe essere  
zero

2) Sì, ma solo se i due sottospazi coincidono.

### ~Esercizio

siano  $U = \text{Span}\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$  e  $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z=w, x=3z\}$   
due sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$ .  
Determinare la dimensione e una base di  $U$ ,  $W$ ,  $U+W$  e  $U \cap W$ .

Si vede subito che  $(0, 1, 0, 0)$  e  $(0, 0, 0, 1)$  sono linearmente indipendenti.  
Dunque sono una base di  $U$  e  $\dim U = 2$ .

Per trovare una base e la dimensione di  $W$  risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x+y-z-w=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z-w=0 \\ y+2z-w=0 \end{cases} \Rightarrow \text{le variabili } z \text{ e } w \text{ sono libere}$$

$$\Rightarrow y+2z-w=0$$

Se pongo  $w=s$  e  $z=t$  allora  $y = -2t + s$  e  $x = -y + z + w = 2t - st + s = 3t$

Le soluzioni del sistema sono  $(x, y, z, w) = (3t, -2t + s, t, s) = t(3, -2, 1, 0) + s(0, 1, 0, 1)$

Ne segue che  $W = \text{Span}\{(3, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$  e  $\dim W = 2$ .

$$U+W = \text{Span}\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (3, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$$

↓  
l'ultimo vettore è la somma dei primi 2 vettori  
essendo una combinazione lineare degli altri 2,  
possiamo escluderlo



$U+W = \text{Span}\{(0,1,0,0), (0,0,0,1), (3,-2,1,0)\} \rightsquigarrow$  dimostriamo che sono linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{metodo dei minori}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ha determinante } \neq 0, \text{ dunque la matrice ha un minore di ordine 3 non nullo}$$

$\downarrow$   
 $\text{rk} = 3$

Si conclude che i 3 vettori sono una base di  $U+W$  e  $\dim(U+W) = 3$

Dalla formula di Grassmann segue che

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Per trovare una base di  $U \cap W$  posso ragionare così:

$(0,1,0,1)$  e  $(0,0,0,1)$  sono una base di  $U$ , quindi

$$U = \{v = a(0,1,0,1) + b(0,0,0,1) : a, b \in \mathbb{R}\} = \{v = (0, a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Si tratta di capire quali di questi vettori appartengono a  $W$ .

$$v \in W \text{ se e solo se } \begin{cases} x+y-z-w=0 \\ y+2z-w=0 \end{cases} \text{ dunque } (0, a, 0, b) \in W \text{ se e solo se}$$

$$\begin{cases} 0+a-0-b=0 \\ a+0-b=0 \end{cases} \rightsquigarrow a=b$$

Possiamo allora concludere che  $U \cap W = \{v = (0, a, 0, a) : a \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{(0, 1, 0, 1)\}$  e la sua dimensione è 1.