Appunti sulle Matrici

Fonti

- YouMath: MATRICI E VETTORI
- Andrea Minini: La matrice
- Angela Donatiello: MATRICI E DETERMINANTI – CENNI SUI SISTEMI LINEARI
- Zanichelli: Matrici e sistemi lineari

MATRICE

Un insieme di numeri reali o complessi, ordinati secondo righe e colonne è detto matrice di ordine **m×n**, ove **m** è il numero delle righe e **n** il numero delle colonne

Una matrice è una tabella ordinata di elementi $a_{i,j}$, dove $a_{i,j}$ sono numeri detti elementi (o coefficienti) e gli indici i, j in pedice agli elementi sono dei numeri interi positivi che indicano per convenzione prima il numero di riga (i) e poi il numero di colonna (j).

Una matrice di numeri viene indicata con una lettera maiuscola A oppure col simbolo $A_{m\times n}$ e scritta in generale nel modo seguente

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{cases} i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m \\ j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n \end{cases}$$

Gli indici degli elementi possono essere indicati con la virgola ($a_{m,n}$) o senza la virgola (a_{mn}) tra gli indici.

P.S. La notazione con la virgola evita le ambiguità quando gli indici superano la decina.

La matrice può essere indicata come A, $A_{m\times n}$, $A_{(m,n)}$ o $A = (a_{mn})$.

a_{ij} = elemento della matrice che corrisponde all'incrocio tra la riga i-esima e la colonna j-esima

Chiamiamo dimensione di una matrice il prodotto tra il numero di righe e il numero di colonne

↓

tale prodotto va indicato come tale e non come numero

↓

ad esempio se una matrice A ha m righe e n colonne, diciamo che A ha dimensione m×n

Inoltre, una matrice di dimensione m×n viene detta matrice di tipo (m, n) e se i suoi elementi sono numeri reali si dice che essa appartiene a

$$\mathbb{R}^{m\times n},$$

spesso indicato come $\mathbb{R}^{m,n}$ oppure come $Mat(m, n, \mathbb{R})$.

Più in generale, se gli elementi di una matrice appartengono al campo K, si scrive $A \in K^{m,n}$, oppure

$$A \in K^{m \times n} \quad \text{o, ancora, } A \in Mat(m,n,K).$$

$Mat(m,n,K)$ denota l'insieme di tutte le matrici a coefficienti nel campo K con m righe e n colonne.

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 7 \\ 15 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Di che tipo e qual è la sua dimensione? Avendo 4 righe e 3 colonne è una matrice di tipo $(4,3)$, la cui dimensione è 4×3.

- A cosa appartiene? I suoi elementi sono numeri reali, dunque $A \in \mathbb{R}^{4,3}$ o $A \in Mat(4,3,\mathbb{R})$

- Quale elemento occupa la posizione a_{41}? Dobbiamo individuare l'elemento che occupa la posizione: quarta riga, prima colonna. In tale posizione c'è uno zero, pertanto $a_{41} = 0$

Matrice riga: è una matrice di tipo $(1,n)$, ossia è formata da una sola riga, indipendentemente dal numero delle colonne.

$\downarrow$

le matrici riga vengono usate per riportare le componenti di un vettore, motivo per cui vengono anche dette vettore riga

es. $(-1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 3) \in \mathbb{R}^{1,4}$ $\quad (\frac{1}{3}, 2) \in \mathbb{R}^{1,2}$

Matrice colonna: è una matrice formata da una sola colonna, ossia del tipo $(m,1)$ e viene detta anche vettore colonna.

es. $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5,1}$ $\quad \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}$

Matrice rettangolare: è una matrice in cui il numero delle righe è diverso dal numero delle colonne, cioè $m \neq n$.

es. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ $\quad \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & -5 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,2}$

Matrice quadrata: è una matrice che ha il numero di righe uguale al numero di colonne ($m=n$) e questo numero prende il nome di ordine della matrice.

Tali matrici rivestono un ruolo fondamentale in Algebra Lineare

Sono infatti le uniche per cui si può calcolare il determinante e cercare la matrice inversa se esiste.

es. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$

Sono due matrici quadrate, la prima di ordine 2 e la seconda di ordine 3.

In una matrice quadrata si dice:

- diagonale principale, la diagonale che va dall'angolo in alto a sinistra all'angolo in basso a destra;
- diagonale secondaria (o antidiagonale), la diagonale che va dall'angolo in alto a destra all'angolo in basso a sinistra.

Nella seguente matrice abbiamo indicato in rosso gli elementi della diagonale principale e in blu quelli della diagonale secondaria:

$$\begin{pmatrix} -4 & 9 & 1 \\ 15 & -81 & 7 \\ 5 & 12 & 44 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 9 & 1 \\ 15 & -81 & 7 \\ 5 & 12 & 44 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale: è una matrice quadrata in cui gli elementi sono tutti nulli ad eccezione di quelli posti sulla diagonale principale. In formule:

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrice diagonale $\iff \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}, i \neq j, a_{ij}=0$

es. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Matrice antidiagonale: è una matrice quadrata in cui i soli termini della diagonale secondaria possono essere diversi da zero.

es. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 15 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice identità: si indica generalmente con Id, Id_n, I o con I_n ed è una matrice diagonale avente tutti 1 sulla diagonale principale e tutti 0 altrove. In simboli:

$$Id_n \in \mathbb{R}^{n,n}, \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}: a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Ovviamente non importa quanto valga n, cioè il numero di righe o di colonne di una matrice identità può essere qualsiasi numero naturale non nullo.

es. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice nulla: è una matrice (rettangolare o quadrata) di dimensioni qualsiasi, costituita da soli 0 e indicata col simbolo 0.

es. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice triangolare superiore: è una matrice quadrata avente tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale uguali a zero. In formule:

$$A \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ triangolare superiore} \iff \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}, i > j ; a_{ij} = 0$$

es. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Gli elementi evidenziati in rosso sono quelli in cui l'indice di riga i è maggiore dell'indice di colonna j.
Affinché la matrice sia triangolare superiore tali elementi devono essere uguali a zero, come

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrice triangolare inferiore: è una matrice quadrata avente tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale uguali a zero

$$A \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ triangolare inferiore} \iff \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}, i < j: a_{ij} = 0$$

es. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Matrici a scalini (o a gradini): una qualsiasi matrice (quadrata o rettangolare) è detta matrice a scalini o matrice a gradini se il primo elemento diverso da zero della i-esima riga, con $i>1$, è più a destra del primo elemento diverso da zero della riga precedente.

es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Sono matrici a scalini

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ Non è una matrice a scalini

Il primo elemento diverso da zero di ogni riga (quando c'è) è detto pivot.

Tramite il metodo di eliminazione di Gauss è possibile ridurre qualsiasi matrice in una matrice a scalini.

Matrice simmetrica e matrice antisimmetrica: una matrice quadrata di ordine $n>1$ si dice simmetrica se i suoi elementi sono simmetrici rispetto alla diagonale principale, ossia se per ogni $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$, con $i \neq j$: $a_{ij}=a_{ji}$

es. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Di contro, una matrice quadrata è detta antisimmetrica se $a_{ij}=-a_{ji}$.

es. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice trasposta: è una nuova matrice in cui le righe diventano colonne e le colonne diventano righe.

Sia A una generica matrice ad elementi in un campo K, cioè A può essere una matrice di qualsiasi tipo: rettangolare o quadrata, matrice riga o matrice colonna.

In tutti i casi è sempre possibile trovarne la matrice trasposta. Essa si indica generalmente con A^T e si ottiene scambiando le righe di A con le sue colonne.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

In termini matematici...

Sia A una matrice con m righe e n colonne a coefficienti in un campo K, ossia

$$A \in Mat(m,n,K), \; A = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

La trasposta di A è la matrice

$$A^T \in Mat(n,m,K), \; A = (a_{ji}) \quad \begin{matrix} 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m \end{matrix}$$

Dunque, se A è una matrice di dimensione $m \times n$, ossia una matrice con m righe e n colonne, allora la trasposta A^T ha dimensione $n \times m$, ossia una matrice con n righe e m colonne

Matrici dello stesso tipo: sono matrici che hanno lo stesso numero di righe e di colonne.

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Sono matrici dello stesso tipo 3×2

Matrici corrispondenti: in due matrici A e B dello stesso tipo, gli elementi di ugual posto si dicono corrispondenti.

es. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ Nelle due matrici gli elementi corrispondenti sono a_{11} e b_{11}, a_{12} e b_{12} e così via.

Matrici uguali: due matrici, A e B, si dicono uguali quando tutti gli elementi corrispondenti sono uguali, e si scrive $A = B$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$