Appunti sulle Matrici Associate e Applicazioni Lineari

Fonti

- Appunti dalle lezioni del professore Federico Alberto Rossi (Università degli Studi di Perugia – Dipartimento di Informatica)

MATRICI ASSOCIATE e APPLICAZIONI LINEARI

Idea   V spazio vettoriale dim finita $\rightsquigarrow K^n$
$\leftsquigarrow \varphi_B$

Esempio

$V = \mathbb{R}_3[x]$ $p_1 = x-1$ $p_2 = x^2 - x$ $p_3 = 2x^2 + 4x - 6$

$q_1 = x^2 - 1$ $q_2 = x^3 + x$

$W = \text{Span}\{p_1, p_2, p_3\}$ $U = \text{Span}\{q_1, q_2\}$

Trovare $U+W$, $U \cap W$, $\dim U$, $\dim W$

Idea: Fisso base B e trasporto il pb. in $\mathbb{R}^4$

$B_V = \{1, x, x^2, x^3\}$ è base Φ_B è un isomorfismo $\Phi_B(W) \simeq W$

$\dim W = \dim \Phi_B(W)$

$\Phi_B(W) = \text{Span}\{\Phi_B(p_1), \Phi_B(p_2), \Phi_B(p_3)\}$

Base $W \underset{\varphi_B}{\overset{\Phi_B}{\rightleftarrows}}$ Base $\Phi_B(W)$

$$\Phi_B(p_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_B(p_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_B(p_3) = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sono linearmente indipendenti?

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 + R_1 \\ R_3 + R_2 + R_1 \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 2$$

$B_{\Phi(W)} = (\Phi(p_1), \Phi(p_2))$

$B_W = \{p_1, p_2\}$

$\dim W = 2$

$q_1 = x^2 - 1$

$q_2 = x^3 + x$

Base di U $\Phi_B(U) = \text{Span}\{\Phi_B(q_1), \Phi_B(q_2)\}$

$$\Phi_B(q_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_B(q_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_3 + R_1 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk = 2$ sono una base

$B_U = \{q_1, q_2\}$ $\dim U = 2$

$U+W = \text{Span}\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$

$$\Phi_B = \begin{array}{cccc} \Phi_B(p_1) & \Phi_B(p_2) & \Phi_B(p_3) & \Phi_B(p_3) \end{array}$$

$$\Phi_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_2+R_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_3+R_2 \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} rk = 3 \\ \dim(U+W) = 3 \\ B_{U+W} = \{p_1, p_2, q_2\} \end{array}$$

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$$
$$= 2 + 2 - 3 = 1$$

Per trovare una base di $U \cap W$ trasferisco il problema in $\mathbb{R}^4$ e cerco base di $\Phi(U \cap W)$

$$\Phi(W) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ trasformo in coordinate cartesiane} \quad \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\alpha = x_1 \\ \alpha - \beta = x_2 \\ \beta = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -x_1 \\ \beta = x_3 \\ -x_1 - x_3 = x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \Phi(W) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} -x_1 - x_3 = x_2 \\ x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Phi(U) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = -k \\ x_2 = h \\ x_3 = k \\ x_4 = h \end{cases}$$

eq. parametriche di $\Phi(U)$

Sostituiamo le equazioni parametriche di $\Phi(U)$ in equazioni cartesiane di $\Phi(W)$

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 = x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k - k = h \\ h = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ h = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -k \\ x_2 = 0 \\ x_3 = k \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \Phi(U \cap W)$$

$$p_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{polinomio base di } U \cap W \rightsquigarrow -1 + 0x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 = -1 + x^2$$

~Osservazione

Date due matrici $A, B \in M_{n,k}(\mathbb{K})$ si ha che $L_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$
$L_B: \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$

$$L_A = L_B \text{ sse } A = B$$

~Teorema (Matrice associata ad un'applicazione lineare - Caso semplice)

Data $T: \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$ applicazione lineare.

Esiste un'unica matrice $A \in M_{n,k}(\mathbb{K})$ t.c. $T = L_A$ e A è data da:

$$A = (T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_k))$$

$A^i = T(e_i)$ le colonne di A sono le immagini dei vettori della base canonica $\{e_1, \dots, e_k\}$

A è detta matrice associata a T (rispetto alla base canonica)

~Esempio

$\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

La proiezione è definita da:

$$\pi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\pi(e_1) = \pi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi(e_2) = \pi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi(e_3) = \pi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \pi(e_1) & \pi(e_2) & \pi(e_3) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

matrice associata a π

$A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

~Esempio

$Id: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad Id(\underline{v}) = \underline{v}$

$\{e_1 \dots e_n\}$ base di $\mathbb{R}^n$

$Id(e_1) = e_1$

$Id(e_2) = e_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

La matrice associata all'applicazione identità è la matrice identità

Esempio

$L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ applicazione lineare data da

$$L(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A \in M_{2,4}(\mathbb{R}) \quad L = L_A$$

Base di $\ker L$: Risolvo $Ax = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad rk = 2$$

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \operatorname{Im} L + \dim \ker L$$

$$4 = 2 + \dim \ker L \rightsquigarrow \dim \ker L = 4 - 2 = 2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3 \\ x_4 = 3x_2 - 4x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda - 2\mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \\ x_4 = 3\lambda - 4\mu \end{cases}$$

$$\text{Base di } \ker L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Base di } \operatorname{Im} L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \operatorname{Im} L = \operatorname{span}\{A^1 A^2 A^3 A^4\}$$

A^3, A^4 sono linearmente indipendenti

$\downarrow$

Base $\operatorname{Im} L$

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L$$

$$4 = 2 + 2 \quad \text{vero}$$

~Teorema

A matrice $n \times n$. Sono equivalenti:

1) A è invertibile
2) L_A è invertibile
3) L_A è iniettivo
4) L_A è suriettivo
5) Le righe di A sono linearmente indipendenti
6) Le colonne di A sono linearmente indipendenti (le colonne sono una base di $\mathbb{K}^n$)
7) A ha rango n
8) Ogni matrice a scala ottenuta da A con eliminazione di Gauss ha n pivot
9) Il sistema omogeneo $Ax=0$ ha solo la soluzione nulla
10) Il sistema $Ax=b$ ha una soluzione per ogni $b \in \mathbb{K}^n$

V, W spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ $\quad F: V \to W$

$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ Base di V $\quad \dim V = n$

$C_V = \{w_1, \dots, w_n\}$ Base di W $\quad \dim W = K$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "\Phi_B"'] & W \arrow[d, "\Phi_C"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, shift right, "\Phi_B^{-1}"'] \arrow[r, dashed] & \mathbb{K}^K \end{tikzcd}$$

ISOM Φ_B $\quad$ Φ_C ISOM

$\underbrace{\Phi_C \circ F \circ \Phi_B^{-1}}_{\text{è una funzione lineare}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^K$

ha una matrice associata $M_C^B(F) \in M_{Kn}(\mathbb{K})$

La matrice $M_C^B(F)$ è detta matrice associata all'applicazione lineare F rispetto alla base B in partenza e alla base C in arrivo.

equivalentemente:

la matrice associata a F è l'unica matrice $M_C^B(F) \in M_{Kn}(\mathbb{K})$ che verifica

$$M_C^B(F) \cdot \Phi_B(v) = \Phi_C(F(v)) \underset{\text{stessa cosa}}{\longleftrightarrow} L_{M_C^B(F)} \circ \Phi_B = \Phi_C \circ F$$

~Osservazione

La colonna j-esima di $M_C^B(F)$ sono i vettori $\Phi_C(F(v_j))$.

Ossia le coordinate del vettore $F(v_j)$ nella base C di W sono la j-esima colonna di $M_C^B(F)$

Esempio

V, W spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ $\quad B_V = \{v_1, v_2\}$ $\quad B'_W = \{w_1, w_2, w_3\}$

$F: V \to W$ applicazione lineare definita da

$$\begin{cases} F(v_1) = 3w_1 - w_2 + 17w_3 \\ F(v_2) = w_1 + w_2 - w_3 \end{cases} \qquad M^B_{B'}(F) = ?$$

$$M^B_{B'}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 17 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$F(v_1) = 3w_1 - w_2 + 17w_3 \qquad \Phi_B(F(v_1)) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$F(v_2) = w_1 + w_2 - w_3 \qquad \Phi_B(F(v_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esempio

$A \in M_{k,n}(\mathbb{K})$ $\quad L_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$, $\; v \longmapsto A \cdot v$ $\quad$ Allora $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A)$

Esempio

$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ basi di $\mathbb{R}^2$

$Id: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ applicazione identità $\quad Id(v) = v$

$$Id(e_1) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$$

$$Id(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \qquad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$Id(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Id(v_2) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad M^B_B(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$Id(v_1) = v_1 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

soluzioni $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

$Id(v_2) = v_2 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 = 1 \cdot e_1 - e_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

soluzioni $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

$$M_{\mathcal{E}}^{B}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Phi_{\mathcal{E}}(Id(v_1))$ $\Phi_{\mathcal{E}}(Id(v_2))$

$Id(e_1) = e_1 = a v_1 + b v_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ a-b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/2 \end{cases}$$

$$M_{B}^{\mathcal{E}}(Id) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\Phi_B(Id(e_1))$ $\Phi_B(Id(e_2))$

$Id(e_2) = e_2 = a v_1 + b v_2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a-b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$$

~ Esempio

$V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\quad B = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$L : M_{22}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{22}(\mathbb{R})$

$A \longmapsto A \cdot E_{11} - E_{11} \cdot A = L(A)$

$$L\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -x_2 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & +0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot E_{11} + \underline{0} \cdot E_{12} + \underline{0} \cdot E_{21} + \underline{0} \cdot E_{22}$$

praticamente sostituisco
i corrispettivi elementi al posto
di x_2 e x_3, gli unici diversi da zero

$$L(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot E_{11} \underline{-1} \cdot E_{12} + \underline{0} \cdot E_{21} + \underline{0} \cdot E_{22}$$

$$L(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot E_{11} + \underline{0} \cdot E_{12} + \underline{1} \cdot E_{21} + \underline{0} \cdot E_{22}$$

$$L(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot E_{11} + \underline{0} \cdot E_{12} + \underline{0} \cdot E_{21} + \underline{0} \cdot E_{22}$$

Adesso costruiamo la matrice con gli elementi sottolineati

$$M_B^B(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

$$rk(M_B^B(L)) = 2 = rk(L) = \dim \operatorname{Im} L$$

$$\dim \ker L = 4 - 2 = 2$$

Base $\operatorname{Im} L$ $\rightsquigarrow$ 2^a colonna, $\rightsquigarrow$ 3^a colonna $\}$ pivot $\rightsquigarrow$ $B_{\operatorname{Im} L} = \{E_{12}, E_{21}\}$

$$\varphi_B(2^a \text{ colonna}) = \varphi_B \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot E_{11} - 1 E_{12} + 0 E_{21} + 0 E_{22} = E_{12}$$

$$\varphi_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = E_{21}$$

Base $\ker L$: $M_B^B(L) x = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{2 parametri}} \begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = h \end{cases}$

$$\downarrow$$

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker M_B^B(L) = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

φ: E_{11}, E_{22} $\rightsquigarrow$ $B_{\ker L} = \{E_{11}, E_{22}\}$

~ Esempio

$V = \mathbb{R}_2[t]$ $W = \mathbb{R}_3[t]$ $T: V \to W$ applicazione lineare

$\mathcal{B}_V = \{1, t, t^2\}$ $\mathcal{B}_W = \{1, t, t^2, t^3\} = \mathcal{C}$ $p \mapsto t \cdot p$

$T(1) = t \cdot 1 = t = \underline{0} \cdot 1 + \underline{1} \cdot t + \underline{0} \cdot t^2 + \underline{0} \cdot t^3$

$T(t) = t \cdot t = t^2 = \underline{0} \cdot 1 + \underline{0} \cdot t + \underline{1} \cdot t^2 + \underline{0} \cdot t^3$

$T(t^2) = t \cdot t^2 = t^3 = \underline{0} \cdot 1 + \underline{0} \cdot t + \underline{0} \cdot t^2 + \underline{1} \cdot t^3$

$$M_C^B(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,3} \qquad rk(T) = \dim Im = rk(M_C^B(T)) = 3$$

$B_{Im T} = \{t, t^2, t^3\}$

$\dim \ker T = n°\text{incognite} - rk(M_C^B(T)) = 3 - 3 = 0$

oppure

$\dim V = \dim Im T + \dim \ker T$ (teorema nullità + rango)

$3 = 3 + \dim \ker T$

$\dim \ker T = 0$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & V \arrow[d, "\Phi_C"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "M_C^B(Id)"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

B, C basi su V, $\dim V = n$

$\Phi_C(v) = M_C^B(Id) \cdot \Phi_B(v)$

$M_C^B(Id)$ è detta matrice del cambiamento di base dalla base B alla base C

se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di v rispetto a B $\Phi_B(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di v rispetto a C $\Phi_C(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

allora $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_C^B(Id) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Esempio

$V = \mathbb{R}_2[t]$ $\quad B = \{1, t, t^2\}$ $\quad B' = \{1, t-1, 2t^2+4t-6\}$

Matrice cambio di base da B' a B

$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2$

$t - 1 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2$

$2t^2 + 4t - 6 = -6 \cdot 1 + 4 \cdot t + 2 \cdot t^2$

$$M_B^{B'}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice cambio di base da B a B'

$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (t-1) + 0 \cdot (2t^2+4t-6)$

$t =$

$t^2 = a \cdot 1 + b(t-1) + c(2t^2+4t-6) = a + bt - b + 2ct^2 + 4ct - 6c$

$= 2ct^2 + (4c+b)t + (a - 6c - b)$

$$\begin{cases} 2c = 1 \\ 4c + b = 0 \\ a - 6c - b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 1/2 \\ b = -4c = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$t^2 = 1 \cdot 1 - 2(t-1) + \frac{1}{2}(2t^2+4t-6)$

$$M_{B'}^{B}(Id) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & -2 \\ & & 1/2 \end{pmatrix}$$

Esempio

$\mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ $\quad B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$v_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M_{\mathcal{E}}^{B}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Troviamo $M_B^{\mathcal{E}}(Id)$

$e_1 = a v_1 + b v_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ 2a + b \end{pmatrix}$$

In generale $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a v_1 + b v_2$, Incognite a, b, equivale a risolvere

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \end{array}\right)$$

$$R_2 = R_2 - 2R_1 = (2 \quad 1 \mid y) - (2 \quad 4 \mid 2x) = (0 \quad -3 \mid y-2x)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & y-2x \end{array}\right)$$

$$R_1 = 3R_1 + 2R_2 = (3 \quad 6 \mid 3x) + (0 \quad -6 \mid 2y-4x) = (3 \quad 0 \mid 2y-x)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2y-x \\ 0 & -3 & y-2x \end{array}\right)$$

$$R_1 = \frac{1}{3} R_1 = \left(1 \quad 0 \mid \frac{2y}{3} - \frac{x}{3}\right)$$

$$R_2 = -\frac{1}{3} R_2 = \left(0 \quad 1 \mid -\frac{y}{3} + \frac{2}{3}x\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -x/3 + \frac{2}{3}y \\ 0 & 1 & \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \end{array}\right) \qquad \Phi_B(e_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \Phi_B(e_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{B}(Id) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $M^{\mathcal{E}}_{B}(Id)$ è l'inversa di $M^{B}_{\mathcal{E}}(Id)$

~Proposizione

B, B' basi di V $\quad \dim V = n$

Allora $M^{B}_{B'}(Id) = \left(M^{B'}_{B}(Id)\right)^{-1}$

In particolare $M^{B}_{B'}(Id)$ è invertibile

~Proposizione

U, V, W spazi vettoriali di dimensione finita $\quad B_U, B'_V, B''_W$ basi

se $F: U \to V \quad G: V \to W$ applicazioni lineari

allora $M^{B}_{B''}(G \circ F) = M^{B'}_{B''}(G) \cdot M^{B}_{B'}(F)$

Esempio

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \\ -y \\ x-y \end{pmatrix}$$

$G: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$G\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-d \end{pmatrix}$$

$$M_{4,2} \ni M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{3,4} \ni M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F(e_1) = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(e_2) = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$G(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G \circ F) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+(-1)\cdot1+0\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot(-1)+0\cdot(-1) \\ 0\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot0+(-1)(-1)+0 \\ 0\cdot1+0\cdot1+1\cdot0+(-1)\cdot1 & 0\cdot1+0\cdot0+1(-1)+1(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$G \circ F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

~Esempio

$\mathbb{R}_2[t]$ $\quad B = \{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{t}, \underset{v_3}{t^2}\}$

$C = \{1+t,\ t^2+1,\ t^2+t\} = \{q_1, q_2, q_3\}$

$D = \{t^2, t, 1\}$

$p(t) = 2t^2 + t - 3$

$\Phi_B : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$

$$p \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad p = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$p = -3 \cdot 1 + 1 \cdot t + 2 \cdot t^2 \qquad \Phi_B(p) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Phi_C \quad p = 2t^2 + t - 3 = a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3$

$$2t^2 + t - 3 = a_1(1+t) + a_2(t^2+1) + a_3(t^2+t)$$
$$= a_1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_2 + a_3 t^2 + a_3 t$$
$$= t^2(a_2+a_3) + t(a_1+a_3) + 1 \cdot (a_1+a_2)$$

$$\begin{cases} 2 = a_2 + a_3 \\ 1 = a_1 + a_3 \\ -3 = a_1 + a_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) R_3 - R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) R_3 - R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) -\frac{1}{2}R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = 3 \end{cases}$$

Quindi $\quad p = 2t^2 + t - 3 = -2(1+t) - 1(t^2+1) + 3(t^2+t)$

$$\Phi_C(p) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Phi_D(p) \quad p = 2t^2 + t - 3 = 2 \cdot t^2 + 1 \cdot t - 3 \cdot 1$

$$\Phi_D(p) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Supposto

$$\Phi_C(q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad B = \{1, t, t^2\} \qquad C = \{1+t, t^2+1, t^2+t\}$$

¿quanto vale q?

$$\Phi_B(q) = M_B^C(Id) \cdot \Phi_C(q)$$

Troviamo $M_B^C(Id)$

$1+t = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2$

$t^2+1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2$

$t^2+t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2$

$$M_B^C(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\Phi_B(q) = M_B^C(Id) \cdot \Phi_C(q)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q = \rho_B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 = 2$$

$$q = \rho_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 - 1 \cdot q_3 = 1 \cdot (t+1) + 1 \cdot (t^2+1) - 1 \cdot (t^2+t)$$

$$= t + 1 + t^2 + 1 - t^2 - t = 2$$

~Definizione

$F: V \to V$ applicazione lineare, V spazio vettoriale $\Big\}$ F è detta endomorfismo ⟶ praticamente dominio e codominio coincidono

~Corollario

$F: V \to V$ endomorfismo, B, B' basi di V $\Big\}$ allora esiste una matrice invertibile N tale che

$$M_{B'}^{B'}(F) = N^{-1} \cdot M_B^B(F) \cdot N$$

dove $N = M_B^{B'}(Id)$

~Definizione

Due matrici A e B sono simili se esiste una matrice invertibile tale che $A = N^{-1} \cdot B \cdot N$

~Osservazioni

1) "Essere simili" è una relazione di equivalenza

2) Tutte le matrici associate ad un endomorfismo F sono simili tra loro

-Matrice diagonale

$D=(d_{ij})$ è diagonale se $d_{ij}=0$, $i\neq j$ (cioè tutti gli elementi sono nulli, tranne quelli lungo la diagonale principale)
(matrice quadrata)

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & & & 0 \\ 0 & d_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

~Definizione

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$
$F: V \to V$ endomorfismo

F è diagonalizzabile se esiste una base B di V tale che la matrice

$M_B^B(F)$ è diagonale

$\downarrow$

si dice che B diagonalizza F

inoltre la matrice associata all'applicazione lineare si dice diagonalizzabile se l'applicazione lineare

~Corollario

V spazio vettoriale
$F: V \to V$ endomorfismo
B base $M=M_B^B(F)$

F è diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice invertibile N tale che

$N^{-1}MN$ è diagonale

~Corollario

La matrice A è diagonalizzabile se e solo se A è simile ad una matrice diagonale

~Esempio

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\mathcal{E}=\{e_1, e_2\}$

$F(e_1)=e_2$
$F(e_2)=e_1$
F endomorfismo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ non è diagonale

$\Phi_{\mathcal{E}}(F(e_1)) = \Phi_{\mathcal{E}}(e_2)$

$\Phi_{\mathcal{E}}(F(e_2)) = \Phi(e_1)$

~Esempio

$v_1 = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B = \{\overset{v_1}{e_1 + e_2}, \overset{v_2}{e_1 - e_2}\}$$

$v_2 = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$F(v_1) = F(e_1 + e_2) = F(e_1) + F(e_2) = e_2 + e_1 = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

$$\Phi_B(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F(v_2) = F(e_1 - e_2) = F(e_1) - F(e_2) = e_2 - e_1 = -(e_1 - e_2) = -v_2 = 0 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2$

$$\Phi_B(F(v_2)) = \Phi_B(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ è diagonale}$$

F è diagonalizzabile e B diagonalizza F

~Osservazione

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Non sono diagonalizzabili

~Definizione

L'applicazione Determinante (determinante di una matrice)

$$\det : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$$
$$(v, w) \mapsto \det(v, w)$$

è lineare in ciascuna entrata

~Proprietà del determinante

1) $\det(I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

2) $\det \begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc)$

3) $\det \begin{pmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

4) $\det\begin{pmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{pmatrix} = (a+a')d-(c+c')b = ad-cb+a'd-c'b =$

$$= \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$$

5) $\det\begin{pmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$

6) $\det\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix} \mu a & a \\ \mu c & c \end{pmatrix} = 0$

~Definizione

Un'applicazione $F: \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k \text{ volte}} \to \mathbb{K}$ V spazio vettoriale

è multilineare se è lineare in ogni entrata

cioè per ogni $1 \leq j \leq k$, fissati $v_1, v_2, v_{j+1}, \ldots, v_k \in V$

l'applicazione $V \to \mathbb{K}$ è lineare

$w \mapsto f(v_1, v_2, v_{j+1}, \ldots, v_k)$

~Osservazione

$f: V \times \text{—} \times V \to \mathbb{K}$ è multilineare

se $f(v_1 \text{—}, \lambda v_j + \mu v_j', \ldots v_k) = \lambda f(v_1 \text{—} v_j \ldots v_k) + \mu f(v_1 \ldots v_j' \ldots, v_k)$

~Definizione

f multilineare $\quad f: V \times \text{—} \times V \to \mathbb{K}$

f è alternante se $f(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0$ ogni volta che due vettori sono uguali (cioè $v_i = v_j$ per qualche $i \neq j$)

~Definizione

$A \in M_{n,n}(\mathbb{K}) \qquad n \geq 3$

Indichiamo con A_{ij} la matrice ottenuta da A eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$