

Appunti sulle Applicazioni Lineari

Fonti

- Appunti dalle lezioni del professore Federico Alberto Rossi
(Università degli Studi di Perugia – Dipartimento di Informatica)

APPLICAZIONI LINEARI

~ Definizione

Dati due spazi vettoriali V e W , entrambi definiti su un campo K , un'applicazione lineare $T: V \rightarrow W$ è una funzione che soddisfa le seguenti condizioni:

- 1) per ogni $u, v \in V$, l'immagine della somma è uguale alla somma delle immagini (additività)

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \quad (\forall u, v \in V)$$

- 2) per ogni $u \in V$ e per ogni $\lambda \in K$, l'immagine del prodotto di u per lo scalare λ è uguale al prodotto dello scalare per l'immagine di u (omogeneità)

$$T(\lambda u) = \lambda \cdot T(u) \quad (\forall \lambda \in K, \forall u \in V)$$

T è lineare
 K -lineare

~ Osservazione

Valgono le seguenti proprietà:

$$\bullet T(0_V) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0_W$$

$$\bullet T(-v) = -T(v)$$

$$\bullet T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_k T(v_k)$$

$$\bullet T \text{ è lineare se e solo se } T(\lambda v + \mu u) = \lambda T(v) + \mu T(u) \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall u, v \in V$$

~ Esempi

1) $\text{Id}: V \rightarrow V \quad \text{Id}(v) = v$ è lineare

2) $0: V \rightarrow W \quad 0(v) = 0_W$ applicazione nulla è lineare

3) B base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di spazio vettoriale V

$$\Phi_B: V \rightarrow K^n \quad \Phi_B(v) = \text{vettore delle coordinate di } v \text{ nella base } B$$

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$\Phi_B(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \Phi_B(v)$$

$$\begin{aligned} \Phi_B(\lambda v + \mu u) &= \Phi_B(\lambda(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + \mu(b_1 v_1 + \dots + b_n v_n)) = \\ &= \Phi_B((\lambda a_1 + \mu b_1)v_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)v_2 + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n)v_n) = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n + \mu b_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda \Phi_B(v) + \mu \Phi_B(u) \end{aligned}$$

4) $A \in M_{n \times k}(\mathbb{K})$ l'applicazione $L_A: \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^n$

$$v \mapsto A \cdot v = L_A(v)$$

L_A è lineare \leadsto è l'applicazione associata alla matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \quad L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ -x+z \end{pmatrix}$$

5) $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è lineare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+t \\ z \end{pmatrix} \leadsto \text{esiste una matrice}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ t.c. } L_B = T$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = L_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Teorema

Siano V e W due spazi vettoriali definiti su un campo \mathbb{K} , e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V di dimensione finita.
Dati $w_1, \dots, w_n \in W$ elementi arbitrari di W , allora esiste ed è unica un'applicazione lineare $T: V \rightarrow W$ tale che

$$T(v_1) = w_1$$

$$T(v_2) = w_2$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = w_n$$

EsPLICITAMENTE su $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ si ha

$$T(v) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n) = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$$

~Esempio

$$T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$\{1, x, x^2\}$ base di $\mathbb{R}_2[x]$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} T(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \leftarrow T \text{ è definita da}$$

$$T(P) = ? \quad P = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$T(P) = a_0T(1) + a_1T(x) + a_2T(x^2)$$

$$= a_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_0 + a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$T(x - 3x^2) = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 3 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

~Definizione

V, W spazio vettoriale su K e $T: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare

Si definisce nucleo di T l'insieme degli elementi del dominio V che hanno come immagine mediante T lo zero di W (il vettore nullo)

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W = 0\} \subseteq V$$

Si definisce immagine di T il sottoinsieme del codominio che ha per elementi tutti e soli i vettori di W che sono immagine, mediante T , degli elementi di V

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ per cui } T(v) = w\} \subseteq W \\ &= \{T(v) \in W \mid v \in V\} \end{aligned}$$

~Proposizione

$T: V \rightarrow W$ applicazione lineare

1) Il nucleo $\text{Ker}(T)$ è un sottospazio vettoriale di V

2) T è iniettivo se e solo se $\text{Ker}(T) = \{0\}$, cioè se e solo se T ha nucleo banale

3) L'immagine $\text{Im}(T)$ è un sottospazio vettoriale di W

4) T è suriettivo se e solo se $\text{Im}(T) = W$

PS: Funzione iniettiva \rightarrow se a ogni coppia di elementi distinti del dominio sono associate immagini distinte nel codominio

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

funzione suriettiva \rightarrow se ogni elemento del codominio è un'immagine di almeno un elemento del dominio

$$\forall y \exists x \quad f(x) = y$$

~Proposizione

$\ker(T)$ \leadsto risolvere sistema lineare omogeneo

$T: V \rightarrow W$ app. lineare $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

allora $\text{Im}(T) = \text{span}\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ cioè $T(v_1), \dots, T(v_n)$ sono generatori di $\text{Im}(T)$

Se $\ker(T) = \{0\}$ allora $T(v_1), \dots, T(v_n)$ sono linearmente indipendenti

~Definizione

$T: V \rightarrow W$ applicazione lineare tra spazio vettoriale

Il rango di T è $\text{rk } T = \dim(\text{Im}(T))$

~Osservazione

A matrice $\in M_{n,n}(\mathbb{K})$

L_A applicazione lineare associata

$\text{rk } L_A = \text{rk } A = n^\circ \text{ pivot} =$ dimensione spazio vettoriale generato dalle colonne di A
 $=$ dimensione spazio vettoriale generato dalle righe di A

$A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ Possiamo pensare le righe di A come vettori di \mathbb{K}^n

$\text{span}(A_1, \dots, A_n)$ spazio vettoriale generato dalle righe di A

~Teorema

$A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ $\text{rk } A = \text{rk}(^t A)$

~Teorema : nullità + rango

$T: V \rightarrow W$ applicazione lineare $\dim V = n < +\infty$

Allora $\dim V = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$

~Corollario

$T: V \rightarrow W$ applicazione lineare V, W di dimensione finita $\dim V = \dim W$

Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:

1) T è iniettiva

2) T è suriettiva

3) T è biunivoca (cioè invertibile)

~Esempio

$$L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ definita da } L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x - y + 2z$$

$$\mathbb{R}^1 \supseteq \text{Im } L \neq \{0\} \text{ Quindi } \text{Im } L = \mathbb{R} \quad \dim(\text{Im } L) = 1$$

$$\text{Il teorema nullità + rango dice che } \dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Im } L) + \dim(\text{Ker } L) \\ 3 = 1 + \dim(\text{Ker } L)$$

$$\text{Quindi } \dim(\text{Ker } L) = 2.$$

Per trovare una base di $\text{Ker } L$

$$\text{Ker } L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ x = k \\ y = 3k + 2h \\ z = h \end{cases}$$

$$\text{Ker } L = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k, h \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$\{v_1, v_2\}$ è una base di $\text{Ker } L$

$$A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \quad L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ v \mapsto Av$$

$$\text{se } \text{Ker } L_A = \text{Ker } A = \{0\}$$

$$\text{dal corollario } \text{Im } L_A = \mathbb{R}^n$$

Quindi L_A è invertibile, cioè A è invertibile

~Proposizione

$$U, V, W \text{ spazi vettoriali} \quad F: U \rightarrow V \quad G: V \rightarrow W \\ \text{applicazioni lineari}$$

Allora $G \circ F: U \rightarrow W$ è lineare.

In particolare, se $A \in M_{k,n}(\mathbb{K})$ $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ allora

$$L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$$

$$L_B: \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$w \mapsto A \cdot w$$

$$v \mapsto B \cdot v$$

$$L_A \circ L_B: \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^k$$

La matrice associata a $L_A \circ L_B$ è la matrice $A \cdot B$

$L_A \circ L_B$ è lineare

$$\text{Quindi } L_A \circ L_B = L_{A \cdot B}$$

Proposizione

Sia $F: U \rightarrow V$ applicazione lineare invertibile (biunivoca) con inversa $F^{-1}: V \rightarrow U$. Allora F^{-1} è lineare.

In particolare, se $A \in M_{n,n}(K)$ invertibile $L_A: K^n \rightarrow K^n$ allora $(L_A)^{-1}: K^n \rightarrow K^n$ è tale che $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$.

La matrice associata alla funzione inversa è l'inversa della matrice.

Definizione

Un'applicazione lineare biunivoca è detta isomorfismo.

Due spazi vettoriali V, W su K si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo tra V e W .
 $V \cong W$

Esempi

1) $\Phi_B: V \rightarrow K^n$ V spazio vettoriale $\neq \{0\}$ B base è isomorfismo

2) V spazio vettoriale $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base L'applicazione $\Phi_B: K^n \rightarrow V$ definita da

$$\Phi_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \quad \text{MAPPA DI PARAMETRIZZAZIONE}$$

è un isomorfismo, ed è l'inversa dell'applicazione Φ_B .

3) $\text{Id}: V \rightarrow V$ mappa identità $\text{Id}(v) = v$ è un isomorfismo

4) $M_{k,n}(K)$ è uno spazio vettoriale, è isomorfo a $M_{n,k}$

$t_a: M_{k,n} \rightarrow M_{n,k}$ trasposizione è un isomorfismo

$M_{k,n}(K)$ è isomorfo a $K^{n \times k}$ $T: M_{k,n}(K) \rightarrow K^{n \times k}$

$$A = (A^1, A^2, \dots, A^n) \rightarrow T(A) = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \text{ è isomorfo}$$