Serie numeriche e geometriche

mercoledì 22 settembre 2021 11:48

Una somma numerica è un oggetto di questo tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

a_n è una successione di numeri reali

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Esempio di serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} h^n = h + h^2 + h^3 + \cdots + h^n + \cdots$$

$h \in \mathbb{R}$

Questo esempio è chiamato: **serie geometrica**.

Un altro esempio di serie è il seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Questa è definita come **serie armonica**.

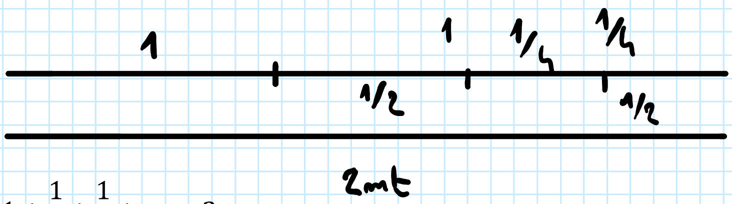
Esempio di Zenone 400 a.C. (?)

$t_0)\ x_0 < x_1$

$t_1)\ x_0 + x_1\ x_2$

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t_n$$

Altro esempio di serie geometrica



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \qquad \left(h = \frac{1}{2}\right)$$

Definizione

Una successione di numeri reali $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice serie di termine generale $\{a_n\}$, e si denota con

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

La successione così definita:

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$\{S_n\}$ è detto **successione delle somme parziali**, oppure successione delle ridotte $n-me$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$S_1 = 1 \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Definizione

Si dice che una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente (rispettivamente divergente o oscillante) quando $\{S_n\}$ è convergente alla somma della successione delle somme parziali (rispettivamente divergente, oscillante).

La somma della serie è uguale al limite della successione delle somme parziali $\{S_n\}$.

$$S \coloneqq \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Se il limite è $+\infty$ la serie si dice divergente positivamente.
Se il limite è $-\infty$ la serie si dice divergente negativamente.
Se il limite non c'è la serie di dice oscillante.

Proprietà

Se abbiamo una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
a_n si dice termine generale della serie.
Questa condizione si dice necessaria ma non sufficiente, poiché non è esaustiva nel caso una serie non sia convergente.

Il viceversa non è mai vero, ad esempio:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \ldots ma \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Dimostrazione

$a_n + 1$
$S_{n+1} - Sn = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_n + 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n$
Semplificando ci rendiamo conto che $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$
$\lim_{n\to\infty} a_n + 1 = \lim_{n\to\infty} S_n + 1 - \lim_{n\to\infty} Sn = S - S = 0$

Studiamo la seguente sommatoria:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$
Il termine generale non è infinitesimo, per cui questa serie non converge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \quad \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$
Neanche in questo caso converge.

Studio della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1 + h + h^2 + \cdots + h^n + \cdots \qquad h \in \mathbb{R}$$

$h = 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1$

$h \neq 0 \rightarrow S_n = 1 + h + h^2 + h^3 + \cdots + h^{n-1}$

$S_1 = 1, S_2 = 1 + h, S_3 = 1 + h + h^2$

$$S_n = 1 + h + h^2 + \cdots + h^{n-1} = \frac{1 - h^n}{1 - h}$$

Si dimostra con il principio di induzione

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-h^n}{1-h} = \frac{1}{1-h}$$

-1 e 1 non sono compresi

$-1 < h < 1$

$0 < h < 1 \quad \lim_{n\to\infty} h^n$

$Se\ h = \frac{1}{2} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to 0} h^n = 0 \quad \lim_{n\to 0} S_n = \frac{1}{1-h}$$

- Se h si trova tra -1 e 1… $h \in (-1,1)$ *allora* $\sum_{n=0}^{\infty} h^n = \frac{1}{1-h}$
- Se $h = \frac{1}{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$
- Se $h = 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty},\ quindi\ \ h^n = 1$
- Se $h > 1 \quad \lim_{n\to\infty},\ quindi\ \ h = +\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-h}\ se\ -1 < h < 1 \\ +\infty\ se\ h \geq 1 \\ oscillante\ se\ h \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \lim_{n\to\infty} \{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$h = 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1 + \cdots + 1 + \cdots = +\infty$$

$$h = -1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$S_1 = 1, S_2 = 1 - 1 = 0$

$S_2 = non\ si\ saprà\ mai\ perché\ non\ ho\ fatto\ in\ tempo$ 😄

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1 + h + h^2 + \cdots + h^n + \cdots = regione\ della\ serie$$

$S_n = 1 + h + h^2 + \cdots + h^{n-1}$

$Se\ h \neq 1$ allora $\Rightarrow \frac{1-h^n}{1-h}$

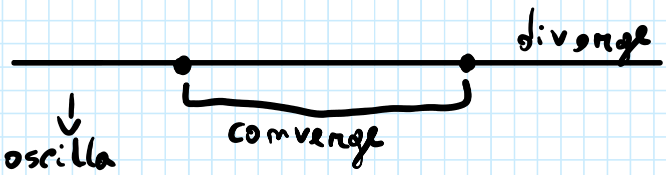
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} +\infty\ se\ h = 1 \\ \dfrac{1}{1-h}\ se\ -1 < h < 1 \\ +\infty\ se\ h > 1 \\ non\ esiste\ se\ h \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} h^n = \begin{cases} 0 & se\ -1 < h < 1 \\ 1 & se\ h = 1 \\ +\infty & se\ h > 1 \\ oscillante & h \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1$$

diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = Se \in \mathbb{R} \Rightarrow_{\not\Leftarrow} \lim_{n\to\infty} a_n > 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =? +\infty$$

Serie a termini non negativi.

Essa è sempre regolare!
Ricordiamo le successioni monotone

a_n si dice monotona quando il numero che lo precede è più piccolo di quello che lo segue.
$a_n \geq 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \sum_{n=0}^{\infty} h^n, h > 0, \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \geq 0 \qquad \cos\frac{1}{n} \leq 1 \qquad 1-\cos\frac{1}{n} \geq 0$
$a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in N$ monotona crescente n
$a_n \geq a_n + 1, \forall n \in N$ monotona decrescente $\frac{1}{n}$

$\{a_n\}$ crescente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n \ (n \geq 1)$ $\frac{n}{n+1} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ecc.$
$\{a_n\}$ decrescente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n \ (n \geq 1)$ $\frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ecc.$

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 - 1 + \cdots + a_{n+1} \geq 0$$
$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \sup_{n\geq 1} S_n \in [0; +\infty] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$
Possiamo dedurre che questa serie può soltanto divergere, non convergere.

Criterio del confronto

Adesso vengono alcune caratterizzazioni che riguardano le serie a termine non negativo
La prima proprietà importante è chiamata "**criterio del confronto**", chiamato anche "**criterio dei carabinieri**".
$b_n < a_n < c_n$
Se b_n diverge positivamente, allora anche a_n divergerà positivamente. $[b_n \to +\infty \Rightarrow a_n \to +\infty]$
Se invece abbiamo che c_n diverge negativamente, allora anche a_n divergerà negativamente. $[c_n \to -\infty \Rightarrow c_n \to -\infty]$

$$a_1 \leq b_1 \ e \ a_n \leq b_n$$
Il criterio del confronto dice che, supponiamo che abbiamo due serie a termine non negativo:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad a_n, b_n \geq 0$$
e $a_n \leq b_n$

*) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$
Una serie che è maggiorata da un'altra serie convergente è pur essa convergente
Cosa succede quando a_n diverge positivamente?
**) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \ \to \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

*) $\quad S_n = a_1 + \cdots + a_n \qquad a_1 \leq b_1 \quad a_n \leq b_n$
$\quad T_n = b_1 + \cdots + b_n$

Quindi $S_n \le T_n$, per cui $\lim_{n\to\infty} T_n < +\infty$, che diventa…

$$\sup_{n\ge 1} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty} T_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

con $s_n \le T_n$

**) $T_n \ge S_n \to +\infty \Rightarrow T_n \to \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} lim = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to c$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^{\log}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \log c = 1$$

$$n\log\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$\log(n+1) - \log n < \frac{1}{n} \Rightarrow confronto \sum \frac{1}{n} = +\infty$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log 2 - \log 1 + \log 3 - \log 2 + \log(n+1) - \log n = \log(n+1) \to +\infty$$

$$S_n \to +\infty$$

Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 = S$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n}$$

$$a_n \ge 0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0; +\infty]$$

- Se $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge
- Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge positivamente
- Se $l = 1 \Rightarrow$? nulla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$$

Dove $n = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Quindi possiamo dire che in questo caso è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2 > 1 = +\infty$$

In questo caso diverge positivamente

Criterio del rapporto $a_n > \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = l \in [0, +\infty] \qquad \begin{cases} l < 1 \Rightarrow convergente \\ l > 1 \Rightarrow divergente \\ l = 1 \Rightarrow ?\, inutile \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = -\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \qquad \frac{2}{3} < 1$$

$$\left[\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} & a_n \cong b_n \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1(n+1)}{1(n+1)} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \end{array}\right.$$

Criterio asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Se $a_n \sim b_n$ per $n \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ e \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Hanno praticamente lo stesso carattere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}^{a_n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}^{b_n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} diverge\ se\ 0 < \alpha \leq 1 \\ converge\ se\ \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \frac{1}{n^2+n} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$$

Serie di Taylor

mercoledì 22 settembre 2021 12:19

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^3) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dalla formula di Taylor alla serie di Taylor
Sviluppiamo la serie di Taylor con l'esponenziale

Serie di Taylor di e^x in $x_0 = 0$.

$$x > 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n!}\right) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{x^n} * \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$(n+1)! = n!\,(n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n * x}{x^n} * \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0$$

Siccome il limite è minore di 1, allora <u>la serie converge</u>.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

Questa successione è davvero importante!

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \qquad a_n \to \pm\infty$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$$

Eleviamo a $\frac{n}{n}$ perché utilizziamo il criterio della radice n-esima.

$$\sqrt[n]{a_n} = a_n^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Promemoria (già è stata spiegata questa cosuccia)
$a_n, b_n \geq 0$
$a_n \sim b_n \quad ossia$
Criterio generale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ e \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Queste 2 serie hanno lo stesso carattere (se una è convergente è convergente anche l'altra e così via).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}}$$

il quadrato e n si semplificano, quindi il tutto tende a 1.
Essa si riconduce al numero di Nepero.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

Bisogna sempre ricondursi a:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$

Facciamo questo "artificio" per ricondurci alla formula

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{e}<1$$

Altro fantastico esercizio (con solo il termine generale)

$$a_n=\frac{n^n}{3^n n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\,(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n\,n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\,(n+1)!}*\frac{3^n\,n!}{n^n}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{n!}{n!\,(n+1)}=\frac{1}{n+1}$$

Quindi...

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1$$

Anche questa serie è convergente.

Altra serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n}}$$

A priori bisogna vedere a chi tende il termine generale

$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1, quindi \neq 0, per\ cui\ tende\ a +\infty.$

Esercizi da fare

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n}}$
- *...e altre che non so riuscito a scrivere*

Altra serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-\frac{2}{3}n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{\frac{2}{3}n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{n} \to \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

Quindi questa serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \cos\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{2}} = \frac{1}{2}$$

La serie converge

Ricordiamo il limite notevole

$\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$

$x \to 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\cos n| \frac{3^n}{4^{n+1}} * |\cos n| \frac{3^n}{4^{n+1}} \leq \frac{3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

La serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{1+\cos^2 n}}{3^n}$$

PS: il coseno sta tra -1 e 1

$|\cos n| \leq 1 \to \cos^2 n \leq 1 \to \sqrt{1+\cos^2 n} \leq \sqrt{2}$

$\frac{n\sqrt{1+\cos^2 n}}{3^n} \leq \frac{\sqrt{2}n}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}} * \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3}$$

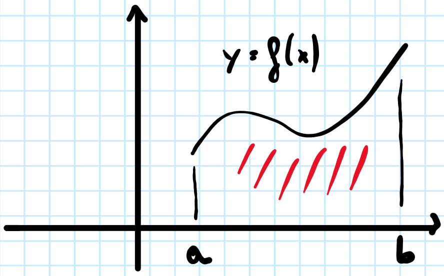
La serie converge e per il criterio del confronto converge anche quell'altra

Integrali generalizzati (impropri)

mercoledì 29 settembre 2021 10:55

f:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

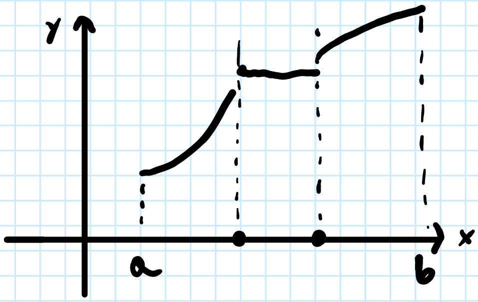


$f \geq 0$?

Se l'estremo superiore si dice superiore a quello superiore inferiore, allora la funzione si dice integrabile secondo Riemann.

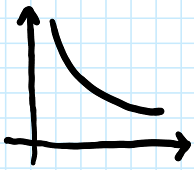
Se la funzione è continua, allora la funzione è integrabile secondo Riemann.

Le funzioni continue sono sempre integrabili secondo Riemann, cioè quelle monotone.
Ricordiamo che essere possono anche risultare come discontinue (di prima specie).
Se ad esempio abbiamo una funzione monotona crescente:



Consideriamo invece una funzione in intervallo $[0,1]$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \left(2\sqrt{x}\right)_0^1 = 2$$

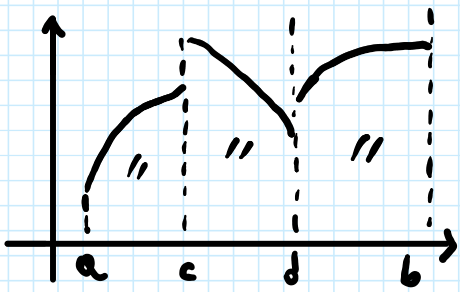
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

Integrale di una funzione non definita in un punto

Definiamo gli integrali generalizzati (o impropri)
Esempi:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx \ ?$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \ ?$$



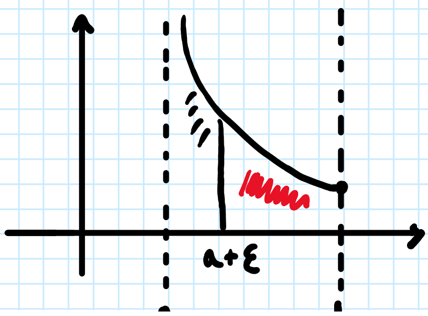
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c - + \int_c^d - + \int_d^b -$$

Supponiamo...

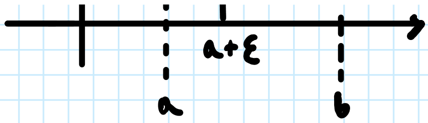
$f = f(x)$ continua in $(a, b\,]$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

$$\int_a^b f(x)dx$$



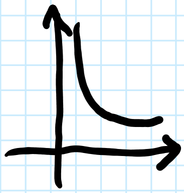
$$\int_a^b f(x)dx$$
$\epsilon > 0$



$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

Definizione
Se esiste $\int_a^b f(x)dx$ finito, $f(x)$ si dice integrabile in senso improprio e l'integrale in $\int_a^b f(x)dx$ si dice integrale improprio o integrale generalizzato di $f(x)$.

Esempio



$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\epsilon \to 0} [\log x]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} (\log 1 - \log \epsilon) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

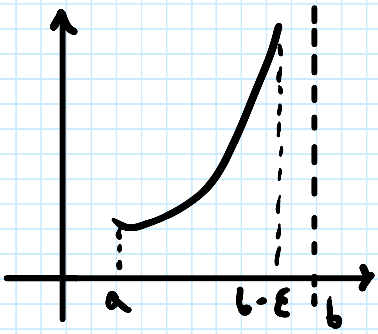
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{x}{1-\alpha}\right)_\epsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\epsilon \to 0^+} (1 - \epsilon^{1-\alpha})$$

Quando $1 - \alpha > 0$, allora si dice che $\alpha < 1$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\epsilon^{\alpha-1}} \to +\infty, \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1 \\ +\infty, \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Esempio
$f = f(x)$, continua in $[a, b)$
$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

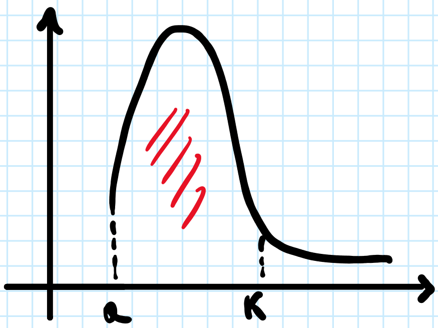


$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \in [-\infty, +\infty]$$

Esempio

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^\alpha}$$ $\alpha > 0$ $[1,2]$

$$f(x) = \frac{1}{|x-1|^\alpha}$$ $\alpha > 0$ $[1,2]$



$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \ ?$$

$f(x)$ continua in $[a, +\infty)$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$$\int_a^k f(x)dx$$

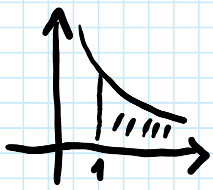
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_a^k f(x)dx$$
Questo si chiama integrale improprio.

Esempio

$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad [1,+\infty)$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{k\to\infty}\int_1^k\frac{1}{x^2}dx = -\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)_1^k = \lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right) = 1$$

Abbiamo beccato un esponente per il quale l'integrale è finito



$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$$

Per $\alpha = 1$, $\int_1^\alpha \frac{1}{x}dx = \lim_{k\to\infty}\left(\int_1^k\frac{1}{x}dx\right) = \lim_{k\to+\infty}\log k = +\infty$

Per $\alpha \neq 1$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)_1^k = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{k\to\infty}(k^{1-\alpha}-1) = \frac{1}{\alpha-1}$

Per $\alpha < 1$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = +\infty$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, \alpha>1\\ +\infty, \alpha\leq 1\end{cases}$$

$f(x) \quad (-\infty, a]$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Ad esempio

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{k\to-\infty}\int_k^a f(x)dx$$

Criteri di integrabilità al finito

$o \leq f(x) \leq g(x) \quad (a,b]$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$

1) Se $g(x)$ è integrabile $\Rightarrow$ $f(x)$ è integrabile
2) Se $f(x)$ non è integrabile $\Rightarrow$ $g(x)$ non è integrabile

$o \leq f(x) \leq g(x) \; [a,+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

g integrabile in $[a,+\infty]$ ⇒f integrabile $[a,+\infty]$

f non integrabile in $[a,+\infty]$ ⇒g non integrabile

$$\int_a^k f(x) \leq \int_a^k g(x) \to (per\ k\to\infty) \to \int_a^\infty g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\int_a^k f(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Criterio asintotico

$f(x), g(x) \ge 0 \; in \; (a,b]$

$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$

Se $f \sim g$ per $x \to b^-$

f integrabile ⇔ g integrabile (l'integrabilità di uno implica l'integrabilità dell'altro)

[PS: per rendere una funzione >= 0 possiamo semplicemente utilizzare i valori assoluti]

Esempio

Verifichiamo se il seguente integrale converge.

Questa funzione non è definita nel punto $x = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)}} * \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)}} * \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^{\frac{1}{3}}}}\right)$$ è integrabile

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^2)}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}} * \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}} * \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$$

Per il criterio asintotico $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ è integrabile

Esempio nel caso in cui la funzione cambia di segno

Bisogna controllare l'integrale del valore assoluto.

$\int |f(x)| dx$

Se $|f|$ è integrabile, f si dice <u>sommabile</u> oppure <u>assolutamente integrabile</u>.

Quindi se f è assolutamente integrabile, f è integrabile in senso improprio

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ se $\frac{1}{x} = f(x)$

$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}}\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$

E' integrabile in $(0,1]$ ⇒ per il criterio del confronto $\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}$ ...

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} < +\infty \; per \; \alpha > 1 \\ = +\infty \; per \; \alpha \le 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^\alpha} \; [1,+\infty) \begin{cases} intgrabile \; se \; \alpha > 1 \\ non \; integrabile \; se \; \alpha \le 1 \end{cases}$$

$\alpha > 2$
$1 < \alpha < 2$

$\frac{1}{x}$

$$\int_1^4 \frac{1}{x} dx = \int_1^2 - + \int_2^3 + \int_3^4 - \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$\int_1^N \frac{1}{x} dx \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N-1} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} = S_{N-1}$$

$$N \to +\infty \quad \int_1^N \frac{1}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$$
$$\lim_{N \to +\infty} S_N = +\infty$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^2 - + \int_2^3 - + \int_3^4 \square \geq \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$
$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx \geq \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{N^\alpha} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$$

Quindi cosa succede quando $N \to +\infty$?
$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty$ quando $\alpha > 1$
$$S_N \leq \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx$$
Criterio del confronto $\Rightarrow \lim_{N \to \infty} S_N < +\infty$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ **converge per** $\alpha > 1$

Serie convergenti e non

venerdì 1 ottobre 2021 13:38

Risolviamo

$$\sum_{n=1}^{a} a_n$$

$a_n \geq 0 \quad a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$

Serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

Esempio di serie armonica

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \ \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \quad |\log n| \geq 0$$

Criterio di Leibniz

$a_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\ a_n : se\ a_n \to 0\ per\ n \to 0\ e\ \{a_n\}$ è strettamente decrescente $(a_n >\neq a_n + 1)$ allora la serie è convergente, ed inoltre, dette S la somma della serie, si ha $|s_n - s| \leq a_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

l'errore che si commette approssimando S con la somma dei primi n termini è minore uguale $\leq$ al valore assoluto del primo termine trascurato.

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_n + 1$$

La serie <u>converge</u>!

$$|S_n - S| \leq \frac{1}{100} \ : |S_n - S| \leq a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(\leq \frac{1}{100} \right)$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow n + 1 \geq 100 \ \Leftrightarrow n \geq 100 - 1 = 99$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \left(\frac{n-1}{n^2+n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2+n} = 0$$

$$a_n > a_n + 1 : \frac{n-1}{n^2+n} > \frac{n}{(n+1)^2+n+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n(n+1)} > \frac{n}{(n+1)(n+1+1)}$$

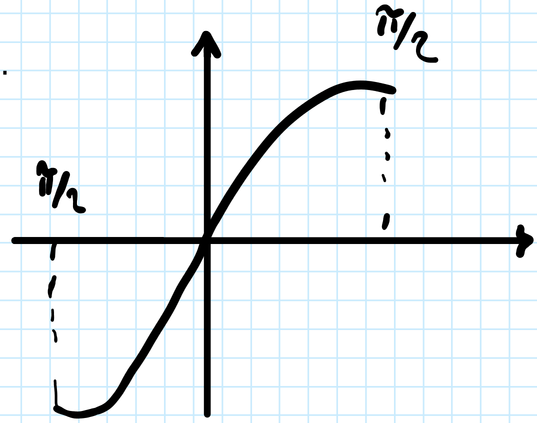
$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n} > \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow (n-1)(n+2) > n^2 \Leftrightarrow n^2+2n-n-2 > n^2 \Leftrightarrow n > 2$$

Allora la serie converge

Altra serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$\sum(-1)^{n-1} = 1-1+1-1\ldots$



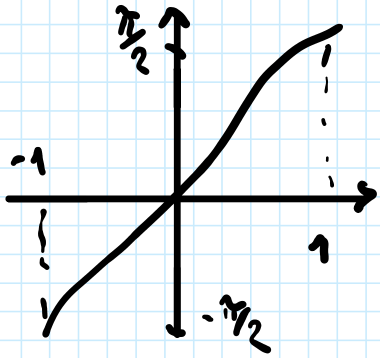
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n}} > \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 < \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \sin\frac{1}{\sqrt{n}} > \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \arcsin\frac{1}{n}$$



$$\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{n} = 0 \ : \ \frac{1}{n} \leq 1$$

$$\mathrm{a_n} = \arcsin\frac{1}{n} > \arcsin\frac{1}{n+1} = a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ \left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim a_n = \lim\left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right) = 1 - \lim n\sin\frac{1}{n} = 1 - \lim\frac{\sin\frac{1}{n}}{\ldots} = 0$$

PS:

$\sin x$

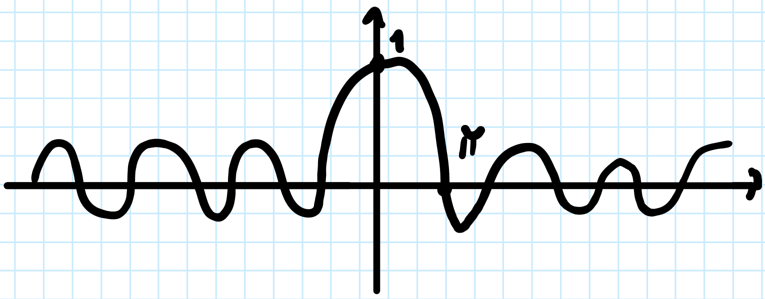
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 0$$

PS:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$a_n >\neq a_n + 1 \Leftrightarrow 1 - n\sin\frac{1}{n} > 1 - (n+1)\sin\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n\sin\frac{1}{n} < (n+1)\sin\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < \frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x};\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$$

$$x \neq 0 : \sin x = 0 \ \Leftrightarrow x = k\pi, k \in$$



$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < \frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}$$

Esercizio da fare

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)$$

Convergenze assolute

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \in \mathbb{R}$$

Definizione

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \in \mathbb{R}$ si dice assolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$ è convergente.

Prop. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente ma $\Longrightarrow\not\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ convergente

$$\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right| = |(-1)^n|\ \left|\frac{1}{n}\right| = 1 * \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow$ la serie a segni alterni non converge assolutamente!!!

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x \qquad x > 0$$

$x \in \mathbb{R}$ La serie dei valori assoluti è $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!} < +\infty \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge assolutamente, per cui converge.

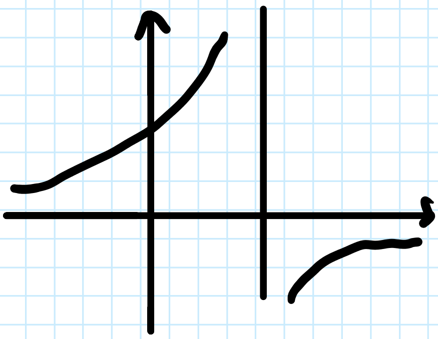
Serie di potenze

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$
$$1 + h + h^2 + h^3 + \cdots + h^n + \cdots$$

$h \in \mathbb{R}$

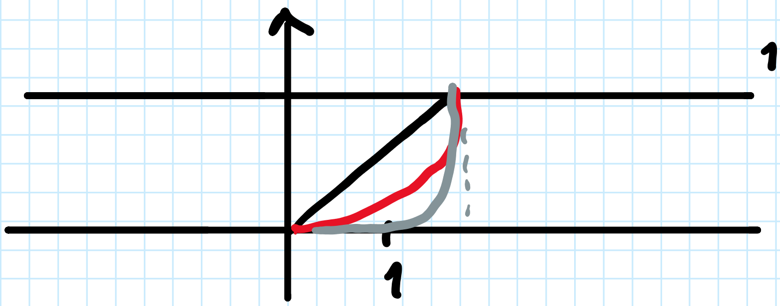
$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$|x| < 1 \quad f_n(x) = x^n$



Serie di funzioni:

$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, \dots, f_n(x) = x^{n-1}$



$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

Serie di funzioni

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definizione

Si dice serie di funzioni di termine generale $f_n(x)$, e si dimostra con $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

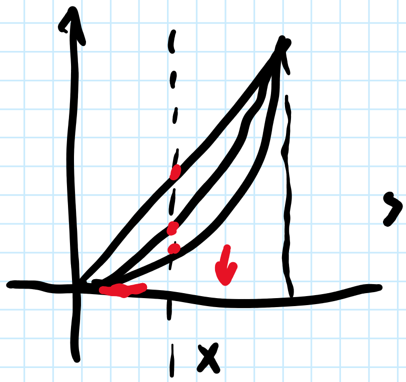
La seguente successione:
$s_1 = f_1; s_2 = f_1 + f_2; \dots; s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$

$\{s_n\}$ successione di funzioni
che prende il nome di successione delle somme parziali della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Definizione
Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente in I se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge $\forall x \in I$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall x \in (-1,1) = \frac{1}{1-x}$$



$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente $\Leftrightarrow$
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge $\forall x \in I \Leftrightarrow$
$sn(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ è convergente per ogni $x \in I$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente in I, definiscono la sua funzione somma:
$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \quad \forall x \in I$
e porremo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

Questa è definita come **convergenza puntuale**

Definizione (convergenza assoluta)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Converge assolutamente in I, se $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ <u>converge puntualmente</u> in I.

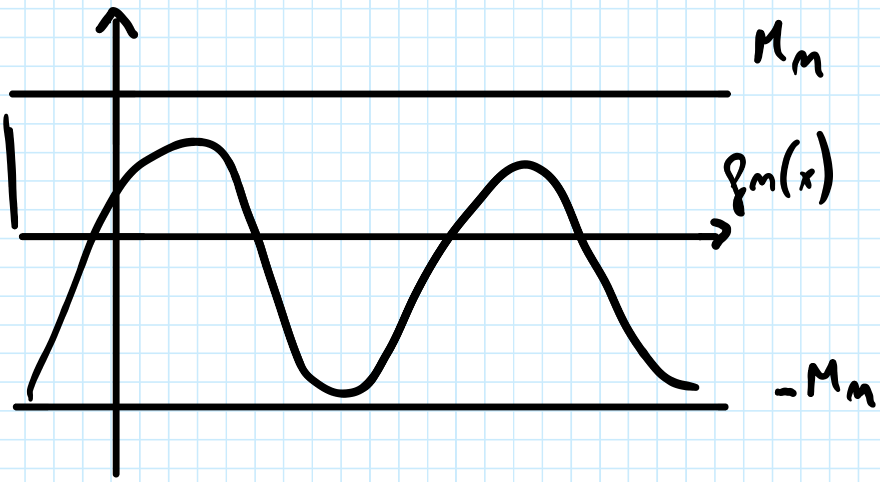
Osservazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

Converge assolutamente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty \;\; \forall x \in I \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ convergente, $\forall x \in I \Rightarrow \;\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente in I

Convergenza assoluta $\Longrightarrow\not\Leftarrow$ convergenza puntuale

In I se $\exists \{M_n\}, M_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ tale che $|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in I \;\; \forall n \in \mathbb{N}$



Osservazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

Converge totalmente

$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$$

$\Rightarrow$ criterio del confronto $\Rightarrow \;\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ convergenza assoluta

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge p..

Convergenza totale $\Longrightarrow\not\Leftarrow$ convergenza assoluta

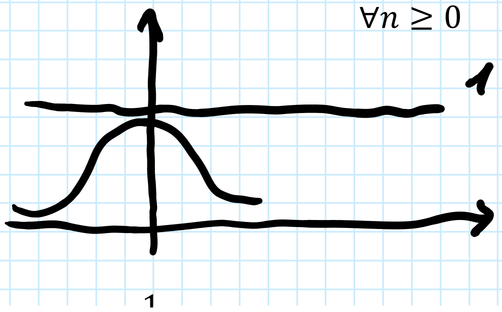
Convergenza totale $\Longrightarrow\not\Leftarrow$ convergenza puntuale

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$\forall n \geq 0$



$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$f_2(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$x = 0 \quad f_n(x) = 1$

$x \neq 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 0$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x = 0 \\ 0 \; se \; x \neq 0 \end{cases}$

$$x = 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = +\infty$$
$$x \neq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x^2} = f(x)$$

$$\frac{1}{1+x^2} <\neq 1$$

$\forall x \neq 0$

Converge totalmente?

$|f_n(n)| \leq M_n \quad \sum M_n < +\infty$

$\frac{1}{(1+x^2)^n} \leq M_n \quad \forall x \neq 0$

$\Rightarrow (x \to 0)(?) \quad 1 \leq M_n$

Dimostrato per assurdo poiché

$\lim_{n\to\infty} M_n = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad -1 < x < 1$$

Serie di potenze

$1 + (x - x_0) + (x - x_0)^2 + \cdots + (x - x_0)^n + \cdots$

Supponiamo di voler mettere qualcosa davanti alle parentesi che non sia 1.

$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \ldots, a_n = \frac{1}{n!} \qquad x_0 = 0$

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+1)^n \to x\big(x-(-1)\big)$$

$a_n = 2^n, x_0 = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (2x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n * 2^n \left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

$\boldsymbol{x_0} = \frac{1}{2}$ (<u>punto iniziale della serie</u>)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Serie di potenze di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$

$\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$

<u>Osservazione</u>

$$x = x_0 : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0$$

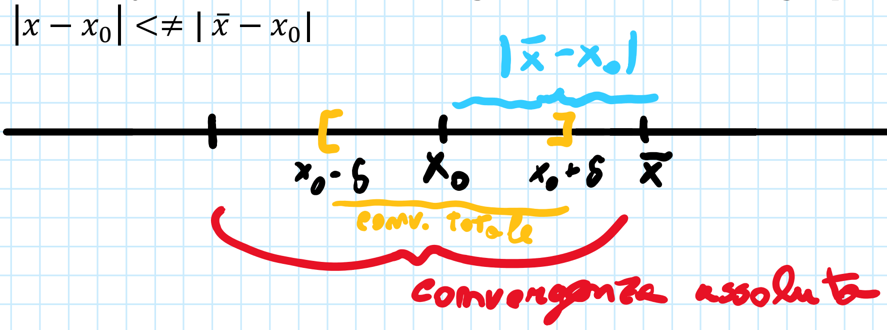
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Somma di Abel

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ converge

In $\bar{x} \neq x_0$: allora la serie converge assolutamente in ogni punto x tale che

$|x-x_0| <\neq |\bar{x}-x_0|$



$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |x-x_0|^n < +\infty$$

Inoltre, la serie converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[x_0-\delta, x_0+\delta]$,
dove $\delta <\neq |\bar{x}-x_0|$

Dimostrazione

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ convergente

Per ipotesi : allora, $\lim_{n\to\infty} |a_n| \, |x-x_0|^n = 0$

$\Rightarrow \left\{|a_n||\bar{x}-x_0|^n\right\}$ limitata

$|a_n||\bar{x}-x_0|$

Serie x tale che $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$

Voglio dimostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |x-x_0|^n < +\infty$

$$|a_n||x-x_0|^n = |a_n||\bar{x}-x_0|^n \left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n \leq M\left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n$$

$$h_x = \frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|} < 1$$

Da $M\left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n$: $|a_n||x-x_0|^n \leq M\, h_x^n$
$\sum_{n=0}^{\infty} h_x^n < +\infty$ perché $h_x < 1$
$\Rightarrow$ la $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x-x_0|^n$

E' maggiorata da una serie convergente, per cui dal criterio del confronto converge.

Sia $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta], \delta < |\bar{x}-x_0|$: quindi, $|x-x_0| \leq \delta$

$$|a_n||x-x_0|^n \leq M\left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n \leq M\left(\frac{\delta}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n$$

$$h = \frac{\delta}{|\bar{x}-x_0|} < 1 : |a_n||x-x_0|^n \leq M\, h^n \;\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

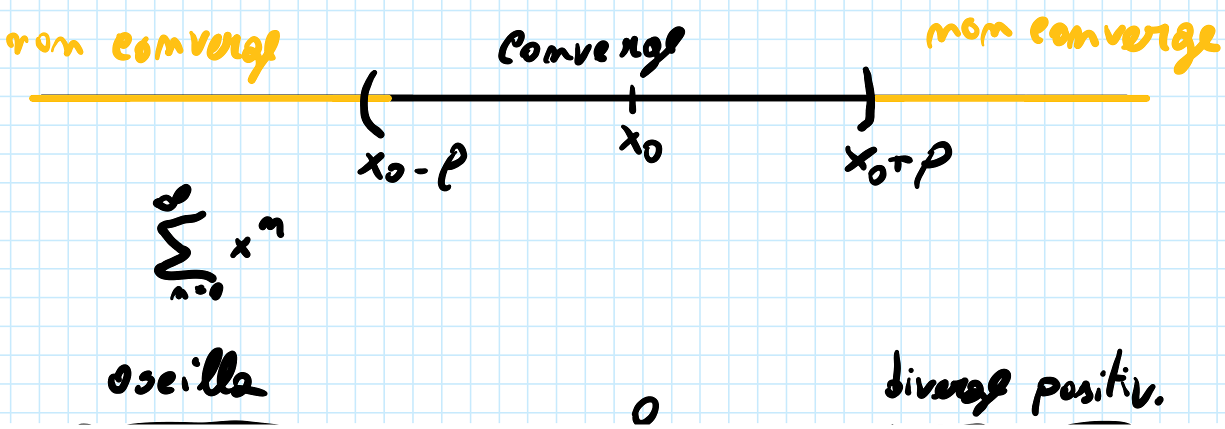
dove $\sum_{n=0}^{\infty} h^n$ è convergente.
$\Rightarrow$ la serie converge totalmente in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

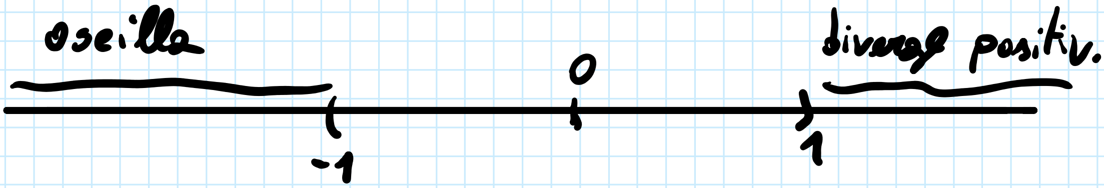
$\sum x^n \quad (-1,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad (x_0-\rho, x_0+\rho)?$$

$\rho = rho > 0$

Teorema (enunciazione)
Per una serie di potenza come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, si verifica una delle seguenti eventualità:
1) la $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge solo per $x = x_0$
2) la $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge per ogni punto $x \in \mathbb{R}$
3) esiste un numero $\rho > 0$ tale che la $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, non converge quando $|x-x_0| >\neq \rho$



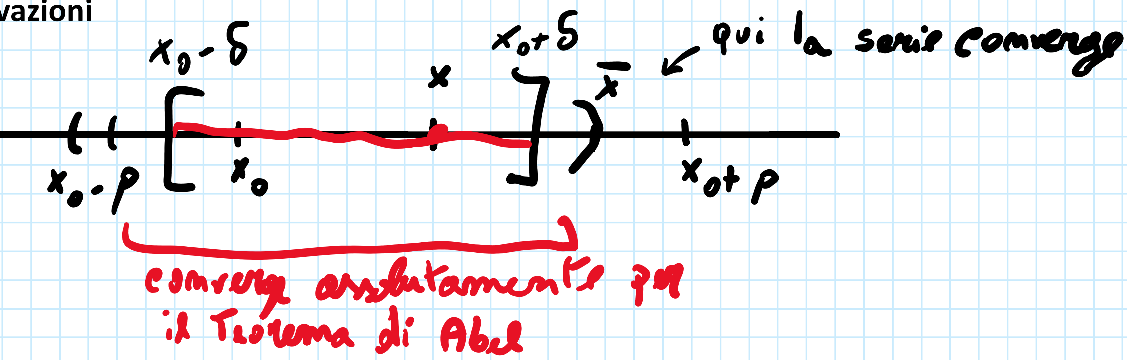


$x = x_0 \pm \rho$? <u>Nulla si può dire a priori!!!!!!!!!!</u>

Definizione
ρ =raggio di convergenza della $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$
ρ = 0 in ipotesi 1
ρ = +∞ in ipotesi 2

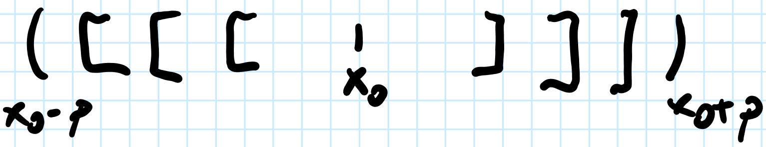
In generale $\rho \in [0, +\infty]$
Nell'ipotesi 3, l'intervallo $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ si chiama intervallo di convergenza

Osservazioni
$\rho > 0$



<u>Prima osservazione</u>
La serie converge assolutamente nell'intervallo di convergenze.

<u>Seconda osservazione</u>
Se < ρ, dal Teorema di Abel, la serie converge totalmente in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$



$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n} x$$

Teorema di Cauchy-Hadamard

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{|a_n|} =: l$$

Allora, ρ = raggio di convergenza

$$= \frac{1}{l} = \begin{cases} +\infty & l = 0 \\ \in (0, +\infty) \\ 0 & l = +\infty \end{cases}$$

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 * x^n \quad a_n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \qquad \rho = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \ x^n \qquad a_n = 2^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$$

$\rho = \frac{1}{2}$: l'intervallo di convergenza è $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ 3^n \ \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$$

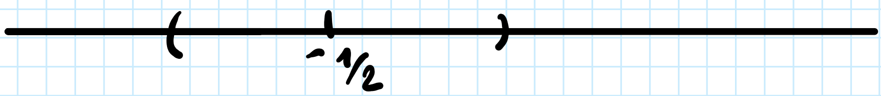
$$x_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n \ 3^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = 3 \qquad |(-1)^n| = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = 3$$

$$\rho = \frac{1}{3}$$

$$(x_0 - \rho, x_0 + \rho) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$



Esiste un <u>criterio del rapporto</u> che dice il raggio di convergenza

Teorema di D'Alembert

$$\mathrm{l} := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n + 1}{a_n}\right|$$

Vale la tesi del criterio della radice:

$$\rho = \frac{1}{l}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right| = \rho$$

Esempi

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \;\; x^n \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \qquad \rho = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \;\; 3^n \;\; x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\,3^{n+1}}{(-1)^n\,3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$$

$$\rho = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \rho = 0 \qquad +\infty$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = 0$$

$$\rho = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n \qquad \rho = 0$$

Questa serie converge solo per $x_0 = 0$

Esempio

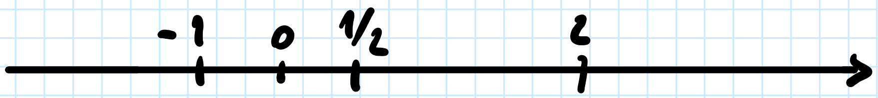
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{3^n+1}$$

$$a_n = \frac{2^n}{3^n+1} \qquad x_0 = \frac{1}{2}$$

Radice $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{3^n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$$\rho = \frac{3}{2}$$

$$(x_0-\rho, x_0+\rho) = \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) = (-1{,}2)$$



Agli estremi?

$x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2-1)^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{3^n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \frac{3^n}{3^n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+1} = 1 \neq 0$$

$x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+1} = +\infty$$

Nuova lezione

Calcolare l'insieme di convergenze puntuale e totale di

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (\log x)^{2n}$$

$x > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left[(\log x)^2\right]^n$$

$y = \log^2 x$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n y^n \quad y_0 = 0$ $\qquad a_n = 2^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$$

$p = \frac{1}{2}$ raggio di convergenza

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n y^n$ converge $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La serie originariamente converge quando

$$\log^2 x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \log^2 x < \frac{1}{2}$$

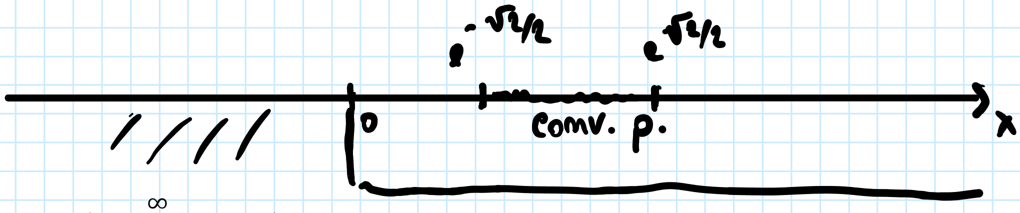
$$\Leftrightarrow \log^2 x < \frac{1}{2}$$

$$t = \log x, \qquad t^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \log_e x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} < x < e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Converge puntualmente in $\left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$



$$y=\frac{1}{2}: \sum_{n=0}^{\infty} 2^n * \frac{1}{2^n} = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \log^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = e^{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

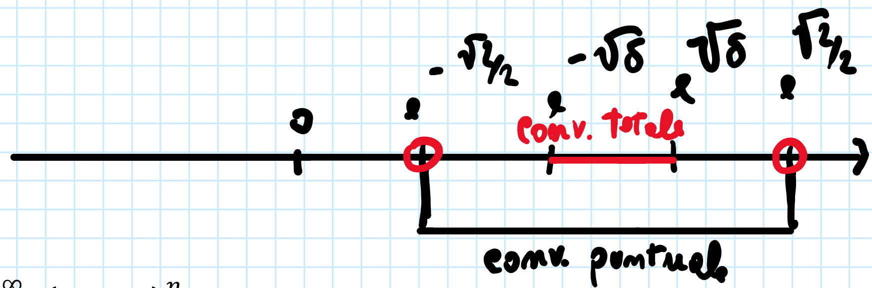
Convergenza totale : la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, y^n$ converge totalmente per $y \in [-\delta,\delta], \delta < \frac{1}{2}$

$y_0 - \delta, y_0 + \delta \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \log^2 x \le \delta \;\Leftrightarrow -\sqrt{\delta} \le \log x \le \sqrt{\delta}$

$\Leftrightarrow e^{-\sqrt{\delta}} \le x \le e^{\sqrt{\delta}}$

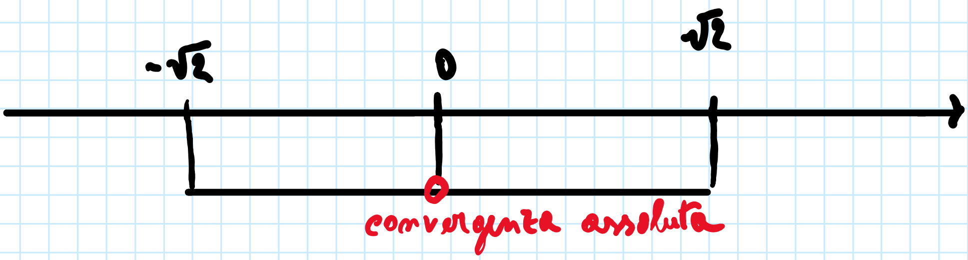
$\left[e^{-\sqrt{\delta}}, e^{\sqrt{\delta}}\right] \rightarrow$ *convergenza totale*



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n} \qquad y = 1 - x^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Questa serie converge assolutamente per $y \in (-1,1)$.
Quindi bisognerà scrivere $-1 < 1 - x^2 < 1$
$\Leftrightarrow -1 < x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 2 \Leftrightarrow x \neq 0$ e $x^2 < 2$
$\Leftrightarrow x \neq 0, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$



Convergenza agli estremi:

$$y=-1:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ \mathit{converge}$$

$$1-x^2=-1\ \Leftrightarrow x^2=2\ \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$$y=1:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

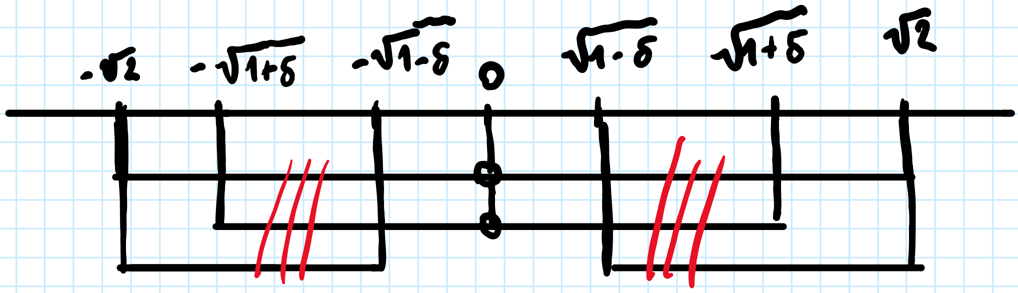
$$1-x^2=1\ \Leftrightarrow x^2=0\ \Leftrightarrow x=0\ \ \boldsymbol{non\ converge}$$

Convergenza totale: si ha quando $y\in[-\delta,\delta], 0<\delta<1$
$-\delta\le 1-x^2\le\delta$

Risolviamo la disequazione

$$\begin{cases}1-x^2\ge-\delta\\ 1-x^2\le\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\le 1+\delta\to interna\\ x^2\ge 1-\delta\to esterna\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{1+\delta}\le x\le\sqrt{1+\delta}\\ x\le-\sqrt{1-\delta}\ \cup x\ge\sqrt{1-\delta}\end{cases}$$



Convergenza totale: $x\in\left[-\sqrt{1+\delta},-\sqrt{1+\delta}\right]\cup\left[\sqrt{1-\delta},\sqrt{1+\delta}\right]$
$0<\delta<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n\qquad\sum_{n=0}^{\infty}y^n\quad serie\ geometrica$$

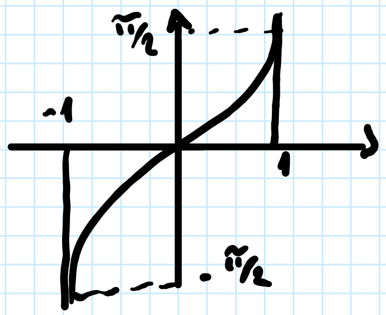
$-1<y<1$

$$-1<\frac{x-1}{x}<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{n!\,(n+1)}(\arcsin x)^n$$

$y=\arcsin x$

$-1\le x\le 1$



$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n!\,(n+1)}\,(y)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+3}}{(n+1)!\,(n+2)}}{\frac{\sqrt{n+2}}{n!\,(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{(n+1)!\,(n+2)} * \frac{n!\,(n+1)}{\sqrt{n+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)} = 0, \qquad p = +\infty$$

la serie in y converge $\forall y \in \mathbb{R}$
la serie in x converge assolutamente in $[-1,1]$

Convergenza totale della serie in y: $[-\delta,\delta], \delta > 0$ qualsiasi
$|\arcsin x| \leq \delta, \delta = \frac{\pi}{2}$
$|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1,1]$
$\Rightarrow$ la convergenza è totale in $[-1,1]$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n+\log n}$$

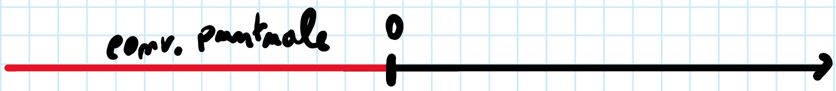
$y = e^x, x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n+\log n} \qquad a_n = \frac{1}{n+\log n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)+\log(n+1)}}{\frac{1}{n+\log n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+\log n}{(n+1)+\log(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

$p = 1$: la serie converge puntualmente per $y \in (-1,1)$
$\Leftrightarrow -1 \leq e^x \leq 1 \;\Leftrightarrow e^x < 1 \;\Leftrightarrow x < 0$



$y = 1$?
$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

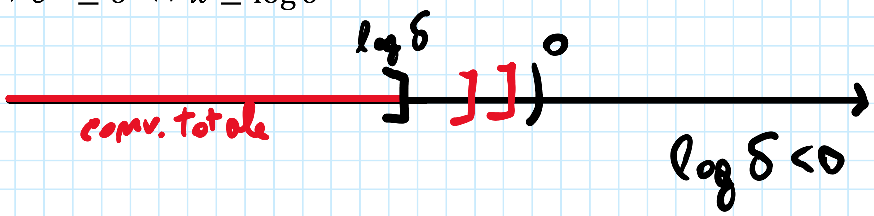
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\log n} \approx \frac{1}{n} \quad \frac{\frac{1}{n+\log n}}{\frac{1}{n}} \to 1$$

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

$\Rightarrow$ criterio asintotico $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\log n} = +\infty$

Convergenza totale: per la serie in y, la convergenza è totale per $y \in [-\delta, \delta], 0 < \delta < 1$

$\Leftrightarrow e^x \leq \delta \ \Leftrightarrow x \leq \log \delta$



Esercizio da fare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[n^2\left(x^2-1\right)\right]^n}{(n+1)^{2n}} \qquad \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n = f(x) \quad \rho > 0$$

$(x_0-\rho, x_0+\rho) \quad \{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$

$0 + a_1 + 2\,a_2(x-x_0) + \cdots + n\,a_n\,(x-x_0)^{n-1} + \cdots$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(x-x_0)^{n-1}$$

Integrando $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n\ x$ termine a termine in (x_0, x)

$$\int_{x_0}^{x} a_1\,(t-x_0)dt = a_1\left[\frac{(t-x_0)^2}{2}\right]_{x_0}^{x} = \frac{a_1}{2}\,(x-x_0)^2$$

$$a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}\,(x-x_0)^2 + \frac{a_2}{3}\,(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}\,(x-x_0)^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(x-x_0)^{n+1} \quad \textit{serie integrale di } (1)$$

Teorema (di derivazione e integrazione termine a termine [di una serie di potenze])

1) La serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (x-x_0)^{n-1}$ e la serie integrale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, (x-x_0)^{n+1}$ hanno raggio di convergenza ρ (ossia lo stesso raggio della serie iniziale).
2) La somma della serie derivata è la derivata della somma, ossia:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (x-x_0)^{n-1}, \forall x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, (x-x_0)^{n+1}, \forall x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$
$$= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$
$$f'(x) = 0 + a_1 + 2\, a_2(x-x_0) + 3\, a_3(x-x_0)^2 + \cdots + n\, a_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots$$
$$f''(x) = 2\, a_2 + 3 * 2\, a_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, (x-x_0)^{n-2} \ldots$$

$f \in c^{\infty}$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1) * (n-2) * \cdots * \big(n-(k-1)\big) * a_n * (x-x_0)^{n-k}$$
$$= k * (k-1) * (k-2) * \cdots * 3 * 2 * 1 * a_k + \cdots (x-x_0) + (x-x_0)^2 \ldots$$
$$f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$$

$$dove\ a_k = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = f(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x-x_0)^n = f(x)$$

Serie di Taylor di f, di punto iniziale x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x-x_0)^n$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\, (x-)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x-x_0)^n + \cdots$$

Domande

$f \in c^{\infty}$, posso dire che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x-x_0)^n$
in un intorno di x_0???

Definizione

Sia $f \in c^{\infty}\ (I)$, I intorno di x_0 si dice che f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0, se vale la serie (*) in I:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)} x_0}{n!}\, (x-x_0)^n, \forall x \in I$$

Osservazione

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \; se \; x \neq 0 \\ 0 \; se \; x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$

Se $x \neq 0 : f'(x) = \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} > 0 \; (x > 0)$

Se $x \neq 0 : f'(x) = \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} < 0 \; (x < 0)$

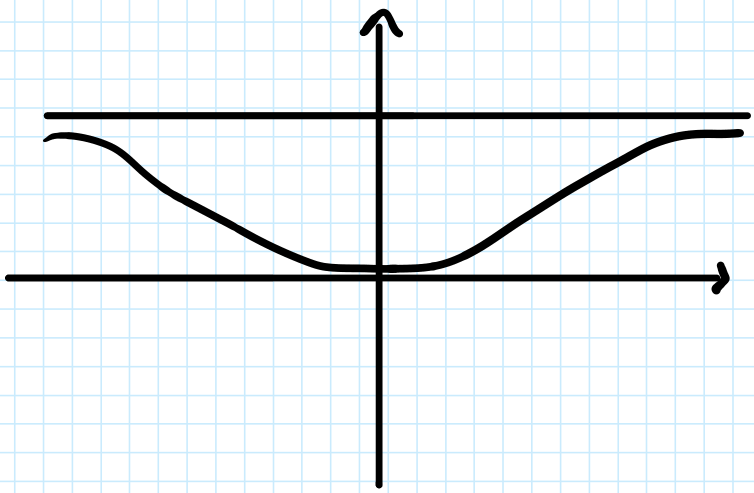
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0 , x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

$f \in c^{\infty}(\mathbb{R})$ e $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$
$\forall n \in \mathbb{N}_0$

NUMERI NATURALI, QUINDI
$\{0,1,2,3,\dots\}$



$$\sum^{x_0=0} \square$$

Serie di Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = 0 \neq f(x)$$

$\Rightarrow f$ non è sviluppabile in serie di Maclaurin

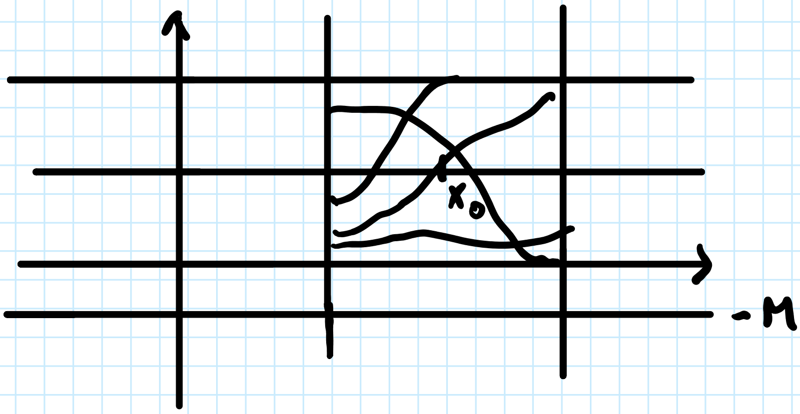
<u>Condizioni sufficienti per lo sviluppo in serie di Taylor</u>

$f \in c^{\infty}(I), I$ intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo che $\exists\, M, h > 0$ tale che
$|f^{(n)}(x)| \leq M\, h^n$
$\forall x \in I \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

Allora f è sviluppabile in serie di Taylor in I

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \qquad \forall \mathrm{x} \in \mathrm{I}$$

$h = 1 \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$



Esempi (sviluppi notevoli)

$f(x) = e^x \quad f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$

$x \in [-\delta, \delta]: \left|f^{(n)}(x)\right| = e^x \leq e * \delta = M$

$x \leq \delta$

⇒ sviluppabilità in serie di Maclaurin

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in [-\delta, \delta], \forall \delta$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f''''(x) = \cdots ?$

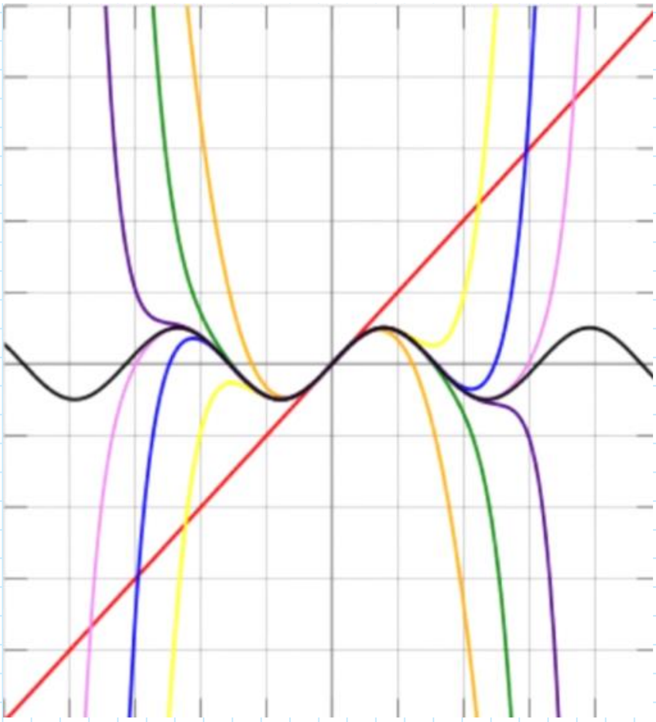
$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 1, f''''(0) = 0, \ldots$

$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1 = M \Rightarrow$ è sviluppabile in serie di Maclaurin

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}]]$$

$\forall x \in \mathbb{R}$



$f(x) = \cos x$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1,1)$$

$x \leftrightarrow -x$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$[\log|1+t|]_{t=0}^{t=x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$x \in (-1,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Converge (serie armonica a segni alterni)

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$x \leftrightarrow -x^2 \quad x \in (-1,1)$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \left(-x^2\right)^2 + \cdots + \left(-x^2\right)^n + \cdots$$

$$= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{5} + \cdots + (-1)^n$$

$$(\arctan \square)_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

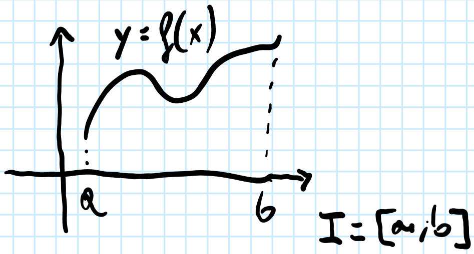
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in (-1,1)$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Converge secondo il criterio di Leibniz

Funzioni di più variabili

lunedì 11 ottobre 2021 18:55



Introduzione al concetto

Finora si è stati abituati a studiare le funzioni di una sola variabile, ad esempio:

$y = f(x), x \in I$

$g_f = \{(x, f(x)) : x \in I\}$

Di queste funzioni, si sa disegnare il grafico grazie al concetto di derivata per studiare la monotonia, il minimo, il massimo, eccetera... (sese)

Le funzioni di due o più variabili sono strutturate in questo modo

$f(x, y)$

$f(x, y, z)$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Le linee e le curve nei grafici saranno di una quantità pari al numero delle variabili specificate.

$(x, y) \in X \subseteq \mathbb{R}^2$

$f : (x, y) \in X \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y)$

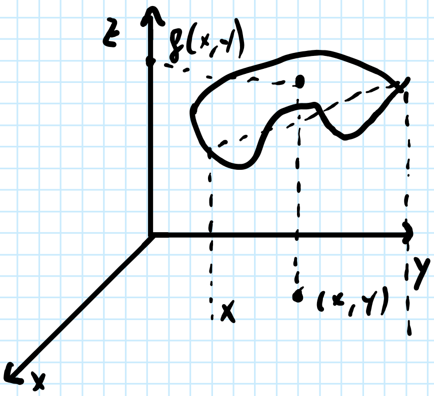
Dove X è il dominio di f.

Di conseguenza, $g_f = \{((x, y), f(x, y)) : (x, y) \in X\} = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in X\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Superficie in $\mathbb{R}^3$ (codiminio)

$z = f(x, y)$

Il grafico di una funzione x,y (più o meno)



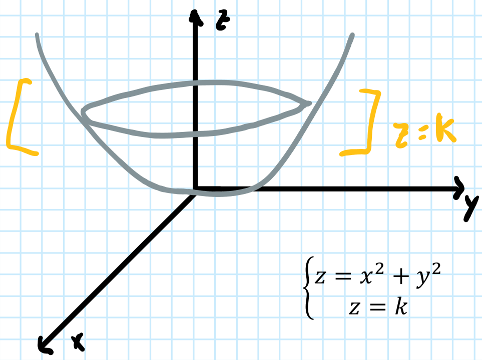
Il codominio della funzione è sull'asse z.

Il dominio è x.

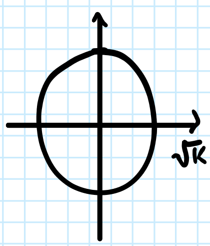
Esempi

$z = x^2 + y^2$

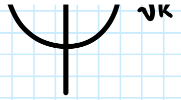
Superficie paraboloide ellittico



$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = k \end{cases}$$



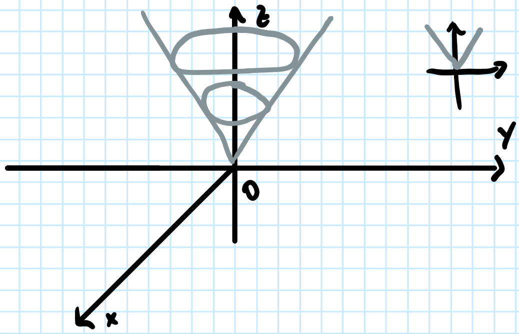
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k \\ z = k \end{cases}$$



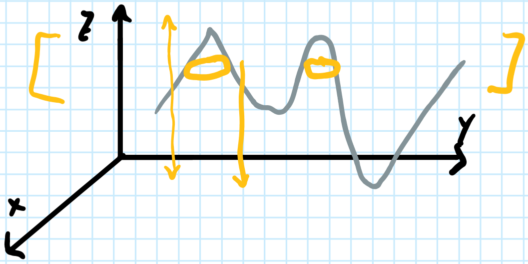
Equazione della circonferenza in $(0,0,k)$ di raggio $\sqrt{k}$.
$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Altro esempio
$z = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x,y)$
$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

L'equazione rappresenta nello spazio una superficie conica.

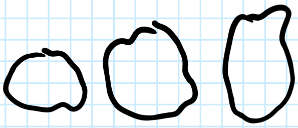


Altro esempio
$f(x,y) =$ livello della superficie terrestre rispetto al livello del mare in (x,y).

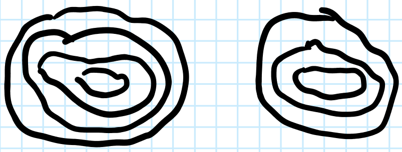


$f(x,y) = c$ costante

isoipse

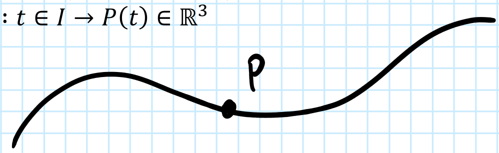


isobare



Esempini
Prendiamo in considerazione la temperatura $T(x,y,z,t)$, bisogna studiare una funzione di 4 variabili $T \in \mathbb{R}$, per cui scalare.

Funzioni vettoriali
$P(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$
$f : t \in I \to P(t) \in \mathbb{R}^3$

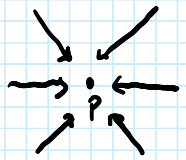


Campo di attrazione gravitazionale
$f : P \in \mathbb{R}^3 \to f(P) \in \mathbb{R}$

Campo vettoriale

$f : P \in \mathbb{R}^3 \to f(P) \in \mathbb{R}$

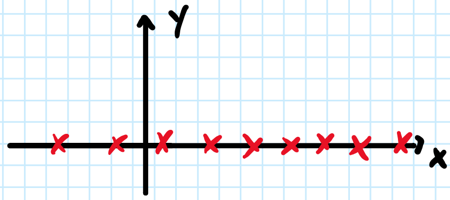
Campo vettoriale



$g_1(x,y) \quad g_2(x,y)$

$f(x,y) = \left(3x - y, \frac{4x}{y}\right)$

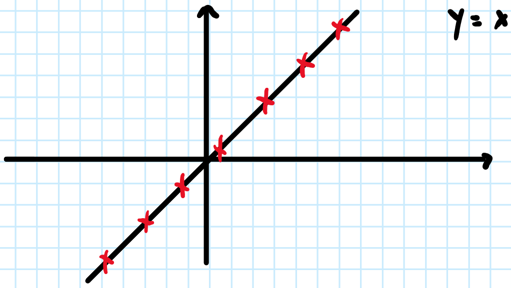
$y \neq 0$



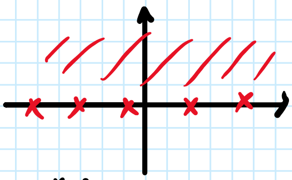
Altri esempi

$f(x,y) = \frac{1}{x-y}, y \neq x$

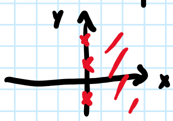
Quindi si disegna nel piano la retta $y = x$ e si tolgoo i punti



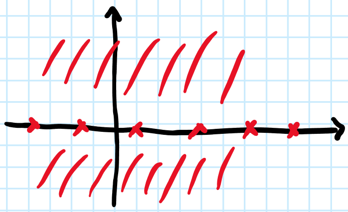
$f(x,y) = x \log y \,; y > 0$



se fosse stato $y \log x$

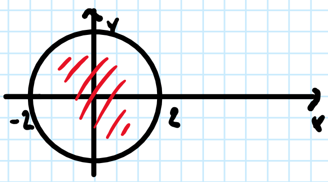


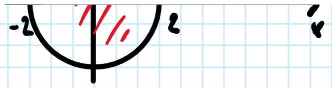
$f(x,y) = x \log |y|, \qquad y \neq 0$



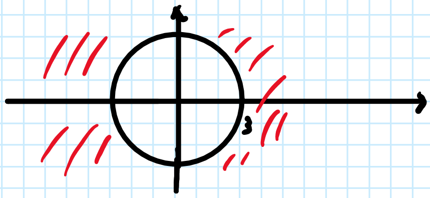
$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} : 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff 4 \geq x^2 + y^2 \iff x^2 + y^2 \leq 4$

In altre parole: $distanza\big((x,y),(0,0)\big) \leq 2$



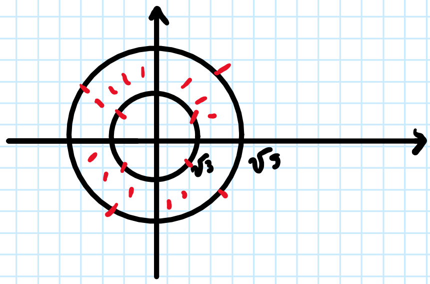


$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9} \qquad x^2+y^2-9 \geq 0 \qquad x^2+y^2 \geq 9$



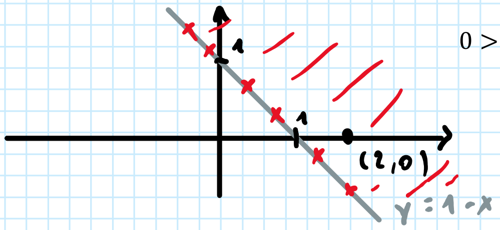
$f(x,y) = \log(x^2+y^2-9) \qquad x\text{^}2 + y\text{^}2 >\neq 9$

$f(x,y) = \arccos(x^2+y^2-4)$
$-1 \leq x^2+y^2-4 \leq 1 \qquad 3 \leq x^2+y^2 \leq 5$



$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y-1}}$$

$x+y-1>0$?
$y > 1-x$



$0 > 1-2 = -1$

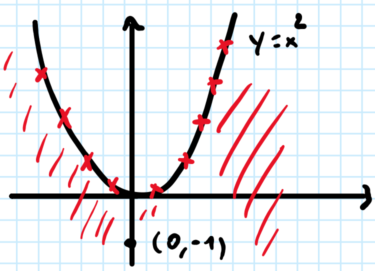
$f(x,y) = \log_a(x^4 - y^2)$
$x^4 - y^2 > 0 \Leftrightarrow \quad y^2 < x^4 \quad \not\Leftrightarrow \quad y < \pm x^2$

$(x^2)^2 - y^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-y)(x^2+y) > 0$

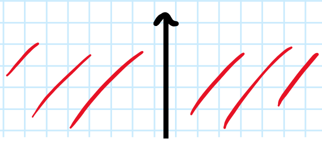
$$\begin{cases} x^2 - y > 0 \\ x^2 + y > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - y < 0 \\ x^2 + y < 0 \end{cases}$$

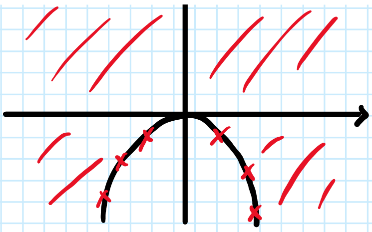
$$\begin{cases} y < x^2 \\ y > -x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} y > x^2 \\ y < -x^2 \end{cases}$$

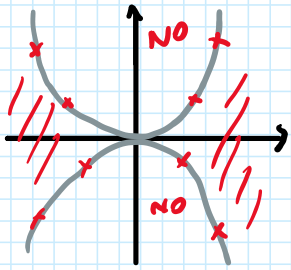
$y < x^2 \qquad y = x^2$



$y > -x^2 \qquad y = -x^2$



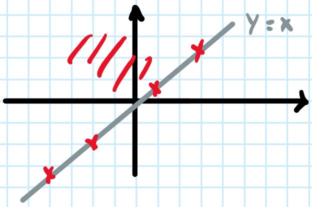


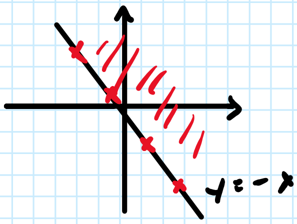


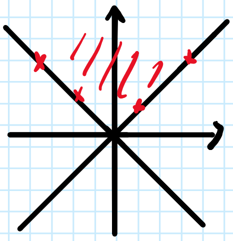
$f(x,y) = \log(y^2 - x^2)$
$y^2 - x^2 > 0 \;\not\Leftrightarrow\; y > \pm x$ *non significa nulla!*

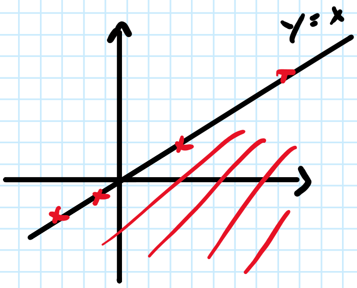
$(y-x)(y+x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y-x>0 \\ y+x>0 \end{cases} \cup \begin{cases} y-x<0 \\ y+x<0 \end{cases}$

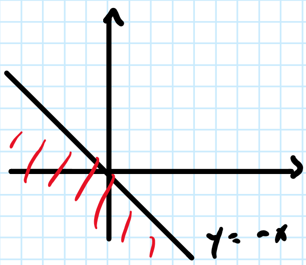
$\begin{cases} y>x \\ y>-x \end{cases} \cup \begin{cases} y<x \\ y<-x \end{cases}$

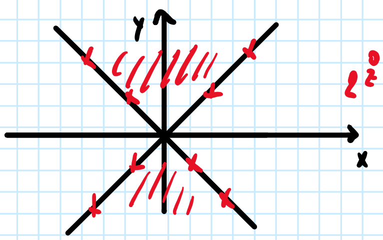












<u>Da fare</u>
$f(x,y) = \log(y^2 - x^4)$

Spazio R^n
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) x \in \mathbb{R}\}\ \forall i \leq 1; \dots; n$

$f = f(x, y)\ (x, y) \in x \subseteq \mathbb{R}^2$
$f = f(x, y, z)\ (x, y, z) \in x \subseteq \mathbb{R}^3$
$f = f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$
$x \in x \subset \mathbb{R}^n$

Tipologia di $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n$ + gruppo abeliano
$x, y \in \mathbb{R}^n, x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

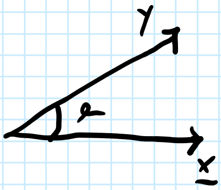
Proprietà commutativa $x + y = y + x$
Proprietà associativa $(x + y) + z = x + (y + z)$

Elemento neutro $0 = (0,0, \dots, 0)$
Elemento opposto $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n\ \exists - x = (-x_1, \dots, -x_n)$
$x + (-x) = 0$

Prodotto per uno scalare
$-\lambda\underline{x} - (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Proprietà distributiva
$\lambda\left(\underline{x} + \underline{y}\right) = \lambda\underline{x} + \lambda\underline{y}; (\lambda + \mu)\underline{x} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{y}$
$\lambda(\mu\underline{x}) = (\lambda\mu)\underline{x}; 1 * x = \underline{x}$
$\mathbb{R}^n(+,\circ)$ Spazio vettoriale

Esempio
$\underline{x} * \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$
$(1,2) * (1,4) = 1 - 8 = -7$
$\underline{x} * \underline{y} = \underline{y} * \underline{x}$
$\left(\underline{x} + \underline{y}\right) * \underline{z} = \left(\underline{x} * \underline{z}\right) + \left(\underline{y} * \underline{z}\right)$
$\underline{x} * \underline{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$
$\underline{x} * \underline{x} = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$
$\lambda\left(\underline{x} * \underline{y}\right) = \left(\lambda\underline{x}\right) * \underline{y}$
$\mathbb{R}^n$ Spazio Euclideo



$x * y = ||x||\ \ ||y||\ cos\alpha$
$||x|| = \sqrt{\underline{x} * \underline{x}}$ Norma di $\underline{x}$

$||1,2,2|| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$
$||x|| \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$
$||x|| = 0 \iff \underline{x} = 0$
$||\lambda\underline{x}|| = ||\lambda||\ ||x||\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$
$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ dis. triangolare

$|\underline{x} * \underline{y}| \leq ||\underline{x}||\ ||\underline{y}||$ **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**
$\left|\frac{\underline{x} * \underline{y}}{||\underline{x}||\ ||\underline{y}||}\right| \leq \underline{y}, \exists \alpha \in [0, \pi] : \cos\alpha = \frac{\underline{x} * \underline{y}}{||\underline{x}||\ ||\underline{y}||}$

Distanza tra due punti
$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} = ||(x_1, y_1) - (x_2, y_2)||$

$d(\underline{x}, \underline{y}) = ||\underline{x} - \underline{y}||$
$d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{x}, \underline{y})$
$d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0, d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$
$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$ Disequazione triangolare
$\mathbb{R}^n$ spazio metrico

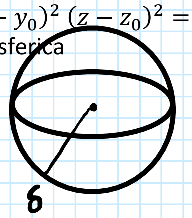
Base canonica
$\alpha_1 = (1,0,0)\ \alpha_2 = (0,1,0)\ \ \alpha_n = (0,0,0, \dots, 1)$
$\underline{\alpha_i} * \underline{\alpha_j} = 0 \quad \forall i \neq j$
$||\alpha_1|| = 1$ Base orto-normale quando è una base e si hanno due vettori, hanno prodotto scalare uguale a 0.

Intorno
$x_0 \in \mathbb{R}$ intorno di x_0
$I_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : ||x - x_0|| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

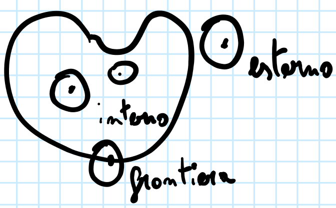
Definizione (intorno sferico)
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$
$I_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < \delta\}$

$\boldsymbol{n = 2}\ \ (x_0, y_0)\ \ \ I_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta\}$
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta^2$ circonferenza

$n = 3\ \ (x - x_0)^2\ (y - y_0)^2\ (z - z_0)^2 = \delta^2$
(x_0, y_0, z_0) superficie sferica

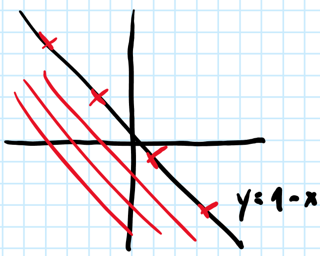


Per $n > 3$ sono



Punto interno e esterno
Definizione $z \subseteq \mathbb{R}^n$
$x_0 \in \mathrm{\mathbb{R}^n}$ interno ad x
Se $\exists \delta > 0 : I_\delta(x_0) \subseteq x$

Osservazione $\boldsymbol{x_0}$ interno ad x $\Rightarrow \boldsymbol{x_0 \in x}$
Definizione $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **esterno** ed x se x_0 è intorno a x^ϵ.
Definizione $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **frontiera** se non è interno e ne esterno ad x



Esempio
$x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$
$x + y < 1 \Leftrightarrow y < 1 - x$

x^0 insieme dei punti interni ad x
x frontiera a bordo di x è l'insieme dei punti di frontiera di x

Punti di accumulazione
Definizione $\forall \delta > 0\ \ \exists x \in x, x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta$
Definizione $\mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per x se $\forall \delta > 0, \exists x \in x, x \neq x_0\ ||x - x_0|| < \delta$

Osservazione
I punti interni sono di accumulazione

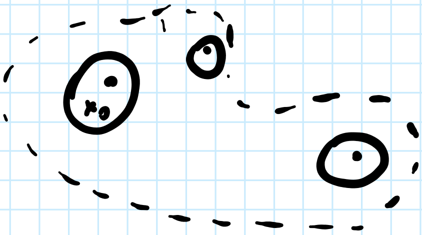
Osservazione
I punti di frontiera possono essere di accumulazione come possono non esserlo.

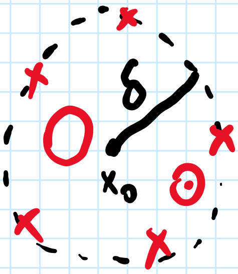
Quando non lo sono, vengono chiamati punti isolati cioè punti di frontiera ma non di accumulazione.

Insiemi, limiti e continuità

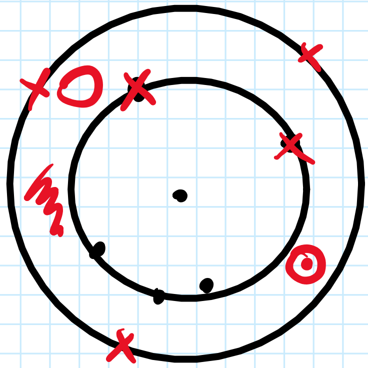
mercoledì 13 ottobre 2021 22:43

Definizione $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se ogni suo punto è interno.



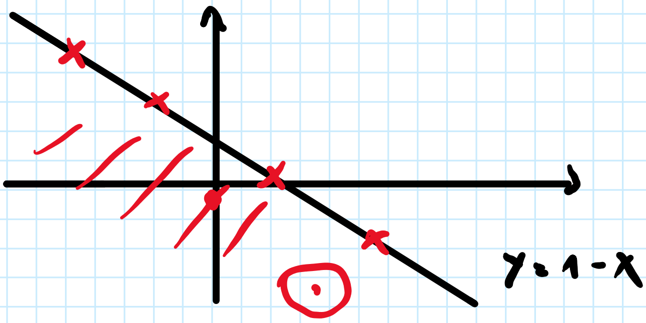


$X = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 9\}$

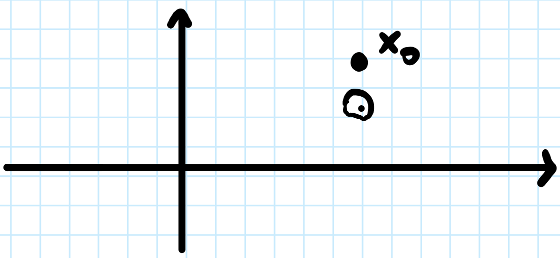


Questo insieme è aperto

$x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{x} + \mathrm{y} < 1\}$
$y < 1 - x$



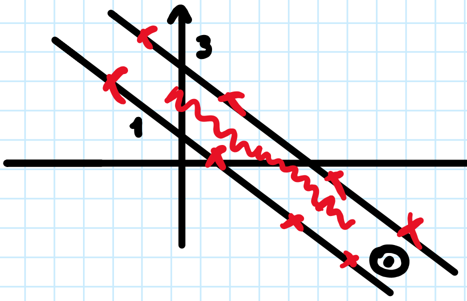
L'insieme è aperto, però se mettiamo = non lo è più.



$\mathbb{R}^2 \,|\{\mathrm{x}_0\}$
Insieme aperto

Altro esempio

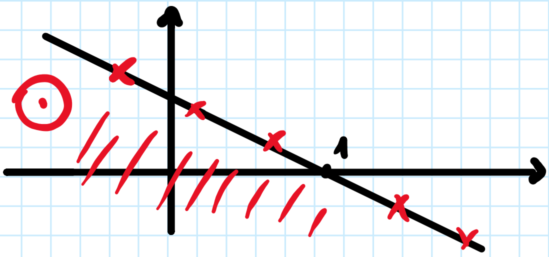
$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x + y < 3\}$
$x + y > 1 \iff y > 1 - x$



L'INSIEME É APERTO

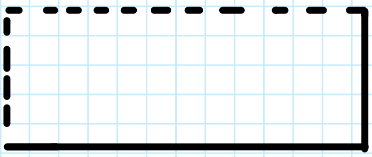
Definizione
Un insieme $X \leq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se $x^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ è aperto

Il complementare sarà la parte che sta fuori, escludendo i punti della circonferenza esterna, e in modo analogo anche quella interna (siccome è fatto da due parti).



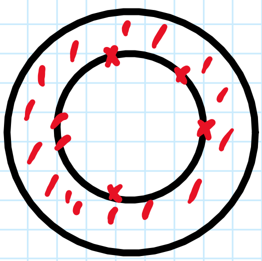
$x + y \geq 1$
$x^c := \{y < 1 - x\}$

Ci possono essere esempi che non sono ne l'uno ne l'altro
(Le parti tratteggiate non vengono considerate nell'insieme)



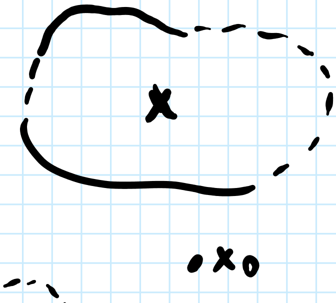
NÉ APERTO NÉ CHIUSO

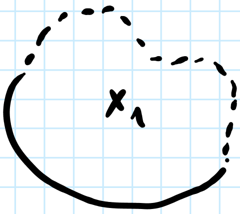
$x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}$



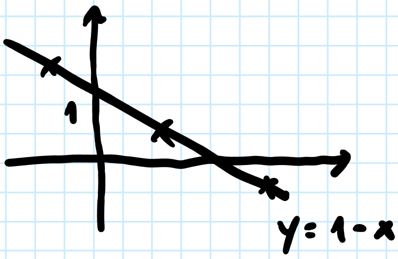
$\bar{x}$ (la chiusura) sarà la corona circolare + i punti frontiera

Definizione chiusura
$x \subseteq \mathbb{R}^n$: chiusura di X
$\bar{X} = X \cup ?X$





$X = x_1 \cup \{x_0\}$
$\bar{X} = \overline{X_1} \cup \{x_0\}$

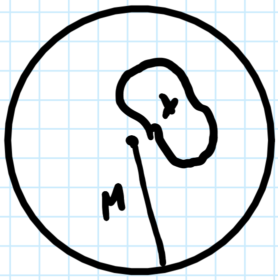


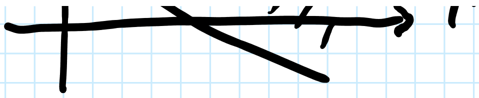
$x + y > 1$
$\bar{X} : x + y \geq 1$

$x \subseteq \bar{x}$
$\bar{x}$ chiuso, $\bar{x} \geq x$: è il più piccolo insieme chiuso che contiene x.

Definizione insieme limitato
$X \subseteq \mathbb{R}$ limitato se $\exists M > 0 : |x| \leq M, \forall x \in X$
$\Leftrightarrow -M \leq x \leq M$

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se $\exists M > 0$ tale che $||x|| \leq M, \forall x \in X$

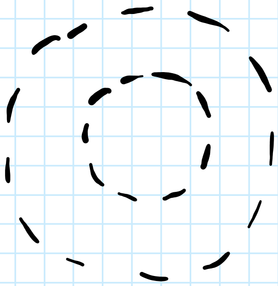




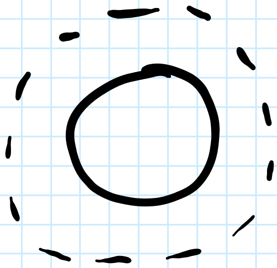
$[a, b]$ compatto di $\mathbb{R}$

Definizione

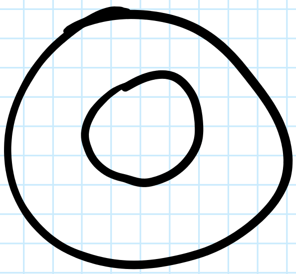
$X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **compatto** se è chiuso e limitato allo stesso tempo.



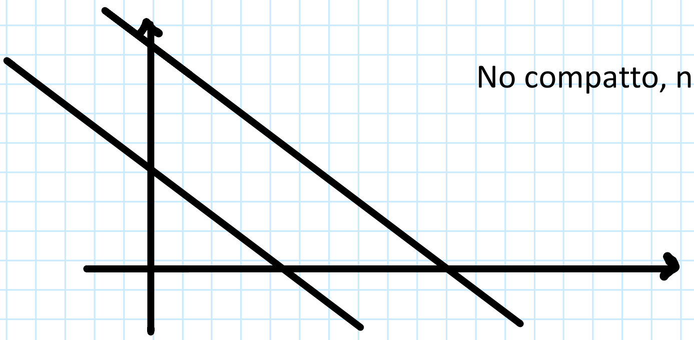
In questo esempio l'insieme è aperto, per cui non è compatto.



Neanche questo è compatto.

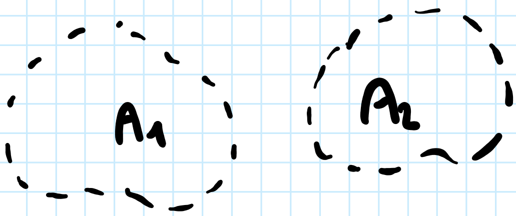


Questo sì che è compatto, siccome è chiuso e limitato!



No compatto, non limitato

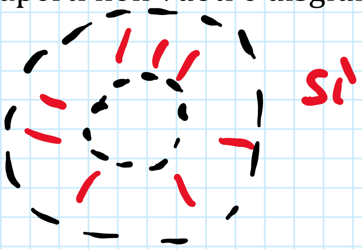
Definizione Insiemi aperti connessi



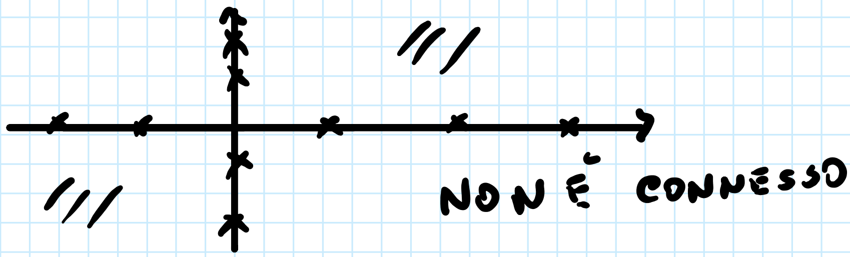
$A_1 \cap A_2 =$
$x = A_1 \cup A_2$

Un insieme si dice connesso quando è fatto soltanto da un unico blocco.

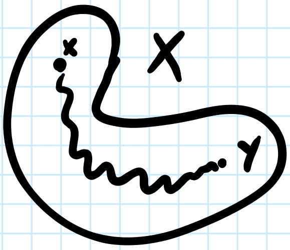
$x \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto si dice connesso se non è unione di due insiemi aperti non vuoti e disgiunti.



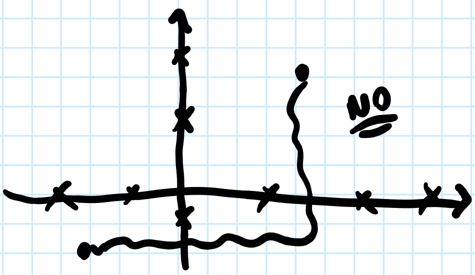
$$xy > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$



$X \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per poligonali se $\forall x, y \in X$ $\exists P$ poligonale di esterni x, y tale che $P \subseteq X$



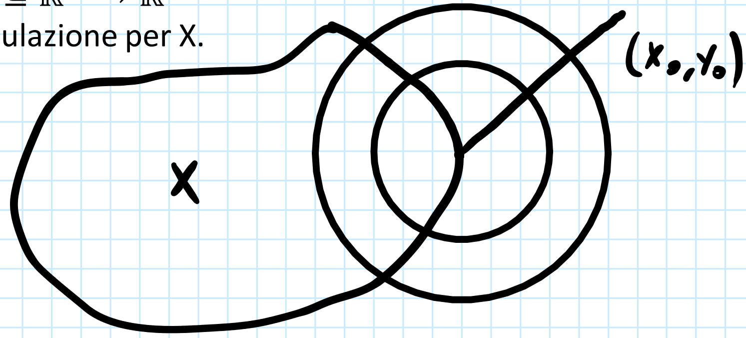
Se X aperto, allora X connesso $\Leftrightarrow$ (se e soltanto se) X connesso per poligonali.



Limiti e continuità

$f = f(x,y), f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

(x_0, y_0) di accumulazione per X.

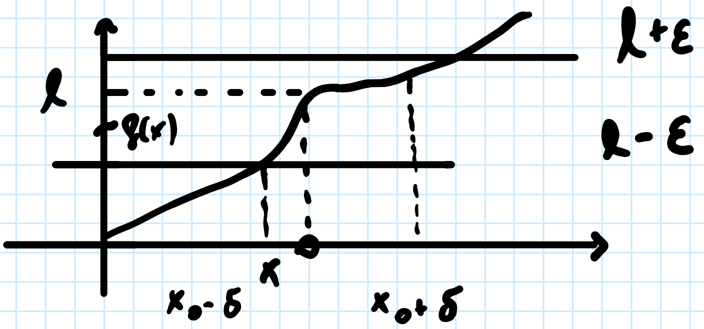


$f = f(x)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff^{definizione}$

$\iff \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in I, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$



Definizione

Si dice che $f(x,y)$ tende ad $l \in \mathbb{R}$ per $(x,y) \to (x_0, y_0)$

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l$

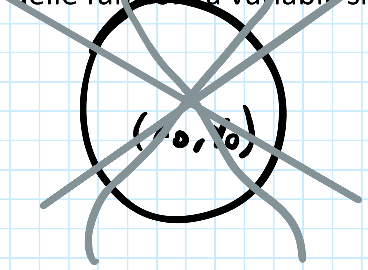
$\iff^{definizione} \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in X, (x,y) \neq (x_0, y_0)$

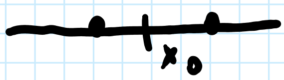
$\left\| (x,y) - (x_0, y_0) \right\| < \delta$

$\Rightarrow |f(x,y) - l| < \epsilon$

[Deve esistere almeno un punto diverso da (x_0, y_0)]

Ci sono delle differenze molto importanti rispetto ai limiti delle funzioni a variabili singole.





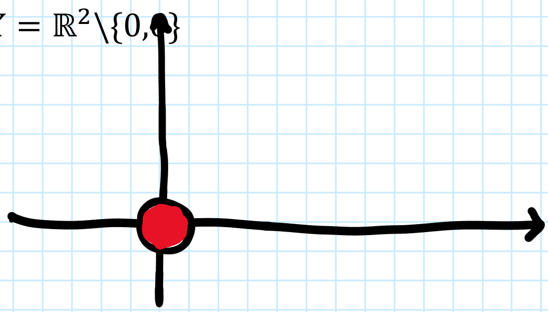
Esempio

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Vediamo dove la funzione è definita

$x^2 + y^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \neq (0,0)$

$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (\mathrm{x},\mathrm{y}) \neq (0,0)$ e $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \epsilon$$

Dobbiamo vedere adesso quali valori di x, y garantiscono questa cosa.

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

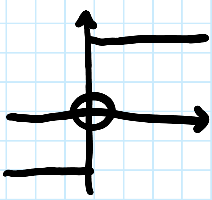
Se $\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon, \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \epsilon$

$\epsilon > 0 \; \exists \; \delta (= \epsilon) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)$ e $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \epsilon$$

Conseguentemente $\boldsymbol{l = 0}$

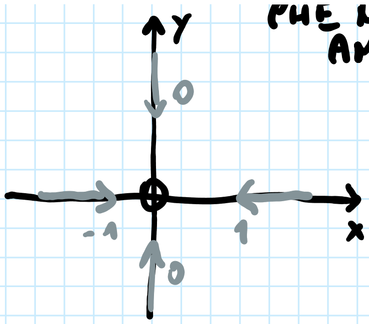
Esempio



ESEMPIO DI UNA FUNZIONE CHE NON AMMETTE LIMITE !!

$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



CHE NON AMMETTE LIMITE

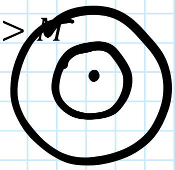
$f(0,y) = 0$

$\lim\limits_{y \to 0} f(x,y) = 0$
$x = 0$

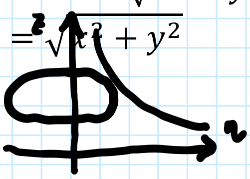
Se $y = 0 \quad f(x,0) = \frac{x}{|x|}$
$\lim_{x \to 0} f(x,0)$ non esiste
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x,0) = 1$
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x,0) = -1$

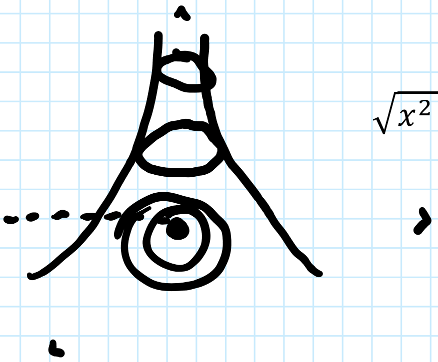
$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ non esiste

Definizione
$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$
$\Leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \forall (x,y) \in X, \left\| (x,y) - (x_0,y_0) \right\| < \delta$
$\Rightarrow f(x,y) > M$



$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad X = \mathbb{R}^2 \,|\{0{,}0)\}$
$z = \sqrt{x^2+y^2}$





$\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{M}$

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\Leftrightarrow \forall U$ intorno di l $\exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in X : \left\| (x,y) - (x_0,y_0) \right\| < \delta, (x,y) \neq (x_0,y_0)$

$\Rightarrow f(x, y) \in U$

Funzioni continue, derivate, differenziabili

venerdì 15 ottobre 2021 15:20

Ricordiamoci quando una funzione di una sola variabile è continua
$f(x)$ continua in $x_0 \in I$ se accade che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Quindi nel caso di funzioni a due variabili:
$f = f(x,y), f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_0, y_0) \in X$ punto di accumulazione

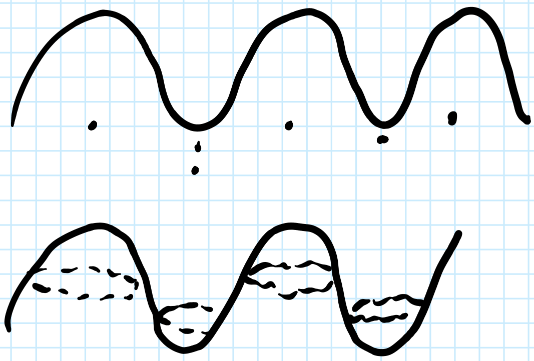
Definizione
Si dice che f è **continua** in (x_0, y_0) se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Se (x_0, y_0) è isolato, $f(x,y)$ continua in (x_0, y_0) per convenzione.

Quindi, f è continua in (x_0, y_0) $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in$
$X, \left\|(x,y) - (x_0,y_0)\right\| < \delta$
$\Rightarrow \left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| < \epsilon$

(Questa definizione include il caso in cui il punto si è isolato)

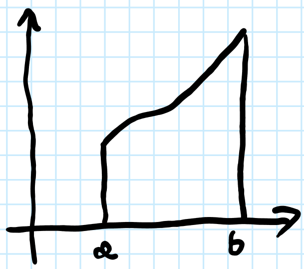
Definizione
f si dice continua in X se è continua in ogni punto di X.



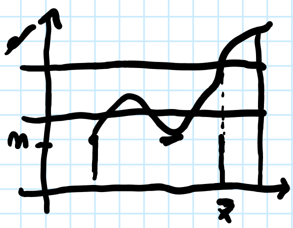
Il teorema di Weierstrass ci dice che se abbiamo una funzione continua un intervallo chiuso limitato ($f: [a,b] \to \mathbb{R}$), c'è un massimo e un minimo. Possono esistere più punti di massimo e minimo assoluto.

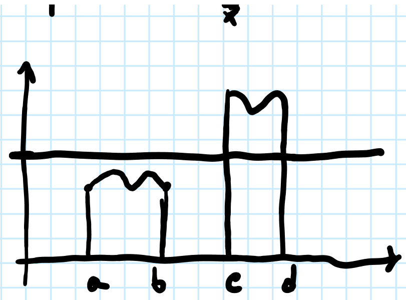
$k \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto, $f = f(x,y)$
$f: k \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è dotata di minimo e di massimo (assoluti):
$m \leq f(x,y) \leq M$
$\exists (x_1,y_1), (x_2,y_2) : f(x_1,y_1) = m$
$\exists \quad k \quad : f(x_2,y_2) = M$

(x_1,y_1) minimo assoluto
(x_2,y_2) massimo assoluto



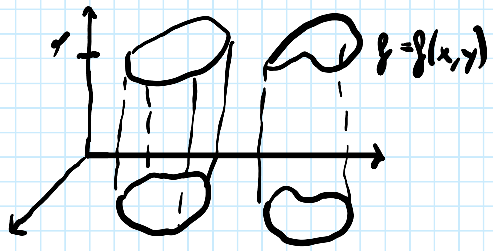
Teorema dei valori intermedi
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua



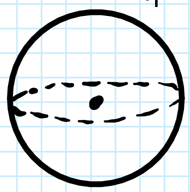


$f = f(x,y), f: k \to \mathbb{R}, k$ dominio connesso (ossia $k = \bar{A}$, dove A è un aperto connesso).

Allora f assume tutti i valori compresi tra minimo e massimo (assoluti).



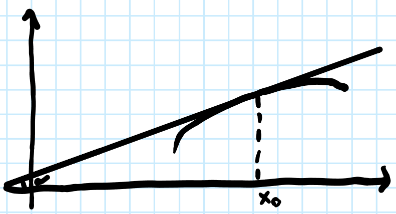
$f = f(x,y,z)$ Funzione con tre variabili
$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = l$
$\exists \delta > 0 : \forall (x,y,z) \in X, (x,y,z) \neq (x_0,y_0,z_0)$
$\left\|(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)\right\| < \delta \Rightarrow \left|f(x,y,z) - l\right| < \epsilon$



Observazione
Definizione di limite e continuità sono analoghe

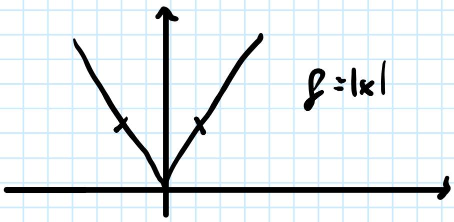
Derivate parziali

Ricordiamoci la definizione di una derivata per le funzioni a una sola variabile.
$f = f(x), x_0 \in I, f: I \to \mathbb{R}$
f derivabile in x_0 se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste finito
$= \lim_{h\to\infty} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$



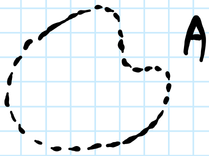
f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0



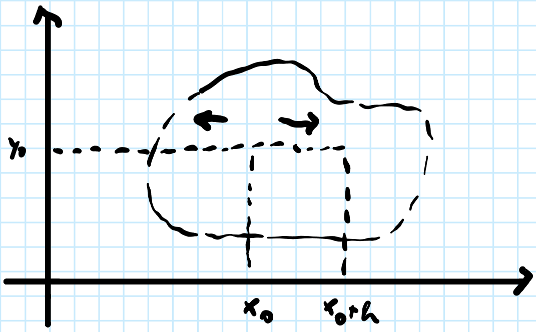
Equazione retta tangente:
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Cosa succede quando consideriamo
$f = f(x,y), f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



A insieme aperto di $\mathbb{R}^2$
$(x_0, y_0) \in A$

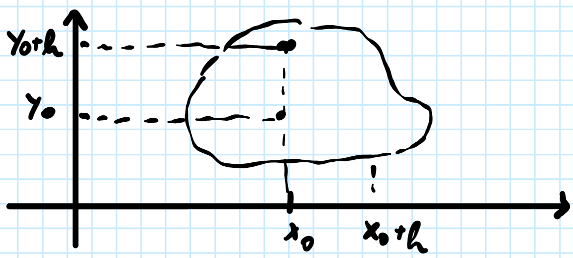
Definizione
Si dice che f è derivabile (parzialmente) rispetto ad x se esiste finito il seguente limite
$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$



(x) = derivata parziale di f, rispetto ad x nel punto $(x_0, y_0) = \frac{df}{dx}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$

Attenzione, non si scrive f_x', poiché non ha senso

Si dice che f è derivabile (parzialmente) rispetto ad y se esiste finito
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$ =derivata parziale di f rispetto ad y, in $(x_0, y_0) = \frac{df}{dy}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$



Esempio di esercizio
$f(x,y) = x^2 y$

$f_x = \frac{d}{dx}(x^2 y) = y\frac{d}{dx}(x^2) = 2xy$
$f_y = \frac{d}{dy}(x^2 y) = x^2\frac{dy}{dy} = x^2$
$f(x,y) = \log(x-y)$

$f_x = \frac{1}{x-y}\frac{d}{dx}(x-y) = \frac{1}{x-y} * \left[\frac{d}{dx}(x) - \frac{x}{dx}(y)\right] = \frac{1}{x-y}$
$f_y = \frac{1}{x-y}\left[\frac{d}{dy}(x) - \frac{d}{dy}(y)\right] = -\frac{1}{x-y}$
$f(x,y) = \arcsin\left(\sqrt{x^2-y}\right)$
$f_x = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-y)}} * \frac{d}{dx}\sqrt{x^2-y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2+y}} * \frac{1}{2\sqrt{x^2-y}} * \frac{d}{dx}(x^2-y)$

$D\ arcsin = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

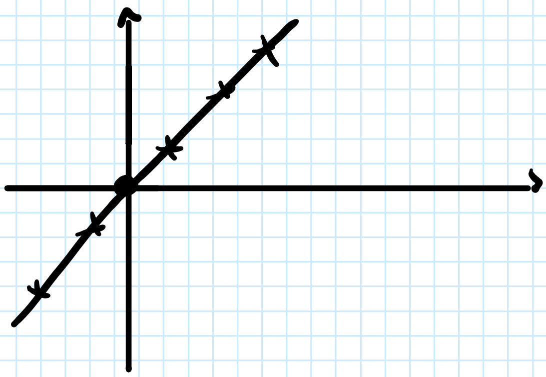
$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2+y}} * \frac{1}{2\sqrt{x^2-y}} * \frac{d}{dx}(x^2-y) = \frac{1}{\sqrt{1-^2+y}} * \frac{1}{2\sqrt{x^2-y}} * 2x = f_x$
$f_y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2+y}} * \frac{1}{2\sqrt{x^2-y}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2+y} * \sqrt{x^2-y}}$

$\frac{d}{dy}(x^2-y) \rightarrow \frac{dx^2}{dy} = 0$

$f = x^2 - 3x + 4xy + 5$
$f_x = 2x - 3 + 4y$
$f_y = 4x$
$f(x,y) = |x-y|$

$x - y = 0 \iff y = x$
non è derivabile
$D|t| = \frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1, t > 0 \\ -1, t < 0 \end{cases}$

$f_x = \frac{x-y}{|x-y|} * 1$
$f_y = \frac{x-y}{|x-y|}(-1) = \frac{y-x}{|x-y|}$



(x,x)
$\frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = \frac{|x+h-x|}{h} = \frac{|h|}{h}$

$f = \frac{1}{3}\sin^2(x^3 y) + \frac{1}{6}\cos^4(x^2-y^2)$
f_x
$= \frac{1}{3} * 2\sin(x^3 y) * \cos(x^3 y) * 3x^2 y + \frac{1}{6} * 4\cos^3(x^2-y^2)\left[-\sin(x^2-y^2)\right]$
$* 2x$
$= 2\sin(x^3 y)\cos(x^3 y) * x^2 y \pm \frac{4}{3} x\cos^3(x^2-y^2)\sin(x^2-y^2)$

f_y
$= \frac{1}{3} * 2\sin(x^3y)\cos(x^3y) * x^3 + \frac{1}{6} * 4\cos^3(x^2-y^2)\,[-\sin(x^2-y^2)]$
$* (-2y)$

$f = xy - \sin(xy)\cos(xy)$

$f_x = y - [y\cos(xy) * \cos(xy) + \sin(xy)\,[-\sin(xy) * y]$
$= y - [y\cos^2(xy) - y\sin^2(xy)]$
$f_y = x - [x\cos(xy) * \cos(xy) - \sin^2(xy) * x] = x - [x\cos^2(xy) - \sin^2(xy)]$

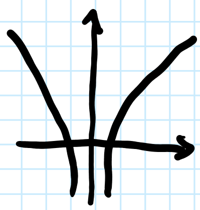
$Da^x = a^x \log a$

$f = 2^{\frac{x^2}{y}}\sqrt{x-y}$

$fx = \sqrt{x-y}\left[2^{\frac{x^2}{y}}\log 2 * \frac{2x}{y}\right] + 2^{\frac{x^2}{y}} * \frac{1}{2\sqrt{x-y}} * 1$

$f_y = \sqrt{x-y}\left[2^{\frac{x^2}{y}}\log 2 * \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\right] + 2^{\frac{x^2}{y}} * \frac{1}{2\sqrt{x-y}} * (-1)$

$D\log|t| = \frac{1}{t}$



$f = \log|x-y|$
$f_x = \frac{1}{x-y} * 1$
$f_y = \frac{1}{x-y} * (-1) = \frac{1}{y-x}$

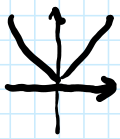
$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$f = \frac{1+x^2y}{e^{x-\sqrt{y}}}$

$f_x = \frac{2xy * e^{x-\sqrt{y}} - (1+x^2y) * e^{x-\sqrt{y}} * 1}{e^{2(x-\sqrt{y})}}$

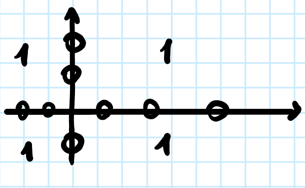
$f_y = \frac{x^2\,e^{x-\sqrt{y}} - (1+x^2y)\,e^{x-\sqrt{y}} * \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)}{e^{2(x-\sqrt{y})}}$

$f(x) : f$ derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0.
Esempio di funzione del genere, è quella valore assoluto.



Funzioni di più variabili
$f(x,y)$ derivabile in $(x_0,y_0) \in A$
$f : A \to \mathbb{R}$ se $\exists f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$
f derivabile non implica f continua.

Esempio
$f(x,y) = \begin{cases} 0\ se\ xy = 0 \\ 1\ se\ xy \neq 0 \end{cases}$



f discontinua un (0,0)!
$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

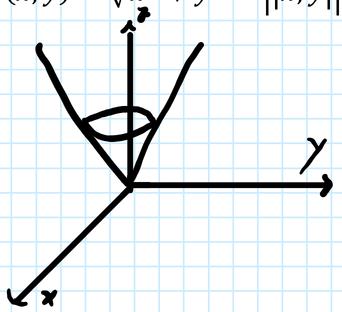
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0\Rightarrow f_y(0,0)=0$$

f è derivabile in $(0,0)$ ma <u>non è continua</u>!

Esempio

Funzione continua ma non derivabile

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=\left\|x,y\right\|$



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

La derivata non esiste

Per cui f non è derivabile rispetto ad x!

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\quad non\ esiste$$

Definizione

Funzione derivabile in un aperto A

$f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ derivabile in A (aperto) quando è derivabile in ogni punto di A.

$f=f(x,y,z), f:A\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0z_0+h)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}=\frac{df}{dz}(x_0,y_0,z_0)$$

Esempio

$f(x,y,z)=x^2yz$

$f_x=' \ 2xyz;\ fy=x^2z;\ f=y^2\log(x^2+z^2)$

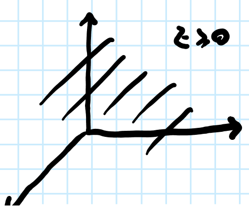
$f_x=y^2*\frac{1}{x^2+z^2}*$

$f_x=\frac{d}{dx}\left(y^2\log(x^2+z^2)\right)=y^2\frac{d}{dx}\log(x^2+z^2)=y^2*\frac{1}{x^2+z^2}*2x=\frac{2xy^2}{x^2+z^2}$

$f_y=\log(x^2+z^2)\frac{d}{dy}\ y^2=2y\log(x^2+z^2)$

$f_z=y^2*\frac{1}{x^2+z^2}*2z$

$f(x,y,z)=x^2\log z\quad z>0$



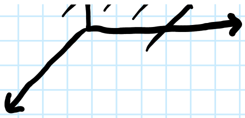
$f_x=2x\log z$

$f_y=?$

$f_z=\frac{x^2}{z}$

$f_y = ?$

$f_z = \dfrac{x^2}{z}$



$f(x,y)\quad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\quad (x_0, y_0) \in A$

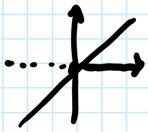
$\overrightarrow{e_1} = (1,0), \qquad \overrightarrow{e_2} = (0,1)$

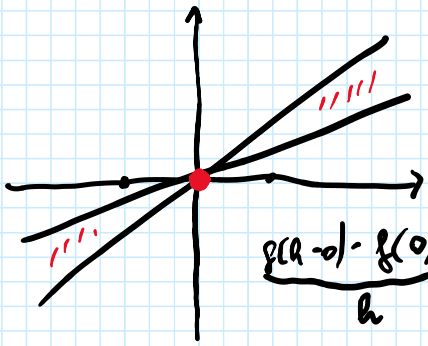
$\overrightarrow{x_0} = (x_0, y_0) \qquad (x_0 + h, y_0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

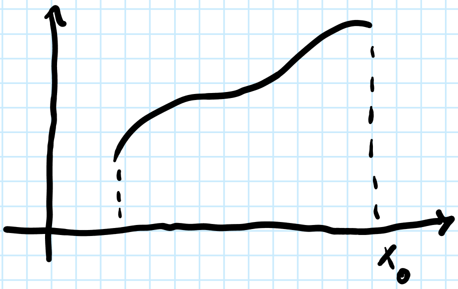
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0} + h\overrightarrow{e_1}) - f(\overrightarrow{x_0})}{h} = f_x(x_0, y_0)$$

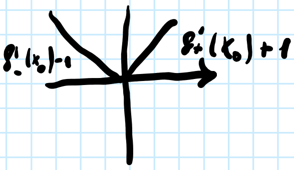
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{y_0} + h\overrightarrow{e_2}) - f(\overrightarrow{y_0})}{h} = f_y(x_0, y_0)$$





$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \qquad \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$





$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0)$$

Definizione
Un dominio è la chiusura di un aperto.
$D \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio, $D = \bar{A}, A$ aperto.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile in D^0.
$f_x: D^0 \to \mathbb{R}$
$f_y: D^0 \to \mathbb{R}$
Dove queste ultime due sono continue.

$(x_0, y_0) \in D\ :\ 0(x_0 . y_0) \in D^0$
oppure $(x_0, y_0) \in dD$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_x(x,y) = f_x(x_0,y_0)$

$Se\ (x_0,y_0) \in dD$

Definizione
Si dice derivata rispetto ad x in (x_0,y_0) il limite se esiste finito
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_x(x,y) = f_x(x_0,y_0)$.
Si dice derivata rispetto ad y in (x_0,y_0) il limite se esiste finito
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_y(x,y) = f_y(x_0,y_0)$.

Quindi le derivate nei punti di frontiera si ottengono come prolungamenti per continuità dall'interno D^0 di D.

Derivate seconde

$f = f(x), f' = f'(x)\ \ derivabile$
$f'' = (f')'$

$f_x : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{f_x(x,y)}$
$f_y : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{f_y(x,y)}$

$f_x \frac{d}{dx} f_x \quad \frac{d}{dy} f_x$ Derivate seconde di f
$f_y \frac{d}{dx} f_y \quad \frac{d}{dy} f_y$

$f_{xx} = \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \frac{d^2 f}{dx\,dy} = f_{xy}$
$f_{yx} = \frac{d^2 f}{dy\,dx} \quad \frac{d^2 f}{dy^2} = f_{yy}$

$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & x_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$
Matrice hessiana di $f(x,y)$

f_{xx}, f_{yy} sono chiamate **derivate pure**
f_{xy}, f_{yx} sono chiamate **derivate miste**

$f(x,y) = x^2 y^3; f_x = 2xy^3, f_y = 3x^2y^2$
$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} = 2y^3 & f_{xy} = 6xy^2 \\ f_{yx} = 6xy^2 & f_{yy} = 6x^{2y} \end{pmatrix}$
$a_{ij} = a_{ji}$
$f(x,y) = x^2 \log y\,; f_x = 2x \log y\,; f_y = \frac{x^2}{y}$
$f_{xx} = 2 \log y \quad f_{xy} = \frac{2x}{y}$
$f_{yx} = \frac{2x}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^2}{y^2}$

Definizione

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^2$ derivabile due volte in A se $\forall (x, y) \in A$ $\exists$ tutte le derivate seconde di f in (x, y).

Teorema di Schwartz

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in A. Sia $(x_0, y_0) \in A$: se f_{xy} e f_{yx} sono funzioni continue in (x_0, y_0), allora

$[f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)]$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Determinante hessiano

$H\, f(x, y) = \det D^2 f(x, y) = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy} * f_{yx} =$ (derivate continue)$= d_{xx} * d_{yy} - f_{xy}^2 * f(x, y, z)$

$f_x(x, y, z)$
$f_y(x, y, z)$
$f_z(x, y, z)$

$f_x : f_{xx}\ f_{xy}\ f_{xz}$
$f_y : f_{yx}\ f_{yy}\ f_{yz}$
$\quad\ \ f_{zx}\ f_{zy}\ f_{zz}$

$$d^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx}\ f_{xy}\ f_{xz} \\ f_{yx}\ f_{yy}\ f_{yz} \\ f_{zx}\ f_{zy}\ f_{zz} \end{pmatrix}$$

$f_{xy} = f_{yx}$
$f_{xz} = f_{zx}$
$f_{yz} = f_{zy}$

$f = x^2 yz$
$f_x = 2xyz \quad f_y = x^2 z \quad f_z = x^2 y$
$f_{xx} = 2yz \quad f_{xy} = 2xz, f_{xz} = 2xy$
$f_{yz} = 2xz \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yz} = x^2$
$f_{zx} = 2xy \quad f_{zy} = x^2 \quad f_{zz} = 0$

$f(x, y) \quad f_{xx}\ f_{xy}$
$\qquad\quad\ f_{yx}\ f_{yy}$

$\frac{d^3 f}{dx^3} \quad \frac{d^3 f}{dx^2\, dy} \quad \frac{d^3 f}{dx\, dy^2}$

$\frac{d^3 f}{dy^3} \qquad \frac{d^3 f}{???}$

Se f derivabile in $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}, f = f(x)$

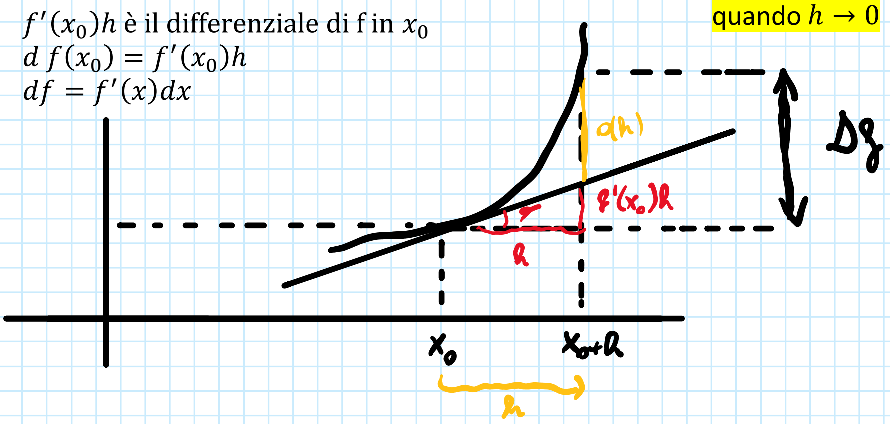
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

$h = x - x_0 : \Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$

$f'(x_0)h$ è il differenziale di f in x_0
$d\,f(x_0) = f'(x_0)h$
$df = f'(x)dx$

quando $h \to 0$

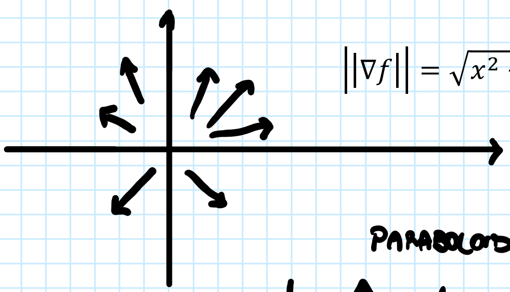


Funzioni differenziabili
$f = f(x,y), f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto.

Definizione (vettore gradiente)
Sia $(x_0,y_0) \in A$ ed f derivabile in (x_0,y_0) : $\exists f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$.
Si dice gradiente di f in (x_0,y_0), il vettore $\nabla f(x_0,y_0) = Df(x_0,y_0) = \left(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\right)$

Esempio
$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$; $f_x = x \quad f_y = y$.
$\nabla f(x,y) = (x,y)$
$\nabla f : (x,y) \in A \to \nabla f(x,y) \in \mathbb{R}^2$
(primo esempio di campo vettoriale)

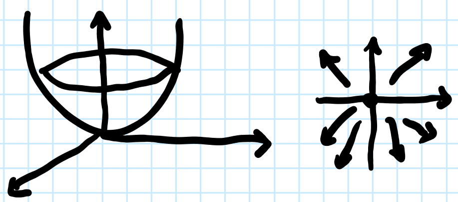
Il gradiente è l'operazione che consente di associare ad ogni punto della funzione un vettore.
Come si disegna il campo gradiente?



$\|\nabla f\| = \sqrt{x^2+y^2}$

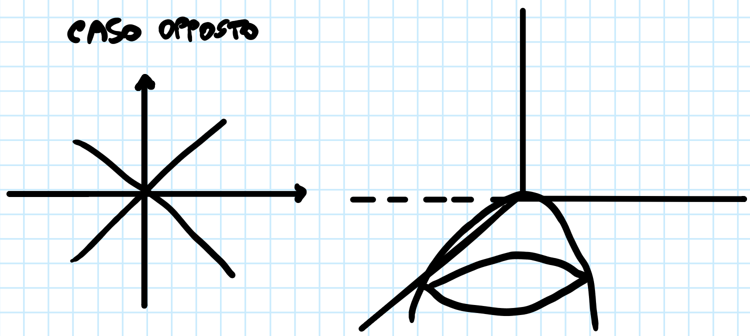
PARABOLOIDE ELLITTICO

$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = z$



$f(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$
$\nabla f = -(x,y)$

CASO OPPOSTO



Definizione funzione differenziabile

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che f sia derivabile in (x_0, y_0) $(\exists \nabla f(x_0, y_0))$.
Si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se vale la relazione di limite.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) * (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$df(x_0, y_0)(h, k) = \nabla f(x_0, y_0) * (h, k) =$ differenziale in $(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$
lineare rispetto a h, k.

Per quanto riguarda il limite $\Leftrightarrow f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) * (h, k) = o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$
NB, $f, g : f = o(g)$ se $g \to o, x \to x_0$ e $\frac{f}{g} \to 0, x \to x_0$

$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) * (h, k) + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$
Dove $(h, k) \to (0,0)$
$\Delta f \approx df(x_0, y_0)$

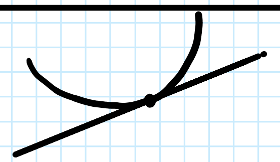
f differenziabile in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ continua in (x_0, y_0).

Dimostrazione
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$

$\left|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)\right| = \left|\nabla f(x_0, y_0) * (h, k) + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)\right|$
$\leq \left|\nabla f(x_0, y_0) * (h, k)\right| + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$

$|x * y| \leq ||x|| \; ||y||$ disuguaglianza di Cauchy Schwartz
$\leq \left||\nabla f(x_0, y_0)|\right| \sqrt{h^2 + k^2} + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$

$h, k \to 0,0$



Piano tangente
f differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$

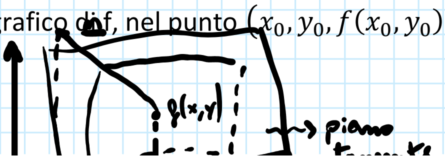
(h,k)
$\downarrow$
$(0,0)$

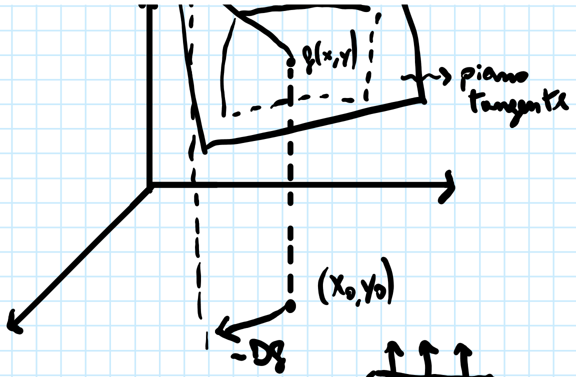
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) * (h, k) + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$
$h = x - x_0, k = y - y_0$
$f(x, y) - f(x_0, y_0)$
$= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$

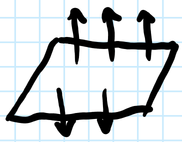
$x \to x_0$
$y \to y_0$

$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x \to x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
$ax + by + cz + d = 0$

Piano tangente al grafico di f, nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ $(z_0 = f(x_0, y_0)$.







$ax + by + cz + d = 0$
$\underline{n} = (a, b, c)$

$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0$
$2x + 3y - 4z = 4$
$n = (2,3,-4)$

Esempio
Piano tangente in $(1, 1)$ $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 5y$
$f(x_0, y_0) = f(1,1) = 3 + 4 + 5 = 12$
$f_x = 6x + 4y, f_x(1,1) = 6 * 1 + 4 * 1 = 10$
$f_y = 4x + 5, f_y(1,1) = 4 + 5 = 9$
$z = 12 + 10(x - 1) + 9(y - 1)$

$f(x, y) = \arctan(x + 2y)\,, (x, y) = (1,0)$
$f(1,0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
$f_x = \frac{1}{1+(x+2y)^2} * 1;\;\; f_x(1,0) = \frac{1}{2}$
$f_y = \frac{2}{1+(x+2y)^2}; f_y(1,0) = \frac{2}{2} = 1$
L'equazione della tangente sarà:
$z = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1) + y$

Teorema del differenziale
$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto derivabile in tutto A ($\exists\, f_x(x, y), f_y(x, y), \forall (x, y) \in A$). Allora, se $f_x : A \to \mathbb{R}, \mathrm{f_y} : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ sono continue in A, f è differenziabile in A.

Dimostrazione
Tesi: dobbiamo dimostrare che f è differenziabile in $(x_0, y_0) \in A, \forall (x_0, y_0) \in A$, ossia
$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)*(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$
$$\frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0) - \mathrm{f_x}(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$
$$= \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)$
$G(y) = f(x_0 + h, y): f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) = G(y_0 + k) - G(y_0)$ $\qquad y_0 < y_1 < y_0 + h$
$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$
Applichiamo il <u>teorema di Lagrange</u> alla funzione $G(y_0 + k) - G(y_0)$

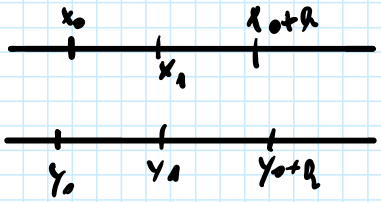
$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)=G'(y_1)k=f_y(x_0+h,y_1)k$

$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=F(x_0+h)-F(x_0)=f_x(x_1,y_0)h$
$F(x)=f(x,y_0)$

$$(A)=\frac{f_y(x_0+h,y_1)k+f_x(x_1,y_0)h-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \qquad x_0<x_1<x_0+h$$
$$=\frac{[f_x(x_1,y_0)-f_x(x_0,y_0)]h+[f_y(x_0+h,y_1)-f_y(x,y_0)]k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\left|\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=$$
$$=\left|\frac{[f_x(x_1,y_0)-f_x(x_0,y_0)]h+[f_y(x_0+h,y_1)-f_y(x,y_0)]k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|$$
$$\le|f_x(x_1,y_0)-f_x(x_0,y_0)|\ \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}+|f_y(x_0+h,y_1)-f_y(x_0,y_0)|*\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\le 1$$
$$\le|f_x(x,y_0)-f_x(x_0,y_0)|+|f_y(x_0+h,y_1)-f_y(x_0,y_0)|$$

$(h,k)\to(0,0)$



$\Rightarrow x_1\to x_0, y_1\to y_0$: poiché f_x e f_y sono continue, abbiamo che
$|f_x(x_1,y_0)-f_x(x_0,y_0)|\to 0$
$f_x(x_1,y_0)\to f_x(x_0,y_0)$
$|f_y(x_0+h)-f_y(x_0,y_0)|\to 0$
f_x,f_y sono continue

$\left|\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\to 0$ per $(h,k|\to(0,0))$
$\Rightarrow$ f differenziabile in (x_0,y_0)

g continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) : $g(b)-g(a)=g'(c)(b-a)$

f derivabile, f_x,f_y continua $\Rightarrow$ f differenziabile $\Rightarrow$ f **continua**
$C^1(A)=\{f, f\ derivabile\ e\ f_x,f_y\ continua\}$
$C^0(A)=\{f: A\to\mathbb{R}\ continua\}$

$f\in C^1(A)\Rightarrow f\ differenziabile\Rightarrow f\in C^0(A)$
$C^2(A)=\{f: A\to\mathbb{R}\ derivabili\ due\ volte\ in\ A\ con\ derivate\ seconde\}$
$f_{xx},f_{xy},f_{yx},f_{yy}$
$f_{xy}=f_{yx}$ (teorema di Schwarz)

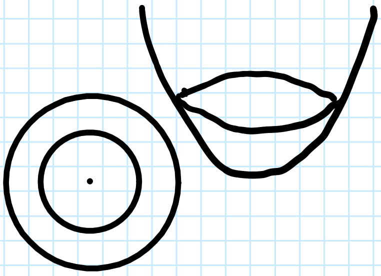
$f\in C^2(A)\Rightarrow$ secondo il teorema differenziale, abbiamo che f_x,f_y sono differenziabili $\Rightarrow f_x,f_y$ continua in A $\Rightarrow f\in C^1(A)\Rightarrow f\in C^0(A)$.
$C^{(k)}(A)=\{f: A\to\mathbb{R}$ derivabile k volte, con derivate continue$\}$.
$f\in C^{(k)}(A)\Rightarrow f\in C^{(k-1)}(A)$
$C^3<C^2<C^1<C^0$
$C^\infty(A)=\{f$ derivabile infinite volte con derivate continue di ogni ordine$\}$

Curve di livello di una funzione

$f(x,y)=c, c\in\mathbb{R}$

$z=f(x,y)=x^2+y^2 : f(x,y)=c, c>0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=c & (0,0,c) \\ z=c & \sqrt{c} \end{cases}$



Definizione

$f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, si dice curva di livello un insieme rappresentato da

$E_c=\{(x,y)\in A : f(x,y)=c\}$

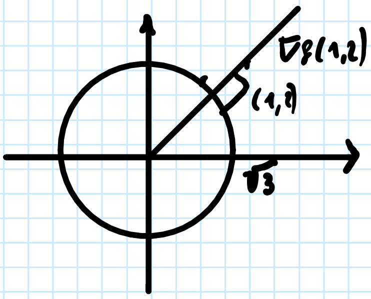
<u>Esempio</u>

$f(x,y)=x^2+y^2 \quad (x_0,y_0)=(1,2)$

La curva di livello passante per (1, 2) sarà la curva di equazione $f(x,y)=f(x_0,y_0)$

$x^2+y^2=f(1,2)=5$

$x^2+y^2=5$



$f_x=2x$

$f_y=2y$

$\nabla f(1,2)=(2,4)$

$f_x(1,2)=2$

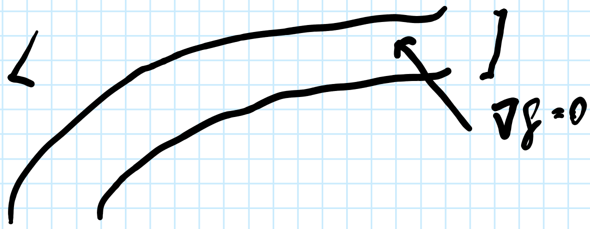
$f_y(1,2)=4$

$\nabla f(1,2)=2(1,2)$

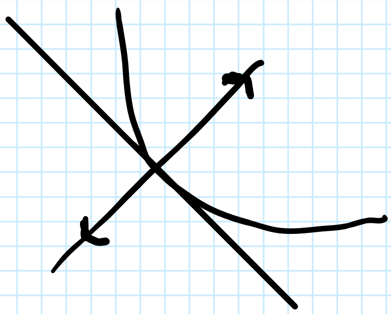
$\nabla f(1,2) \perp$ curva di livello di f passante per $(1,2)$.

Teorema (ortogonalità del gradiente alle curve di livello)

Sia $f: A\to\mathbb{R}, A\subseteq\mathbb{R}^2$ aperto, f differenziabile in A. Sia $(x_0,y_0)\in A$ tale che $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$.



Allora, il gradiente $\nabla f(x_0,y_0)$ è ortogonale alla curva di livello di f, passante per (x_0,y_0).



$f(x,y)=f(x_0,y_0)$

Derivazione delle funzioni composte

$f = f(x), g = g(y) : f(I) \subseteq \mathrm{J} \quad \mathrm{f}: \mathrm{I} \to \mathbb{R} \quad \mathrm{g}: \mathrm{J} \to \mathbb{R}$

$(g\ o\ f)(x) = g\big(f(x)\big)$: se f è derivabile e g è derivabile.

$\Rightarrow g\ o\ f$ è derivabile e $(g\ o\ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) * f'(x)$

$f(x) = \sin x^2 \qquad h' = \left(\cos x^2\right) * 2x$

Per quanto riguarda le **funzioni composte**:

$f(x,y) = \sin(x^2\ y)$ $\qquad f_1(x,y) = x^2 y$

$f_x = \cos\big(x^2 y\big) * 2x, f_y = \cos\big(x^2 y\big) * x^2$ $\qquad f_2(z) = \sin z$

$f = (f_2\ o\ f_1)(x,y) : f_x = f_2'\big(f_1(x,y)\big) * (f_1)_x\ (x,y)$

$f_y = f_2'\big(f_1(x,y)\big) * (f_1)_y(x,y)$

$P = P(t) = \big(x(t), t(t), z(t)\big)$

$P' = (x(t), y(t), 0)$

Equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$\underline{v}(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$

$\big\|\underline{v}(t)\big\| = |s'(t)|$

$$\begin{cases} x' = x'(t) \\ y' = y'(t) \\ z' = \dfrac{d}{dt}\big[f\big(x(t), y(t)\big)\big] \end{cases}$$

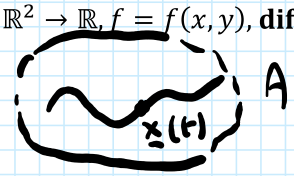
$z = z(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$

$F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ è la funzione composta da $t \in I \to \big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2$, **funzione vettoriale** e da $f: (x,y) \to f(x,y)$

$F(t)$ è della sola variabile t, a valori in $\mathbb{R}$.

Teorema di derivazione delle funzioni composte

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f = f(x,y)$, **differenziabile** in A



$\underline{x}: t \in I \to \big(x(t), t(t)\big) \in A, \underline{x\ derivabile}\ \big(\exists x'(t), y'(t)\big)\ \forall t \in I$

Allora : $F(t) = f\left(\underline{x}(t)\right) = f\big(x(t); y(t)\big)$ è derivabile e

$F'(t) = f_x\big(x(t), y(t)\big) * x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big) * y'(t)$

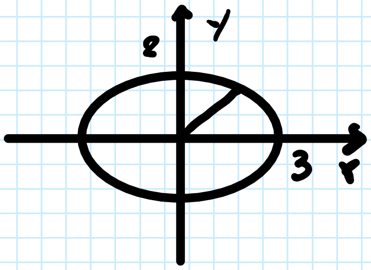
$\nabla f = \big(f_x, f_y\big)$

$= \nabla f(x(t), y(t)) * \underline{x}'(t)$ [*vettore velocità*]
$\underline{x}'(t) = (x'(t), y'(t))$

Esempio

$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

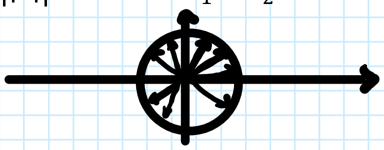
Equazioni parametriche di $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$



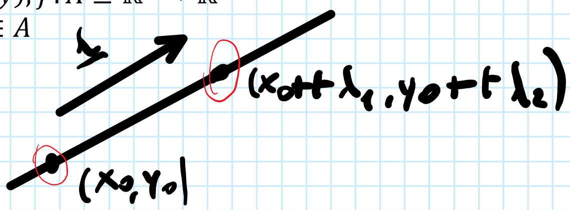
$F(t) = f(x(t), y(t)) = f(3\cos t, 2\sin t) = 9\cos^2 t + 4\sin^2 t = 9\cos^2 t + 4(1 - \cos^2 t)$
$= 5\cos^2 t + 4$
$F'(t) = 10\cos t\,(-\sin t) = -10\sin t\cos t$
$F'(t) = f_x(x(t), y(t))\, x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t)$
$f_x = 2x, f_y = 2y$

$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -3\sin t \\ y' = 2\cos t \end{cases}$
$F'(t) = 2 * (3\cos t)(-3\sin t) + 2 * 2\sin t * 2\cos t = -18\sin t\cos t + 8\sin t\cos t$
$= -10\sin t\cos t$

Derivate direzionali
Definizione
Una direzione in $\mathbb{R}^2$ è un versore : $\lambda \in \mathbb{R}^2$
$||\lambda|| = 1 \iff \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$



$f = f(x, y), f\colon A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_0, y_0) \in A$
$\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^2$



$\begin{cases} x = x_0 + t\lambda 1 \\ y = y_0 + t\lambda_2 \end{cases}$
$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda_1, y_0 + t\lambda_2) - f(x_0, y_0)}{t}$

Definizione
Se esiste finito (2), esso si chiamerà derivante direzionale di f, rispetto alla direzione $\underline{\lambda}$, nel punto (x_0, y_0). Si denota con $\frac{df}{d\lambda}(x_0, y_0)\ D_\lambda f(x_0, y_0)$

Osservazione
$\lambda = e_1 = (1,0) : \frac{df}{de_1}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{df}{dx}(x_0, y_0)$
$\frac{df}{de_2}(x_0, y_0)x \quad \frac{df}{dy}(x_0, y_0)$

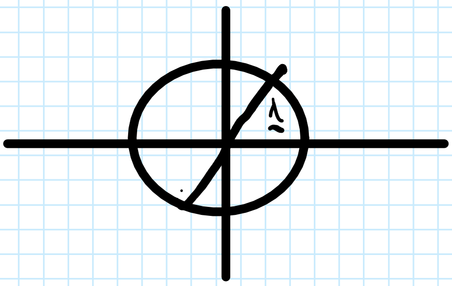
Formula del gradiente

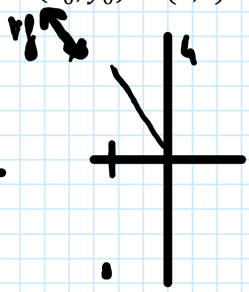
Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. A aperto di $\mathbb{R}^2$, f differenziabile in A.

Se $(x_0, y_0) \in A$, per ogni direzione $\underline{\lambda}$ si ha che $\frac{df}{d\underline{\lambda}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) * \underline{\lambda} = f_x(x_0, y_0)\lambda_1 + f_y(x_0, t_0)\lambda_2$

Esempio

$f(x,y) = x^2 - 3x + 4xy + 5$: derivata direzionale in $(x_0, y_0) = (1{,}0)$ rispetto alla direzione $\underline{\lambda} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$





$f_x = 2x - 3 + 4y, f_y = 4x$

$f_x(1{,}0) = 2 - 3 = -1; f_y(1{,}0) = 4$

$\nabla(1{,}0) = (-1{,}4) : \frac{df}{d\lambda}(1{,}0) = (-1{,}4) * \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}$

Conseguenze

$\frac{df}{d\lambda}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) * \lambda$

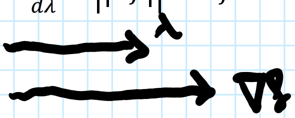
Massima? Minima?

$\left|\frac{df}{d\lambda}\right| = |\nabla f * \lambda| \leq \left||\nabla f|\right| * ||\lambda|| = \left||\nabla f|\right|$

(Cauchy-Schwertz)

$\Leftrightarrow -\left||\nabla f|\right| \leq \frac{df}{d\lambda} \leq \left||\nabla f|\right|$

Massima $\frac{df}{d\lambda} = \left||\nabla f|\right| = \nabla f * \lambda = \left||\nabla f|\right| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow \lambda = t\nabla f, t > 0$

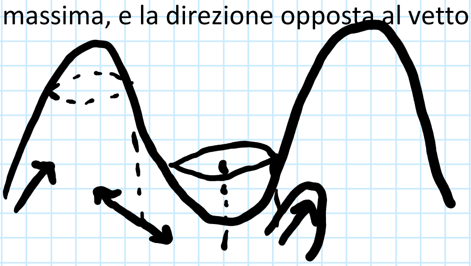


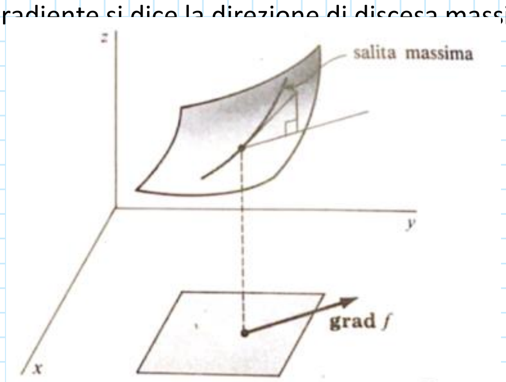
$\Rightarrow 1 = \left||\nabla|\right| = t\left||\nabla f|\right| \Rightarrow t = \frac{1}{\left||\nabla f|\right|}$

$\lambda = \frac{\nabla f}{\left||\nabla f|\right|}$

$\frac{df}{d\lambda}$ minima quando $\frac{df}{d\lambda} = -\left||\nabla f|\right| \to \lambda = -\frac{\nabla f}{||\nabla f||}$

In una superficie $z = f(x,y)$ la direzione del vettorie gradiente si dice la direzione di salita massima, e la direzione opposta al vettore gradiente si dice la direzione di discesa massima.





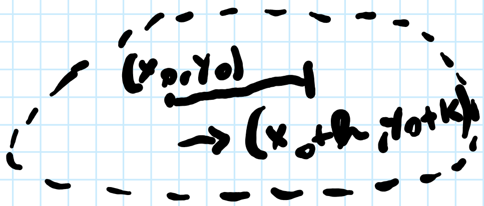
Formula di Taylor, punti critici, frontiera

mercoledì 20 ottobre 2021 11:50

Riprendiamo prima il Teorema di Lagrange (per funziona a singola variabile)
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua derivabile in* (a, b)
$\exists \Theta \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\Theta)(b - a)$

$f(t) - f(0) = f'(\Theta) * t$
$f(t) = f(0) + f'(\Theta)t$
Dove $f'(\Theta)$ è il resto di Lagrange

$f = f(x, y), f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto
$(x_0, y_0) \in A$



Equazioni parametriche della retta passante per due punti
$\begin{cases} x = x_0 + th \\ y = y_0 + tk \end{cases} \quad t \in [0,1]$
$t = 0 \to (x_0, y_0)$
$t = 1 \to (x_0 + h, y_0 + k)$
$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}$

Per cui ora andremo a guardare:
$f(x_0 + th, y_0 + tk), t \in [0,1]$
h, k **fissati**

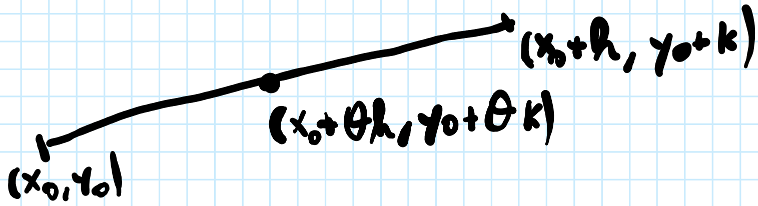
$f \in C^1(A)$ (derivabile e f_x, f_y continue)
Applichiamo il teorema di Lagrange a $F(t)$, ricordando che questa è derivabile per il Teorema di derivazione delle funzioni composte.
$F(1) - F(0) = F'(\Theta) * 1 = F'(\Theta)$, dove $\Theta \in (0,1)$

Dobbiamo ricavare i valori.
$F(0) = f(x_0, y_0)$;
$F(1) = f(x_0 + h; y_0 + k)$;
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = F'(\Theta)$

Calcoliamo ora la derivata $F'(\Theta)$
$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$
$F'(t) = f_x\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t)$
$= f_x(x_0 + th, y_0 + tk)h + f_y(x_0 + th, y_0 + tk)k$

Da $F'(\Theta)$ abbiamo:
$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k)h + f_y(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k)k =$
$= \nabla f(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k) * (h, k)$

$= \nabla f(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k) * (h, k)$



$\nabla f(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k) * (h, k)$ è la **<u>formula di Taylor al primo ordine con resto di Lagrange</u>**.
Questa è la **versione del teorema di Lagrange per le funzioni di 2 variabili**.

Vediamo ora la formula di Taylor con resto di Lagrange al secondo ordine
$f \in C^2(A) \qquad (f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} = f_{yx}\ continue)$
$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$
$F'(t) = f_x(x_0 + th, y_0 + tk)h + f_y(x_0 + th, y_0 + tk)k$
$\exists F''\ continua$. Possiamo utilizzare la formula di Taylor con resto di Lagrangr al secondo ordine per $F(t)$.

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(\Theta)}{2}t$$

Dove $\Theta \in (0, t)$

Calcoliamo la derivata seconda.

$$F''(t)$$
$$= f_{xx}(x_0 + th, y_0 + tk)h^2 + f_{xy}(x_0 + th, y_0 + tk)hk + f_{yx}(x_0 + th, y_0 + tk)hk$$
$$+ f_{yy}(x_0 + th, y_0 + tk)k^2 =$$
$$= f_{xx}(x_0 + th, y_0 + tk)h^2 + 2f_{xy}(x_0 + th, y_0 + tk)hk + f_{yy}(x_0 + th, y_0 + tk)k^2$$

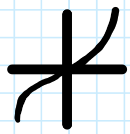
Utilizzando la formula in precedenza $F(t)$:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(\Theta)}{2}$$
$$f(x_0 + h, y_0 + k)$$
$$= f(x_0, y_0) + [f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k]$$
$$+ \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k)h^2 + 2f_{xy}(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k)hk + f_{yy}(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k)k^2]$$

(dove il resto di Lagrange è l'ultima parte f_{yy}
Questa si chiama **formula di Taylor con resto di Lagrange, al secondo ordine**.

$$f(x)\ ? \begin{array}{c} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0\ (x_0\ di\ massimo) \\ f''(x_0) > 0\ \ (x_0\ di\ minimo) \\ f''(x_0) = 0\ \ (flesso) \end{array}$$

$f(x) = x^3$
$f' = 3x^2 = 0 \ \Rightarrow x = 0$
$f'' = 6x, f''(0) = 0$



Resto di Lagrange

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) * (h, k) + \left[D^2 f(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} * (h, k)\right]$$

Resto di Peano
(quello con la o piccola)
Per funzione a singola variabile:

$$\mathrm{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)$$

Per funzione a più variabili:

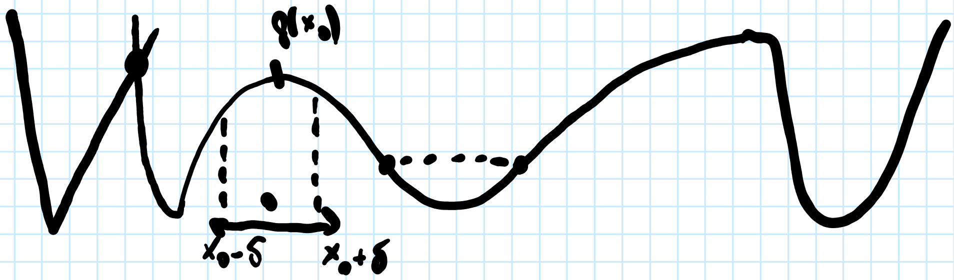
$$f(x_0 + h, y_0 + k)$$
$$= f(x_0, y_0) + [f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k]$$
$$+ \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2] + \boldsymbol{o(h^2 + k^2)}$$
$$||h, k||^2$$

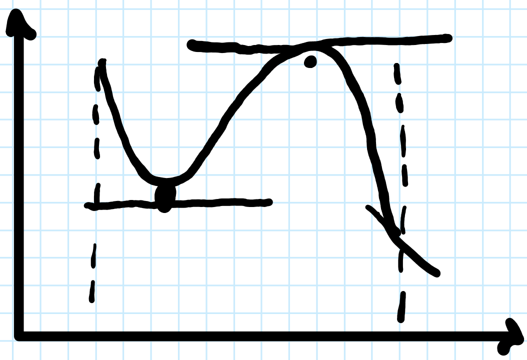
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) - h \to 0$$

Il resto di Peano è la o piccola.

Massimi e minimi relativi (estremi relativi)

$f = f(x), x_0 \in I$: max relativo se $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



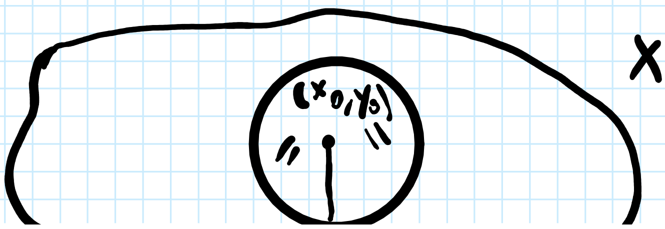


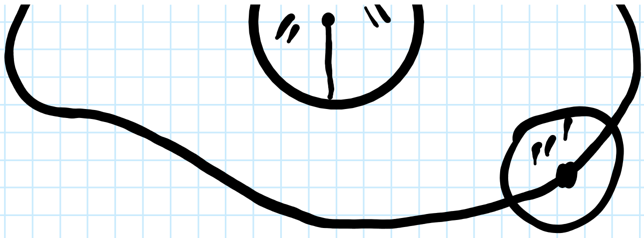
TEOREMA DI FERMAT

Definizione

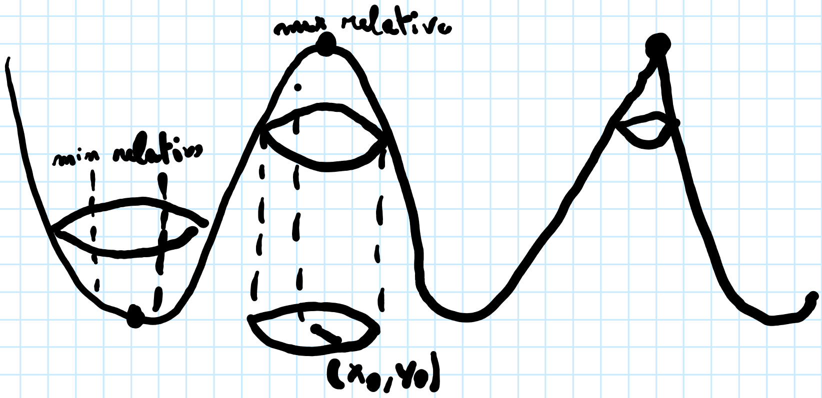
$f = f(x, y), f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Dove X è un insieme qualsiasi



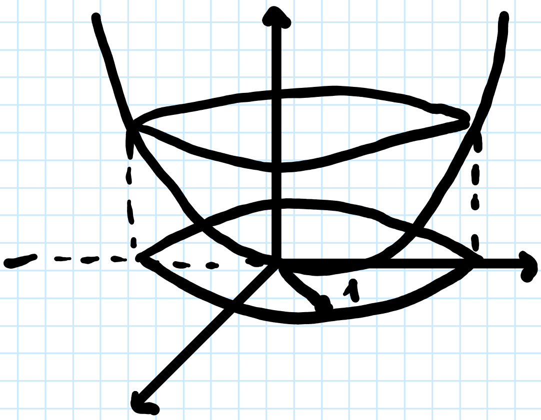


Se $(x_0, y_0) \in X$ si dirà di **massimo relativo** per f se $\exists \delta > 0$ tale che $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)\ \forall (x,y) \in X \cap I_\delta(x_0,y_0)$

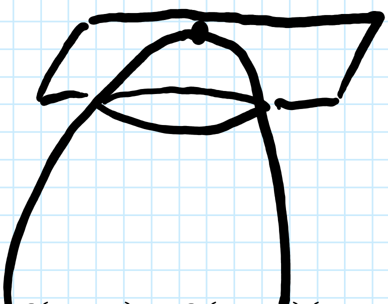


Esempi
$f(x,y) = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1$
(0,0) minimo relativo

$[x_0, y_0] \in (((0,0), 1)$
Sono tutti di max relativo



Altro esempio

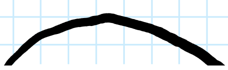


$\exists \nabla f(x_0, y_0) = 0$

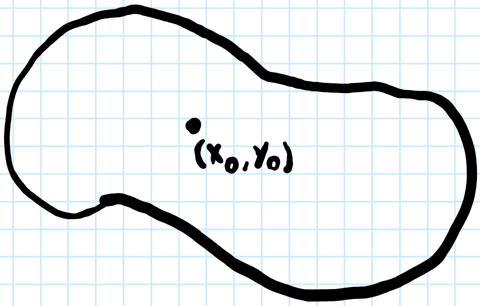
$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$

Il corrispondente **Teorema di Fermat** per le funzioni di due variabili viene definito come **condizione necessaria al primo ordine per gli estremi relativi**.

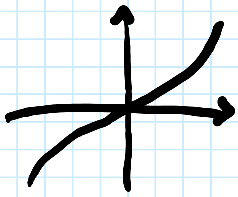
$f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f = f(x, y). Sia $(x_0, y_0) \in X$ di estremo relativo per f <u>interno</u> ad X. Se f è derivabile in (x_0, y_0), si ha <u>necessariemente</u> $\nabla f(x_0, y_0) = 0$



derivabile in (x_0, y_0), si ha necessariamente $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

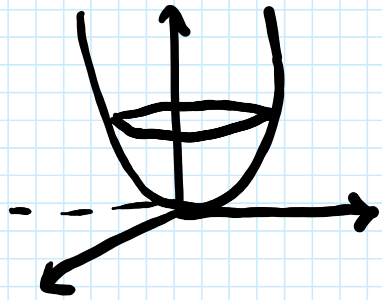


$f = x^3 \quad f(0) = 0, f'(0) = 0$
$x_0 = 0$ è di flesso
[Il teorema di Fermat non è invertibile]

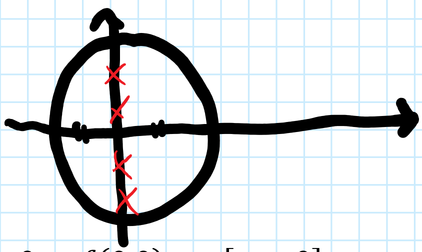


x_0 estremo relativo $\Rightarrow\nLeftarrow \mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) = 0$

Esempio
$f(x, y) = x^2 + y^2$
$f_x = 2x$
$f_y = 2y$
$\nabla f(0,0) = (0,0)$



$f(x, y) = x^2 - y^2$ (paraboloide iperbolico $x^2 - y^2 = k$)
$f_x = 2x, f_y = -2y : \nabla f(0,0) = (0,0)$



$f(x, 0) = x^2 > 0 = f(0,0) \qquad [x \neq 0]$

$f(0, y) = -y^2 < 0 = f(0,0) \quad [y \neq 0]$

Quindi (0,0) non è né il massimo né il minimo, ma $\nabla f(0,0)$. Questi si chiamano **punti di sella**.

Definizione
Se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, si dice che (x_0, y_0) è un **punto critico o stazionario** per la funzione.
(x_0, y_0) estremo locale $\Rightarrow\nLeftarrow (\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ ...

Condizione necessaria secondo ordine (?)
x_0 massimo (minimo)
$f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) \leq 0 \quad (\geq 0)$

Condizione necessaria al secondo ordine

$f \in C^2$ in un intorno di (x_0, y_0): (x_0, y_0) minimo relativo $\Rightarrow \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) \geq 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0 \end{cases}$

$Hf(x_0, y_0) =$ determinante hessiano $= f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$

Per quanto riguarda i punti di massimo relativo invece:

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) \geq 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0 \end{cases}$$

(x_0, y_0) sella $\Rightarrow \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) \leq 0 \end{cases}$

Esempio

$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \nabla f(0,0) = (0,0)$

$f_x = 2x, f_y = 2y$

$f_{xx} = 2, f_{xy} = 0, f_{yx} = 0, f_{yy} = 2$

Questa volta il determinante hessiano non dipende più da x e y.

$Hf = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$f_{xx} = 2 > 0$

La condizione necessaria è chiaramente soddisfatta.

Altro esempio

$f(x, y) = x^2 - y^2$

$f_x = 2x, f_y = -2y$

$f_{xx} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 0, f_{yy} = -2$

$Hf = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$

Difatti, (0,0) è di sella.

Condizioni sufficienti al secondo ordine

$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0)$ **punto di minimo relativo**

$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0)$ **punto di massimo relativo**

$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0)$ **punto di sella**

Cosa succede quando il determinante hessiano è 0?

$Hf(x_0, y_0) = 0$? Nulla si può dire a priori, quindi si possono avere massimi, minimi, relativi e selle.

(Prendere il gradiente, porlo uguale a zero, dal sistema di equazioni che si avrà si determinano i punti critici.. Da questi vanno classificati, vedere il determinate hessiano quanto fa e la derivata seconda quanto fa)

Esercitazione

Classificare i punti critici delle seguenti funzioni

1) $\boldsymbol{f(x,y) = x(x-1)^2 - y^2}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$f_x = (x-1)^2 + 2x(x-1) = x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$f_y = -2y = 0$

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow A = \left(\frac{1}{3}, 0\right), B = (1,0) \\ y = 0 \end{cases}$$

Calcolare il determinante Hessiano e vedere quanto fa

$f_{xx} = 6x - 4, f_{xy} = 0 = f_{yx}, f_{yy} = -2$

Calcoliamo il determinante hessiano di A

$$f_{xx}\left(\frac{1}{3}, 0\right) = 6 * \frac{1}{3} - 4 = 2 - 4 = -2$$

$f_{xy} = f_{yx} = 0; f_{yy} = -2$

$$Hf\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$f_{xx}\left(\frac{1}{3}, 0\right) = -2 < 0$$

$A = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ è un punto di massimo relativo

Quando il determinante hessiano è uguale a 0, è possibile avere diversi casi.

$f_{xx}(1,0) = 6 - 4 = 2, f_{xy} = f_{yx} = 0, f_{yy} = -2$

$$Hf(1,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$B = (1,0)$ punto di sella

2) $\boldsymbol{f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y}$

$f_x = 6x^2 - 6x$

$f_y = 3y^2 - 3$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 2 = 0 \\ y^2 - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Abbiamo 4 punti
$A=(0,-1), B=(0,1), C=(1,-1), D=(1,1)$

$f_{xx}=12x-6, f_{xy}=0=f_{yx}, f_{yy}=6y$
$f_{xx}(0,-1)=-6, f_{xy}=f_{yx}=0, f_{yy}(0,-1)=-6$
$Hf(0,-1)=\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}=36>0$
$f_{xx}(0,-1)<0 \Rightarrow (0,-1)$ punto di massimo

Successivamente risulterà che:
B è un punto di sella
C è un punto di sella
D è un punto di minimo

3) $\boldsymbol{f=x^3+y^3-(1+x+y)^3}$
$f_x=3x^2-3(1+x+y)^2$
$f_y=3y^2-3\,(1+x+y)^2$

$$\begin{cases} x^2-(1+x+y)^2=0 \\ y^2-(1+x+y)^2=0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro abbiamo:

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2-(1+x+y)^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=0 \\ x^2-(1+x+y)^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2-(1+x+y)^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=0 \\ x^2-(1+x+y)^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ x^2-(1+x+x)^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-x \\ x^2-(1+x-x)^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ x^2-(1+2x)^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-x \\ x^2-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ x^2-1-4x^2-4x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-x \\ x=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-x \\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ 3x^2+4x+1=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$x_{\frac{1}{2}}=\frac{-2\pm 1}{3} \rightarrow x_1=-1, x_2=-\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$A=(-1,-1), B=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right), C=(-1,1), D=(1,-1)$
A è un punto di sella, B è un punto di massimo, C è un punto di sella e anche D è un punto di sella.

4) $f(x,y) = 2\log\left(2 + x^2 + y^2\right) - xy$

Il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$

$$f_x = \frac{2}{2 + x^2 + y^2} * 2x - y = \frac{4x}{2 + x^2 + y^2} - y$$

$$f_y = \frac{2}{2 + x^2 + y^2} * 2y - x = \frac{4y}{2 + x^2 + y^2} - x$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{4x}{2 + x^2 + y\text{^}2} - y = 0 \\ \dfrac{4y}{2 + x^2 + y^2} - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2 + x^2 + y^2}{4x} = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{4y}{2 + x^2 + y^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 + x^2 + y^2 = \dfrac{4x}{y} \\ \dfrac{4y}{2 + x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + x^2 + y^2 = \dfrac{4x}{y} \\ 4y * \dfrac{y}{4x} - x = 0 \rightarrow y^2 - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ 2 + x^2 + y^2 = \dfrac{4x}{y} \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x \\ 2 + x^2 + y^2 = \dfrac{4x}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ 2 + 2x^2 = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x \\ 2 + 2x^2 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -x \\ 2x^2 + 6 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo sbagliato un punto critico, che sicuramente è (0,0)..
Il secondo sistema non ha soluzioni reali.

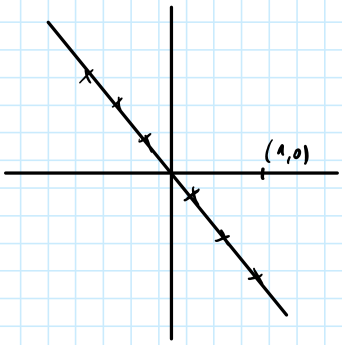
$$\begin{cases} y = x \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$0 = (0,0), A = (1,1), B = (-1,-1)$

Dove (0,0) è un punto di minimo, A e B sono punti di sella.
Il determinante hessiano è minore di zero.

5) $f(x,y) = x^2 \log(x + y)$

$x + y > 0 \rightarrow y > -x$

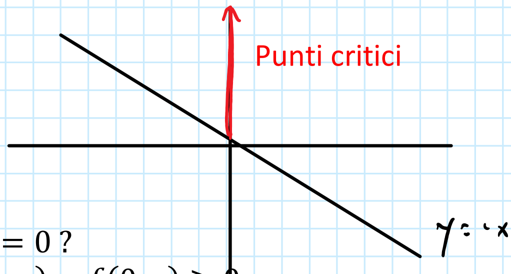


$$f_x = 2x\log(x + y) + \frac{x^2}{x + y}$$

$$f_y = \frac{x^2}{x+y}$$

$$\begin{cases} 2x\log(x+y) + \dfrac{x^2}{x+y} = 0 \\ \dfrac{x^2}{x+y} = 0 \end{cases}$$

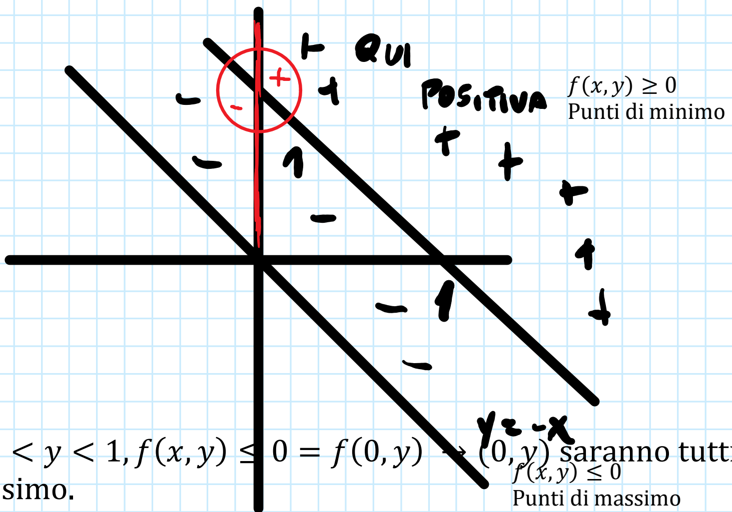
Notiamo che quando $x = 0$, il sistema risulta essere soddisfatto da qualsiasi punto della seconda coordinata y $(0, y)$, con $y > 0$ (per definizione)
$(0, y), y > 0$ è una semiretta di punti critici.



$Hf(0, y) = 0$?
$\Delta f = f(x, y) - f(0, y) \geq 0$
$f(0, y) = 0$
Quando $\Delta f \geq 0 \rightarrow f(x, y) \geq 0 \rightarrow x^2 \log(x+y) \geq 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \neq 0 \\ \log(x+y) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \neq 0 \\ x+y \geq 1 \end{cases}$$



- Se $0 < y < 1, f(x, y) \leq 0 = f(0, y) \rightarrow (0, y)$ saranno tutti punti di massimo.
- Se $y > 1, f(x, y) \geq 0 = f(0, y) \rightarrow (0, y)$ punti di minimo

$y = 1$, punto di sella

Come si determinano gli estremi assoluti di una funzione a più variabili?

Massimi e minimi assoluti

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$f = f(x,y), f: k \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\exists \min_{[a,b]} f , \max_{[a,b]} f$ Teorema di Weierstrass per funzioni a singola variabile

Una funzione di due variabili sarà definita in un insieme di cui non sappiamo la natura.. Per cui si vuole definirla in un insieme compatto.

$f: k \to \mathbb{R}$ continua

$k\ compatto!$

(chiuso e limitato)!

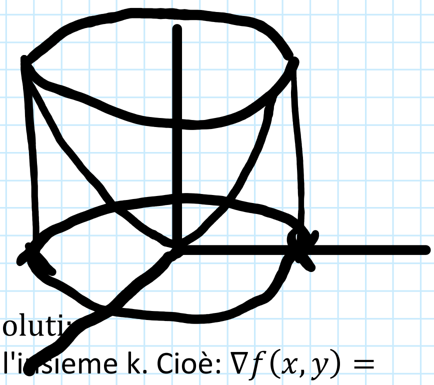
Allora si può invocare il Teorema di Weierstrass, il quale afferma che la funzione ammette che esistono i minimi e i massimi:

$\exists \min_k f , \exists \max_k f$

Valgono anche i punti sulla frontiera e sul bordo.

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$k = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$



Per verificare se si tratta di massimi/minimi assoluti:

1) Calcolare i punti critici di $f(x, y)$ che siano nell'insieme k. Cioè: $\nabla f(x,y) = 0 \to \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$

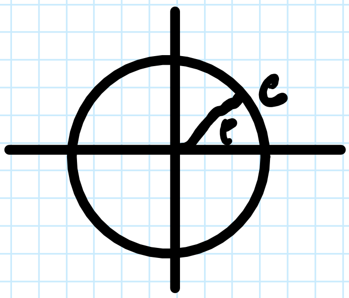
   Non è necessario calcolare l'hessiano di f
2) Analizzare la funzione sul bordo (in ? ∂k)

   $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$

   La circonferenza, ad esempio:

   $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$

   $x^2 + y^2 = 1$

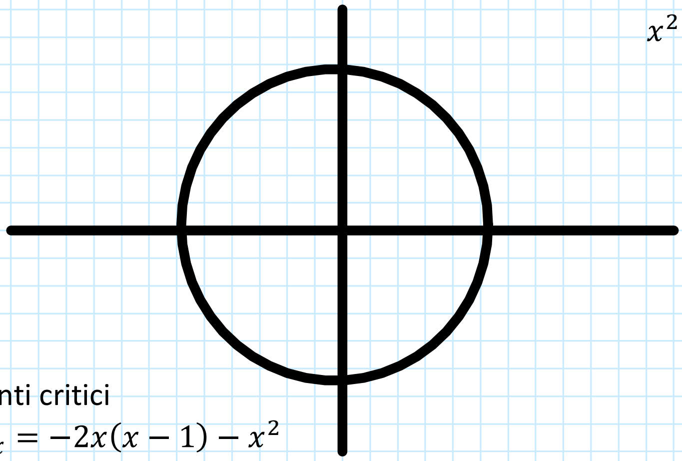


$F(t) = f\big(x(t), y(t)\big), t \in [a,b]$

Di questa funzione va calcolato il minimo e il massimo.

Esempio

Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x,y) = y^2 - x^2(x-1)$ nel cerchio unitario.



$x^2 + y^2 \leq 1$

1) Punti critici

$$\begin{cases} f_x = -2x(x-1) - x^2 \\ f_y = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

$0 = (0,0) \in C$

$A = \left(-\dfrac{2}{3};0\right) \in C$

$$f(0,0) = 0, f\left(-\frac{2}{3},0\right) = \frac{4}{27}$$

Studio sulla frontiera, to be continued.

Studio sulla frontiera ∂x ...

$$f(x,y) = y^2 - x^2(x-1) \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

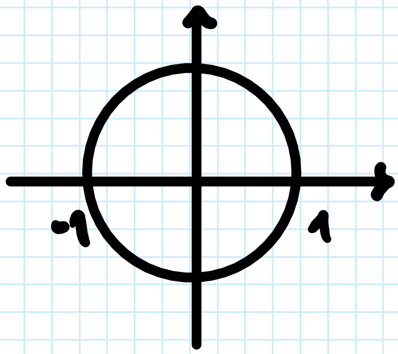
$$f\big(x(t), y(t)\big) = f(\cos t, \sin t) = \sin^2 t - \cos^2 t\,(\cos t - 1)$$
$$= \sin^2 t - \cos^3 t + \cos^2 t = 1 - \cos^3 t = F(t)$$

$t \in [0,2\pi]$: minimo e massimo assoluto

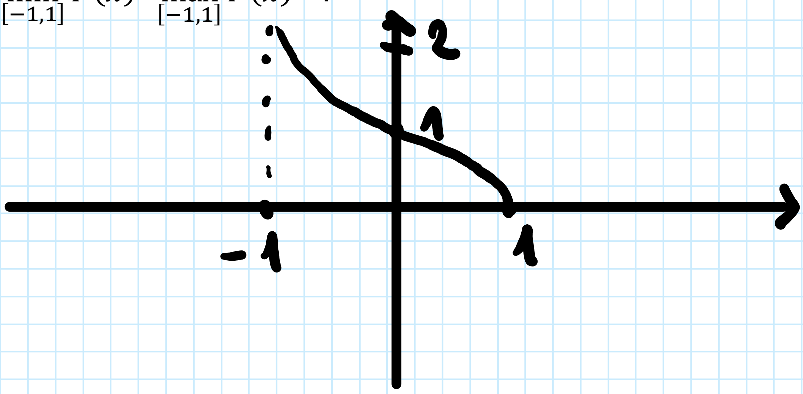
Un altro modo utilizzabile in questo caso:
$\partial c, x^2 + y^2 = 1 : y^2 = 1 - x^2$

Inserendo tale relazione nella funzione abbiamo:
$F(x) = 1 - x^2 - x^2(x-1) = 1 - x^2 - x^3 + x^2 = 1 - x^3$

Quindi x varia tra -1 e 1



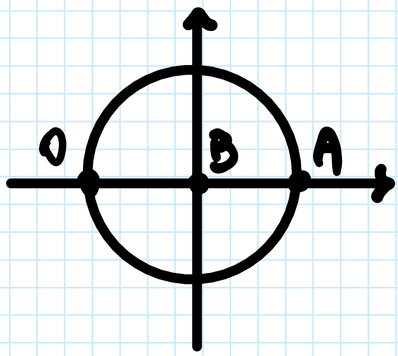
Quindi minimo a massimo della funzione saranno:
$\min_{[-1,1]} F(x) \quad \max_{[-1,1]} F(x) \quad ?$



$\min_{[-1,1]} F(x) = 0 \quad \max_{[-1,1]} F(x) = 2$

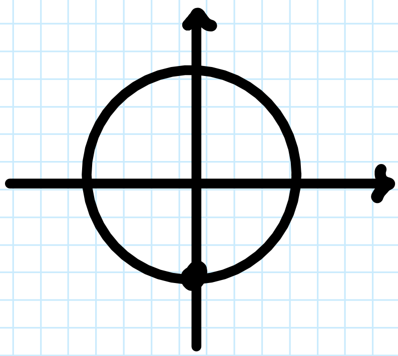
$0, \frac{4}{27}, 2$
Quindi $\min_C f = 0, \max_C f = 2$

Ora bisogna vedere i punti di minimo assoluto e i punti di massimo assoluto.
<u>Punti di minimo assoluto</u>: $0 = (0,0)$
$x = 1 : x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 0$
Quindi i punti di minimo assoluto sono: $0 = (0,0), A = (1,0)$



<u>Punti di massimo assoluto</u>
$x = -1 : x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 1 + x^2 = 1 \Leftrightarrow y = 0$
Quindi i punti di massimo assoluto sono: $B = (-1,0)$

Altro esempio (sempre sulla circonferenza)
$f(x,y) = xy$



$\begin{cases} f_x = y = 0 \\ f_y = x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
$0 = (0,0), f(0,0) = 0$

Su ∂c: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi]$

$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \sin t \cos t$

$F(t) = \frac{1}{2}\sin(2t), t \in [0,2\pi]$

$PS: \sin(2t) = 2\sin t \cos t$

$\min\limits_{t\in[0,2\pi]} F(t) = -\frac{1}{2}$

$\max\limits_{t\in[0,2\pi]} F(t) = \frac{1}{2}$

$\min\limits_{C} f = -\frac{1}{2}, \max\limits_{C} f = \frac{1}{2}$

Adesso bisogna vedere dov'è che la funzione assume valori minimo e massimo (ovvero i punti sulla frontiera che sono minimo assoluto e massimo assoluto)

Minimo assoluto

$\sin(2t) = -1 \Leftrightarrow 2\mathrm{t} = \frac{3}{2}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{k} \in \mathrm{z} \Leftrightarrow \mathrm{t} = \frac{3}{4}\pi + \mathrm{k}\pi, \mathrm{k} \in \mathrm{z}$

$k = 0 : t_1 = \frac{3}{4}\pi$

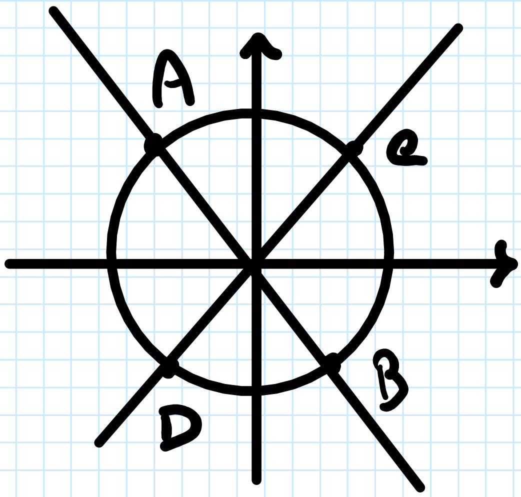
$k = 1 : t = \frac{3}{4}\pi + \pi = \frac{7}{4}\pi$

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

$t = t1 : \begin{cases} x = \cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad t = t2 : \begin{cases} x = \cos\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sin\frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$A = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Punti di minimo assoluto (A e B)



Massimo assoluto

$\sin(2t) = 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{t} = \frac{\pi}{2} + 2\mathrm{k}\pi \Leftrightarrow \mathrm{t} = \frac{\pi}{4} + \mathrm{k}\pi, \mathrm{k} \in \mathrm{z}$

$k = 0 \quad t_3 = \frac{\pi}{4}$

$k = 1, t_4 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$

$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

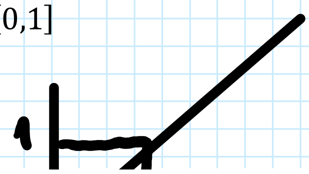
$D = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

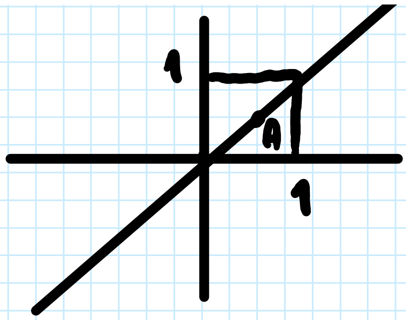
Punti di massimo assoluto (C e D)

Altro esempio

$f(x,y) = 2xy - y^2 - x^4$

$Q = [0,1] * [0,1]$





$$\begin{cases} f_x = 2y - 4x^3 = 0 \\ f_y = 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x^3 = 0 \\ x - y = 0 \quad \Leftrightarrow \mathrm{y = x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x - 2x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x = \left(1 - 2x^2\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$O = (0,0), A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f(0,0) = 0, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

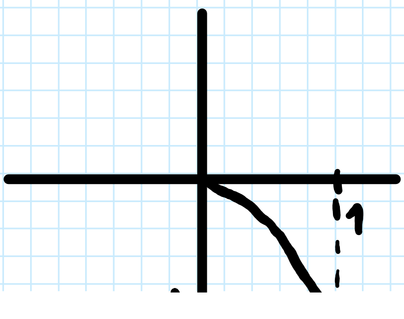
Su ∂Q: Si studia la funzione su ciascuno dei segmento OB, BC, CD, OD.

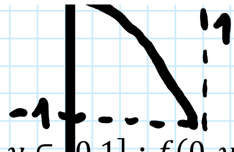
$\overline{OB} : y = 0, x \in [0,1]$

$f(x,y) = 2xy - y^2 - x^4$

$g_1(x) = f(x,0) = -x^4, x \in [0,1]$

$\min_{[0,1]} g_1 \qquad \max_{[0,1]} g_1$

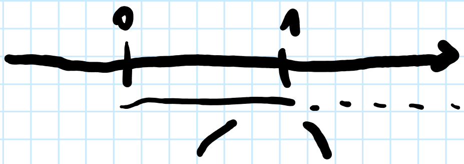


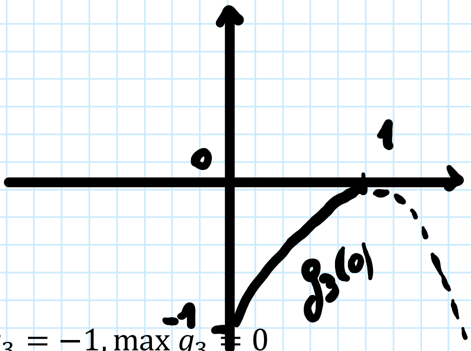


$\overline{OD}: x = 0, y \in [0,1]: f(0,y) = -y^2 = g_2(y)$
$\min\limits_{[0,1]} g_1 = -1 \quad \max\limits_{[0,1]} g_2 = 0$

Su $\overline{BC}: x = 1, y \in [0,1]$
$g_3(y) = f(1,y) = 2y - y^2 - 1 = -y^2 + 2y - 1$
$y \in [0,1]$

$g_3(0) = -1, g_3(1) = -1 + 2 - 1 = 0$
$g_3'(y) = -2y + 2 \geq 0 \iff y \leq 1$
La funzione è sempre crescente (nell'intervallo 0,1)

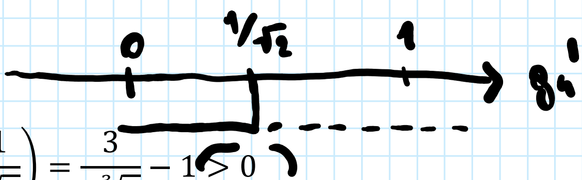




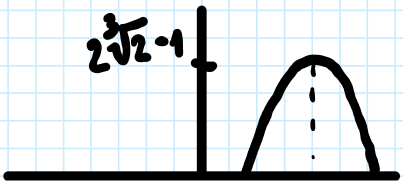
$\min\limits_{[0,1]} g_3 = -1, \max\limits_{[0,1]} g_3 = 0$

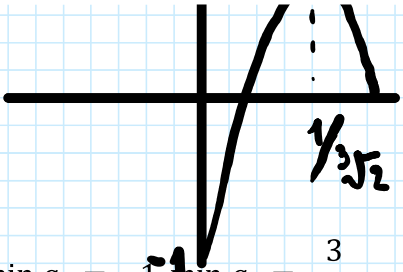
Su $\overline{CD}: y = 1, x \in [0,1]$
$f(x,1) = 2x - 1 - x^4 = -x^4 + 2x - 1$
$x \in [0,1]$

$g_4(0) = -1, g_4(1) = -1 + 2 - 1 = 0$
$g_4'(x) = -4x^3 + 2 \geq 0 \iff 2x^3 - 1 \leq 0 \iff x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$



$g_4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} - 1 > 0$





$\min\limits_{[0,1]} g_4 = -1, \min\limits_{[0,1]} g_4 = \dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}} - 1$

$-1, 0, \left(\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}} - 1\right), \dfrac{1}{4}$

$\min\limits_{Q} f = -1, \max\limits_{Q} f = \dfrac{1}{4}$

$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ unico punto di massimo assoluto

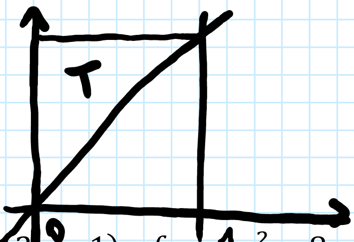
$B = (1,0)$ punto di minimo assoluto

$D = (0,1)$ punto di minimo assoluto

Altro esercizio sullo studio della frontiera

$f(x,y) = x^2(2y-1) - 4y^2$

Estremi assoluti in $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$



$y \geq x$

Consideriamo la parte di sopra del quadrato.

$f_x = 2x(2y-1) \quad f_y = 2x^2 - 8y$

$$\begin{cases} 2x(2y-1) = 0 \\ 2x^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(2y-1) = 0 \\ x^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2y = 1 \\ x^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

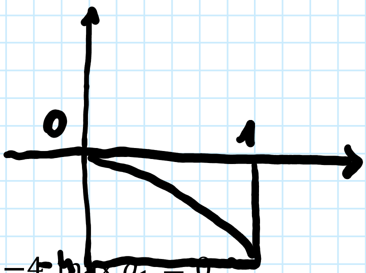
$0 = (0,0), A = \left(-\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}\right), B = \left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Il punto A non lo consideriamo, poiché l'ascissa è compresa tra 0 e 1.

Neanche il punto B.

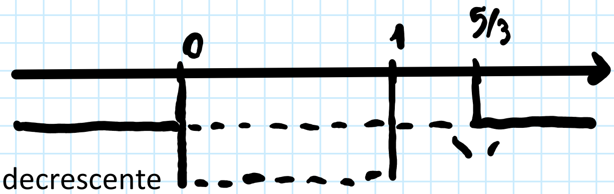
$f(0,0) = 0$

Sulla frontiera ∂T :
$\overline{OB}$: $x = 0, g_1(y) = f(0,y) = -4y^2, y \in [0,1]$

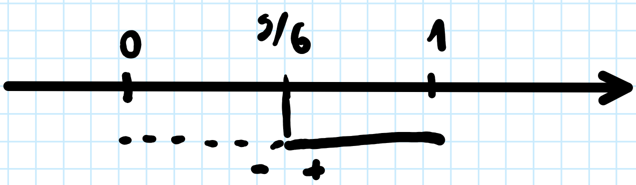


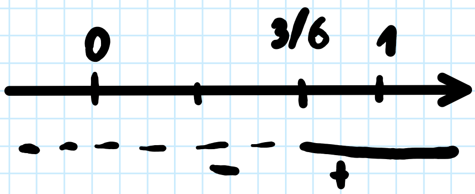
$\min\limits_{[0,1]} g_1 = -4, \max\limits_{[0,1]} g_1 = 0$
Su $\overline{OA}$: $y = x, g_2(x) = f(x,x) = x^2(2x-1) - 4x^2$
$g_2(x) = 2x^3 - x^2 - 4x^2 = 2x^3 - 5x^2$

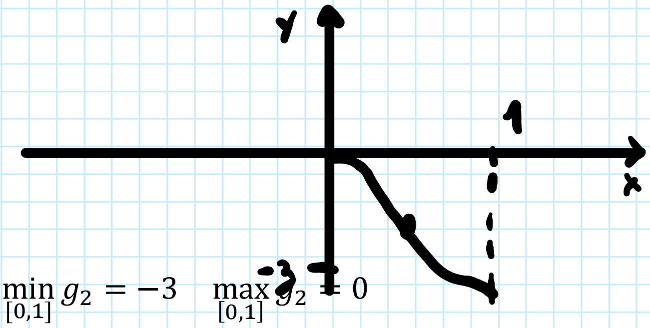
$g_2(0) = 0, \qquad g_2(1) = 2 - 5 = -3$
$g_2'(x) = 6x^2 - 10x \geq 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x \geq 0$
$\Rightarrow x \leq 0, x \geq \frac{5}{3}$ $\qquad\qquad x \in [0,1]$



g_2 decrescente
$g_2''(x) = 6x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{6}$

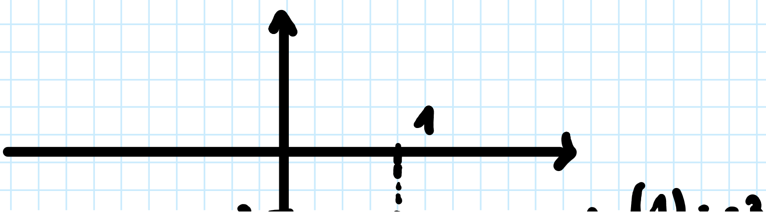


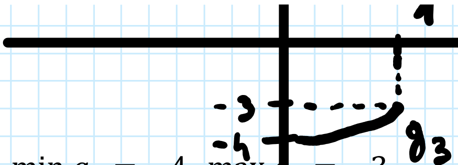




$\min\limits_{[0,1]} g_2 = -3 \quad \max\limits_{[0,1]} g_2 = 0$

$\overline{AB}$: $f(x,y) = x^2(2y-1) - 4y^2$
$y = 1, g_3(x) = f(x,1) = x^2 - 4, x \in [0,1]$





$g_3(1) = -3$

$\min_{[0,1]} g_3 = -4 \quad \max_{[0,1]} g_3 = -3$

$-4, -3, 0$
$\min_T f = -4, \max_T f = 0$
$f(0,0) = 0$
$(0,0)$ è il massimo assoluto

Completare la funzione per la determinazione dei punti di minimo.

Prima prova intercorso

venerdì 29 ottobre 2021 14:30

Argomenti prima prova intercorso
Data: 12 Novembre
Luogo: Si terrà in presenza, nell'aula 2.
Gli argomenti sono: le serie numeriche, le serie di potenze, le derivate (parziali, direzionali), massimi e minimi relativi (o assoluti).

Ci sarà anche qualche domanda di teoria (definizioni, ma senza dimostrazione).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

CONDIZIONE NECESSARIA CONVERGENZA LIMITE TERMINE GENERALE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ serie geometrica

convergente poiché è <1, converge assolutamente

Se $0<|x|<1$ di $\sum (x)^n$ il risultato è $\frac{1}{1-x}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+1}$ diverge $\sim$ asintotica $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+1} \to \frac{n}{n^{1/2}+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + (-1)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n =$ indeterminata perché la prima sommatoria converge e la seconda è indeterminata

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n^2+3}{7n^2+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+3}{7n^2+1} = \frac{9}{7}$ diverge perché è $\neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]^{\frac{n^2+1}{n+1}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right] = 0$ siccome l'esponente è infinito $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} \to 0$

LA CONDIZIONE È VERIFICATA

Criterio infinitesimi (confronto asintotico)

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ = converge assolutamente < 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\pi)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\pi)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\pi)^n} = 0$$

Criterio della radice

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\pi)} = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 0$ converge

Funzioni implicite, massimi e minimi vincolati

lunedì 8 novembre 2021 10:56

Funzioni implicite

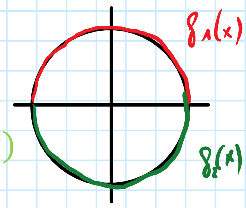
$g = g(x, y), \qquad g(x, y) = 0, \qquad g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1: x^2 + y^2 - 1 = 0 \iff x^2 + y^2 = 1$

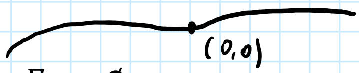
La funzione $g(x, y) = 0$ identifica l'insieme $E_0 = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$

$g(x, y) = 0$ qualche volta è possibile ricavare (o esplicitare) la y in funzione di x o viceversa.
Esempi: $y = y(x), x = x(y)$
L'esplicitazione può essere locale o globale (come nei casi di una funzione a singola variabile).

1) $\boldsymbol{g(x, y) = ax + by + c = 0} \quad a, b \neq 0$
   $g(x, y) = 0 \quad \to \quad ax + by + c = 0$
   $by = c - ax \to y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$
   $ax = c - by \to x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}y$
   E_0 è una retta
2) $\boldsymbol{xe^y - \epsilon y^2 + 1 = 0} : xe^y = 3y^2 - 1$
   $\to x = e^{-y}(3y^2 - 1)$
   Non si può esplicitare la y!
3) $\boldsymbol{g(x, y) = x^2 + y^2 - 1} : g(x, y) = 0 \to x^2 + y^2 = 1$
   $y^2 = 1 - x^2 : y = \sqrt{1 - x^2} = f_1(x)$ *oppure* $y = -\sqrt{1 - x^2} = f_2(x)$
   Se imponiamo il passaggio per $(0, -1) : y = -\sqrt{1 - x^2} = f_2(x)$
   $f_2(0) = -1$



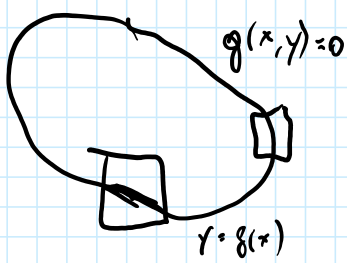
4) $g(x, y) = x\,e^y + y\,e^x = 0$
   $g(0,0) = 0$



5) $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$ non è mai soddisfatta: $E_0 = \emptyset$

Funzione implicita $g = g(x, y), g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
La funzione $y = f(x), x \in I \subseteq \mathbb{R}$ si dirà definita implicitamente dall'equazione $g(x, y) = 0$ se:

1) $(x, f(x)) \in A, \forall x \in I$
2) $g(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in I$

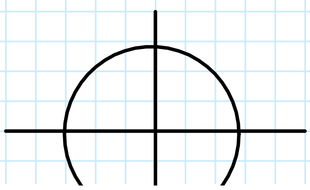


$x^2 + y^2 = 1$ in $(0,1)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$ funzione implicita
$g(x, f(x)) = g\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0$
$g = x^2 + y^2 - 1, y \in J \subseteq \mathbb{R}$

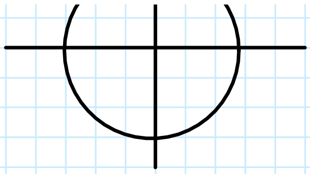
La funzione $x = h(y)$ si dirà definita implicitamente da $g(x, y) = 0$ se:

1) $(h(y), y) \in A, \forall y \in J$
2) $g(h(y), y) = 0, \forall y \in J$

$g = x^2 + y^2 - 1 \quad x^2 + y^2 = 1$

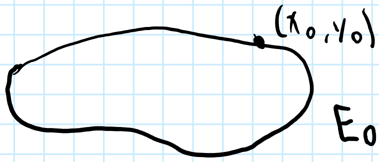


$g = x^2 + y^2 - 1 \quad x^2 + y^2 = 1$



$x = \sqrt{1 - y^2} = h(y)$
$g(h(y), y) = g\left(\sqrt{1 - y^2}, y\right) = 1 - y^2 + y^2 - 1 = 0$

Teorema del Dini
$g = g(x, y), \qquad g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, intervallo\ A\ aperto.$
Supponiamo che:
1) g, g_y siano continue in A
2) $\exists (x_0, y_0) \in A$ tale che $g(x_0, y_0) = 0$ e la derivata $g_y \neq 0$

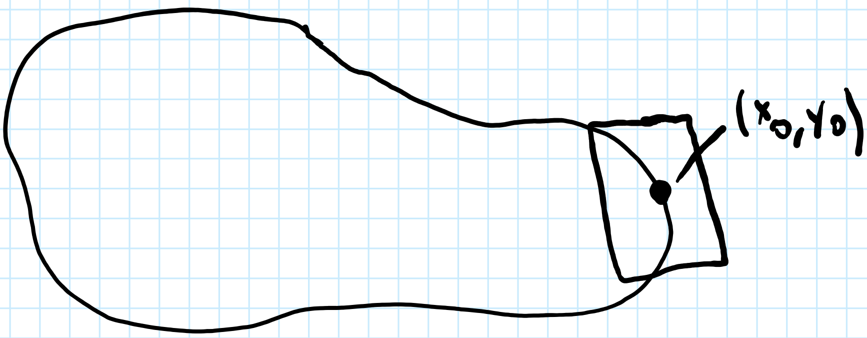


Allora esiste un'unica funzione $y = f(x)$, definita in un intorno U di x_0, continua in U, tale che $f(x_0) = y_0$ ed inoltre $g\big(x, f(x)\big) = 0, \forall x \in U$.

Se inoltre la derivata g_x è continua in A, allora $f \in C^1\ (U)$ e vale la seguente formula:
$f'(x) = \frac{g_x\big(x, f(x)\big)}{g_y\big(x, f(x)\big)}, \forall x \in U$
In particolare: $f'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$

Se invece si ha come condizione che:
1) La funzione g è continua in A
2) La derivata g_x è continua in A
3) $g(x_0, y_0) = 0, g_x(x_0, y_0) \neq 0$

Allora esiste un intorno V di y_0 ed un'unica funzione $x = h(y)$, continua in V, tale che $h(y_0) = x_0$ ed inoltre $g(h(y), y) = 0, \forall y \in V$.



Se g_y è continua, allora $h \in C^1(V)$ e…
$h'(y) = -\frac{g_y(h(y), y)}{g_x(h(y), y)}, \forall y \in V$

Boh?
$f'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$

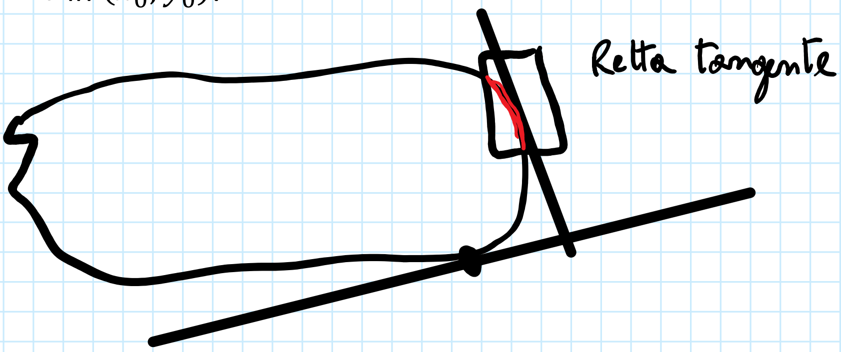
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$

$g - f(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$

$g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$

Questa è l'equazione della retta tangente alla curva.

$E_0 : g(x, y) = 0$ in (x_0, y_0).



Esempio

$g(x, y) = x\,e^y + y\,e^x, \qquad \mathrm{g}(0{,}0) = 0$

Calcolare la derivata rispetto a y.

$g_y = x\,e^y + e^x, \qquad g_y(0{,}0) = 1 \neq 0$

Secondo il teorema del Dini, in un intorno di $(0{,}0)$ è possibile esplicitare la y in funzione di x (∃!

Funzione emplicita $y = f(x)$, passante per $(0{,}0)$) ed inoltre $f'(x) = -\frac{g_x(x, f(x))}{g_y(x, f(x))}$.

$f'(0) = -\frac{g_x(0{,}0)}{g_y(0{,}0)} = -1$

$g_x = e^y + y\,e^x$

$g_x(0{,}0) = 1$

Equazione della retta tangente: $y = f(0) + f'(0)x = (-1) * x = -x$

Equazione della retta tangente alla curva $x\,e^y + y\,e^x = 0$ è $y = -x$

Massimi e minimi vincolati

Abbiamo una $f = f(x, y)$, $\; f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\; g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f, g \in C^1(A)$

Problema principale: determinare gli estremi della funzione obiettivo $f = f(x, y)$, ristretta all'insieme.

$E_0 = \{(x, y) \in A: g(x, y) = 0\}$

Questo insieme è chiamato vincolo, e ne va determinata la sua natura.

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

<u>Esempio</u>

$E_0: x^2 + y^2 = 1 \quad circonferenza$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \qquad t \in [0,2\pi]$$

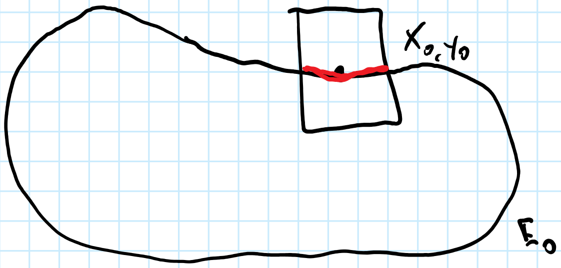
$\Phi(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = f(\cos t, \sin t)$

$t \in [0,2\pi]$

Calcoliamo minimo e massimo $\rightarrow$ estremi vincolati.

In generale non è possibile ragionare così!

Supponiamo che $(x_0, y_0) \in E_0$, ossia $g(x_0, y_0) = 0$



(x_0, y_0) sia regolare, ossia $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$

Se $g_y(x_0, y_0) \neq 0, y = f(x)$ in un opportuno intorno di x_0

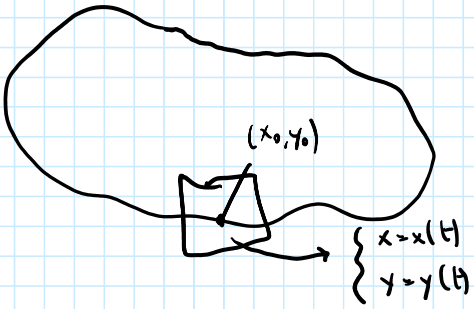
Se $g_x(x_0, y_0) \neq 0, x = h(y)$ in un intorno di y_0.

$y = f(x) : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$, dove t varia in un certo intorno di $t_0 = x_0$.

In generale, possiamo indentificare E_0 come una curva bidimensionale di equazioni parametriche.

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I = Intorno\ di\ t_0 = 0$

Al valore t_0 corrisponde il punto $\big(x(0), y(0)\big) = (x_0, y_0)$



$\Phi(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$

$\Phi(0) = f(x_0, y_0)$

Definizione

Si dice che $(x_0, y_0) \in E_0, \nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ è un punto critico di $f(x, y)$ vincolato a $g(x, y) = 0$ se $\Phi'(0) = 0$.

$\Phi'(t) = f_x\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t)$

$\Phi'(0) = f_x(x_0, y_0)\, x'(0) + f_y(x_0, y_0) y'(0) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = \nabla f * \lambda$

Un punto è critico/vincolato se la derivata tangenziale di f al vincolo è 0!

Teorema
Supponiamo che $(x_0, y_0) \in E_0$ sia un punto regolare, ossia $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. Allora (x_0, y_0) è punto critico di f, vincolato ad $E_0 \rightarrow\ \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0\, \nabla g(x_0, y_0)$.

λ_0 si chiama moltiplicatore di Lagrange, poiché

Teorema (senza dimostrazione)
Questa è la condizione necessaria per gli estremi vincolati.
Se $(x_0, y_0) \in E_0$ è un estremo realtivo di f, vincolato al vincolo $g(x, y) = 0$, significa che (x_0, y_0) è di massimo o di minimo.
$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I(x_0, y_0) \cap E_0$
$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in L(x_0, y_0) \cap E_0$

Allora (x_0, y_0) è un punto critico vincolato (condizionato al vincolo).

<u>Rappresentazione pratica</u>
$\nabla f(x, y) = \lambda g(x, y)$
$L(x, y, \lambda) = Lagrangione\ di\ f \coloneqq f(x, y) - \lambda\, g(x, y)$
(x_0, y_0) è un punto critico regolare $\rightarrow \exists \lambda_0 : \nabla f(x_0, y_0)$

$\nabla L(x, y, \lambda) = (L_x, L_y, L_\lambda) = (f_x - \lambda g_x, f_y - \lambda g_y, -g)$.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange
$$\nabla L(x, y, \lambda) = 0 \rightarrow \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$
Conclusione: i punti critici (max e minimi vincolati) si ottengono risolvendo il sistema (S).

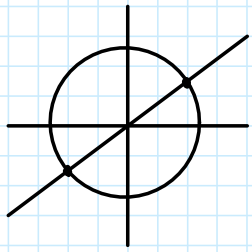
Esercizio
Trovare gli estremi della funzione $f(x, y) = e^{x+y}$ sul vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 : E_0 = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$
$\nabla g = (2x, 2y) = (0{,}0) \rightarrow (x, y) = (0{,}0) \backslash \text{notexist } f_0$
Tutti i punti di e_0 sono regolari

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = e^{x+y} - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$
Determiniamo i punti critici della Lagrangiana.
$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^{x+y} - 2\lambda_x = 0 \\ e^{x+y} - 2\lambda y = 0 \\ -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^{x+y} - 2\lambda x = 0 \\ e^{x+y} - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{x+y} = e\lambda_x \\ e\,\lambda_x = -2\lambda_y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^{x+y} = e\lambda_x \\ \lambda(x-y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda_x \\ x - y = 0 \rightarrow y = x \\ x^2 + x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{x+y} = 2\lambda_x \\ y = x \\ 2x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{-\sqrt{2}} = e * \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\lambda = -\sqrt{2}\,\lambda \end{cases}$$



$$\lambda = -\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\lambda, dove\ \lambda = \dfrac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$A = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\sqrt{2}} < f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{\sqrt{2}}$$

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

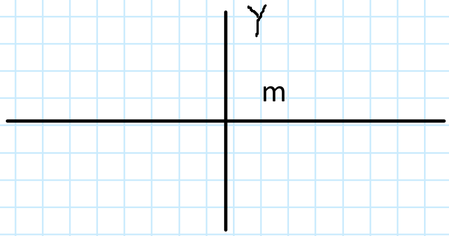
A punto di minimo vincolato

B punto di massimo vincolato

Equazioni differenziali

mercoledì 10 novembre 2021 11:14

Equazioni differenziali



$ma = f\big(t, g(t), y'(t)\big)$
$ma(t) = m\,y^{n}(t) = f\big(t, y(t), y'(t)\big)$

L'equazione differenziale ha come incognita una funzione, in questo caso il tempo.
Quindi un'**equazione differenziale** è un'equazione che coinvolge la funzione e le sue derivate, dove l'incognita da determinare è una funzione.

Altro esempio
$my''(t) = f\big(t, y(t), y''(t)\big) = -mg$
$my''(t) = -mg$
$y''(t) = -g$

Integriamo:
$y'(t) = -\int g\,dt = -gt + c$
$y' = -gt + c$
Integriamo di nuovo:
$y(t) = -\int gt\,dt + \int c\,dt$
$y(t) = -g\int tdt + c\int dt = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$
$c, d \in \mathbb{R}$ sono due costanti arbitrarie

Le condizioni iniziali naturali in questo caso, sono:
$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
Imponendo la seconda condizione a ($y' = -gt + c$), allora $c = 0$.
Imponendo la prima condizione a ($-\frac{1}{2}gt^2 + d$), allora $d = 0$; per cui:
$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$. Soluzione di $\begin{cases} y''(t) = -g \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ **Problema di Cauchy**
Soluzione di secondo ordine, quindi bisogna avere due condizioni inziali per poter risolvere l'equazione.

Altro esempio
$y(t)$ è la radioattività di una sostanza
$y'(t) = -\lambda\,y(t)$, dove $\lambda > 0$.
la radioattività decresce in maniera proporzionale alla radioattività stessa.

Equazione differenziale del primo ordine
Esempio dall'analisi
Prendiamo una funzione $g(x)$ continua in $[a,b]$: si vogliono conoscere le primitive.
$y'(x) = g(x)\ \forall x \in [a,b]$ (equazione del primo ordine)

$x_0 \in [a,b]$:
$$y(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + c\,, c \in \mathbb{R}$$
Le soluzioni dipendono da una costante arbitraria.

Per andare a determinare la soluzione in modo univoco, bisogna imporre una condizione iniziale (siccome si ha a disposizione una sola costante).
Condizione iniziale: $y'(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$, imponendo tale condizione in $y(x)$, si ha
$$y_0 = y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} g(t)dt + c = c$$

La soluzione cercata è $y(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + y_0$ soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Esempio
$y'(x) = \lambda y(x)$

Si tratta di un equazione differenziale del primo ordine.
Verifichiamo che la funzione $y(x) = c\, e^{\lambda x}$ risolve l'equazione (1):
$y'(x) = c\lambda e^{\lambda x}$
$y'(x) = c\lambda e^{\lambda x} = \lambda\left(c\, e^{\lambda x}\right) = \lambda y(x)$

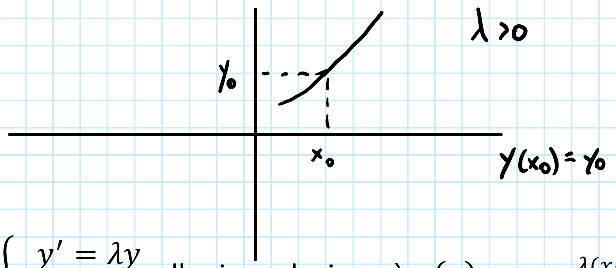
Abbiamo verificato che questa è una soluzione, cioè risolve l'equazione. Verifichiamo adesso che le funzioni $y(x) = c\, e^{\lambda x}, c \in \mathbb{R}$ sono le sole soluzione dell'equazione.

Sia $y(x)$ una soluzione di $y'(x)$, mostriamo che deve per forza essere $y(x) = c\, e^{\lambda x}$, con $c \in \mathbb{R}$.
$z(x) = y(x)\, e^{-\lambda x}, z'(x) = y'(x)e^{-\lambda x} - \lambda y(x)e^{-\lambda x}$
$= e^{-\lambda x}[y'(x) - \lambda y(x)] = 0 \rightarrow z'(x) = 0 \rightarrow z(x) = c\ costante$

Quindi $y(x)e^{-\lambda x} = z(x) = c$
$y(x) = c\, e^{\lambda x}$

Concludiamo che tutte le soluzioni di $y'(x) = \lambda y(x)$ sono date da $y(x) = c\, e^{\lambda x}, c \in \mathbb{R}$
Siccome ci sono infinite soluzioni, imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0, t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$.
$y_0 = y(x_0) = c\, e^{\lambda x_0}$
$c = y_0\, e^{-\lambda x_0}$

$y(x) = y_0\, e^{-\lambda x_0} e^{\lambda x} = y_0\, e^{\lambda(x-x_0)}$



$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ l'unica soluzione è $y(x) = y_0\, e^{\lambda(x-x_0)}$

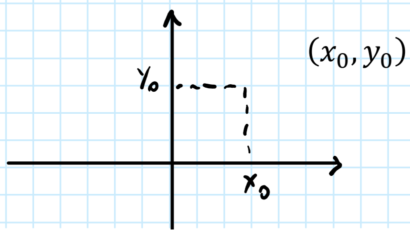
Altro esempio
$y''(x) = \lambda y'(x)$

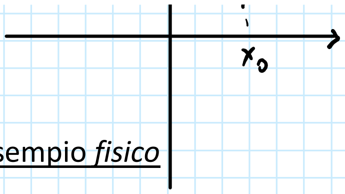
Si tratta di una equazione del secondo ordine! Poniamo:
$z(x) = y'(x)$
$z'(x) = \lambda\, z(x)$
L'incognita è $z(x)$!

Le soluzioni si scrivono nel modo: $z(x) = c\, e^{\lambda x}, c \in \mathbb{R}$
Quindi $y'(x) = c\, e^{\lambda x}$
$y(x) = c \int e^{\lambda x}\, dx = \frac{c}{\lambda} e^{\lambda x} + d$
$c, d \in \mathbb{R}$, sono due costanti arbitrarie!

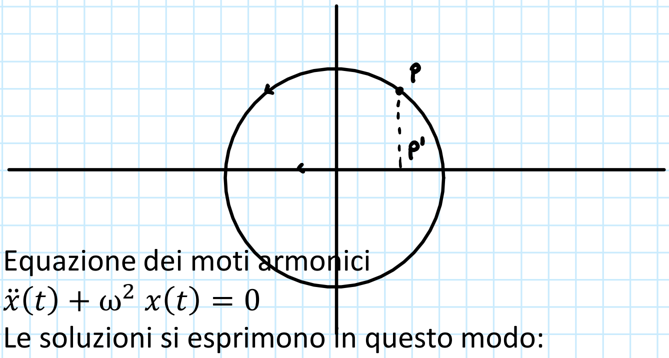
Capiamo come determinare univocamente la soluzione. Bisogna porre ovviamente DUE condizioni iniziali.
$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$ $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$ sono valori assegnati

Imponendo queste condizioni, $y'(x_0) = c\, e^{\lambda x_0}$
$c = y_0'\, e^{-\lambda x_0}$
$y(x) = \frac{1}{\lambda} y_0'\, e^{\lambda(x-x_0)} + d$
$y_0 = y(x_0) = \frac{1}{\lambda} y_0' + d$
$d = y_0 - \frac{1}{\lambda} y_0'$
$y(x) = \frac{y_0'}{\lambda}\, e^{\lambda(x-x_0)} + y_0 - \frac{1}{\lambda} y_0' = \frac{y_0'}{\lambda}\left(e^{\lambda(x-x_0)} - 1\right) + y_0$
$\begin{cases} y'' = \lambda y' \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$





<u>Esempio *fisico*</u>



Equazione dei moti armonici
$\ddot{x}(t) + \omega^2 \, x(t) = 0$
Le soluzioni si esprimono in questo modo:
$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$
$c_1; c_2 \in \mathbb{R}$

Equazione differenziale di ordine n

Una equazione differenziale di ordine n si dice scritta in forma normale se $y^{(n)}$ si può esplicitare rispetto a $x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$.
$y^{(n)} = f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$

Ad esempio, se si ha un'equazione scritta in questo modo:
$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$
Per poterla scrivere in forma normale scriviamo:
$y'' = -b(x)y - a(x)y'$

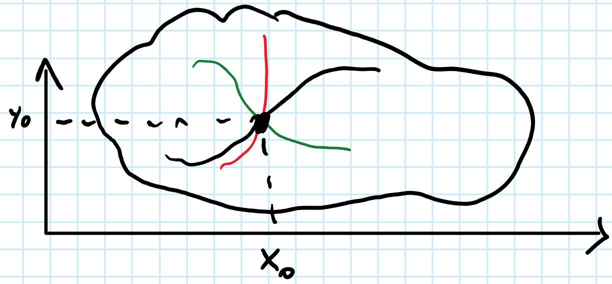
$\boldsymbol{n = 1}$: equazione in forma normale più generica si scrive nella forma
$y' = f(x, y)$
$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$

Esempio
$y' = y, \qquad f(x, y) = y$
$y' = x + y^2, \qquad f(x, y) = x + y^2$

Problema di Cauchy

Essa è un equazione di primo ordine, per cui si va a dichiarare una sola condizione.
$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \qquad dove\ x_0, y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$
La soluzione del problema è una soluzione dell'equazione soddisfacente la condizione $y(x_0) = y_0$. Quindi se volessimo rappresentarla graficamente:

la condizione $y(x_0) = y_0$. Quindi se volessimo rappresentarla graficamente:



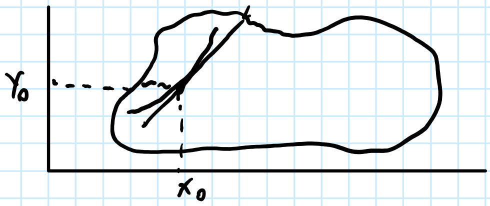
$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_0, y_0 \in A)$
Possono esserci più di una soluzione.
Questa è l'interpretazione grafica per l'equazione di Cauchy di un'equazione di primo ordine; per quanto riguarda quelle di secondo ordine vediamo un altro esempio.

Altro esempio
$y'' = f\big(x, y(x), y'(x)\big)$
Questa è la più generale equazione di secondo ordine in forma normale.
Ricordiamoci perciò l'equazione del moto:
$\dot{y} = f\big(t, y(t), \dot{y}(t)\big)$

Quindi il problema di Cauchy sarà del tipo:

$$\mathbb{P}' \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Dove x_0, y_0, y'_0 sono i dati iniziali assegnati



Sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \qquad x \to \big(y(x), z(x)\big) \in \mathbb{R}^2$$

Sistema di equazioni differenziali del secondo ordine

$$\begin{cases} y'' = f_1(x, y, z, y', z') \\ z'' = f_2(x, y, z, y', z') \end{cases} \qquad x \to \big(y(x), z(x)\big) \in \mathbb{R}^2$$

$y'' = f(x, y, y')$ è possibile ridurla ad un sistema di equazioni del primo ordine.

$y_1 = y, \qquad y_2 = y'$

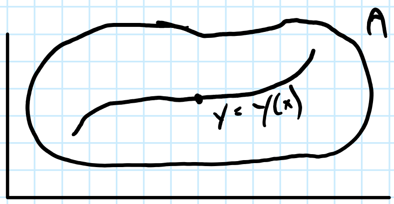
$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = f(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Studiare le equazioni e i sistemi di primo ordine consente di poter racimolare delle informazioni per le equazioni di ordine superiore al

primo.
Da adesso in avanti si studieranno soltanto le equazioni differenziali (in forma normale)

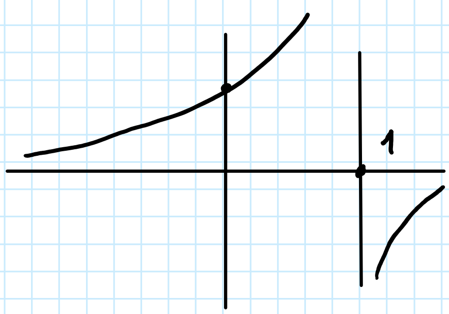
Equazioni differenziali del primo ordine (in forma normale)
$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$
$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definizione
Una soluzione di $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$ è una funzione $y = y(x),\ y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in I, tale che:
1) $\big(x, y(x)\big) \in A$
2) $y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \forall x \in I$



Definizione
$y = y(x)$
$$(P)\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \qquad (x_0, y_0) \in A$$
Una soluzione di (P) è una funzione $y = y(x), y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ tale che $y(x)$ è soluzione di $y' = f(x,y)$ e $y(x_0) = y_0$.

Esempio
$y = e\, e^{\lambda x}$
$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
$y' = \lambda y$
Questa equazione non è lineare; verifichiamo che la soluzione è $y(x) = \frac{1}{1-x}$ con $x \neq 1$ e $y(0) = 1$.



$$y' = \frac{1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \big(y(x)\big)^2$$
L'equazione è definita in tutto R meno il punto 1.
Questa è una soluzione **locale** del problema di Cauchy e non globale (definita in tutto R)
$y' = 1 * y^2$

Ci sono due modi per risolvere l'**equazione di Cauchy**:

- Risoluzione locale, o in piccolo, quando la soluzione di Cauchy è definita solo in un intorno di x_0
- Risoluzione globale, o in grande, quando l soluzione del problema di Cauchy è definita in tutto l'intervallo assegnato a priori, dove è definita l'equazione.

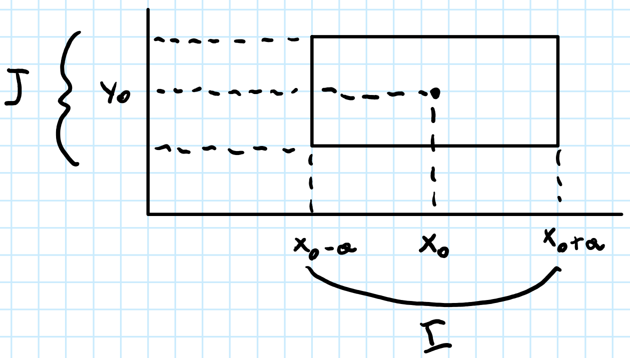
  $y' = \lambda y, \qquad y = ce^{\lambda x}$

Teorema di Cauchy (di esistenza ed unicità locale o in piccolo)

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \qquad I = [x_0 - a, x_0 + a]$

$a, b > 0, \qquad J = [y_0 - b, y_0 + b]$

$I * J$



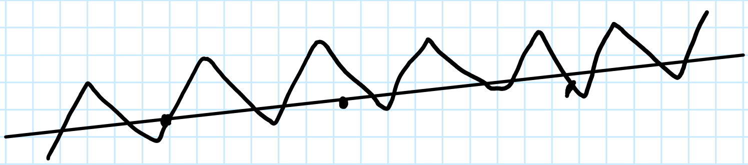
$f = f(x, y), \qquad f: I * J \to \mathbb{R}$

Alcune considerazioni **(ipotesi)**:

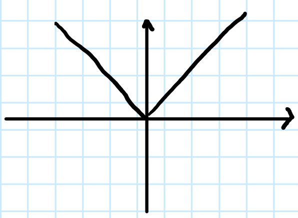
- f è continua in $I * J$;
- f è Lipschitziana (Lipschitz) rispetto ad y, uniformemente rispetto ad x : $\exists L > 0 : \left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leq L\left|y_1 - y_2\right|, \ \forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in J$

<u>Condizione di funzione Lipschitz</u>

$g(x)$ Lipschitziana se $\exists L > 0 : \left|g(x_1) - g(x_2)\right| \leq L|x_1 - x_2| \ \ \forall x_1, x_2 \in I \to \left|\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leq L$



$g(x) = |x|$

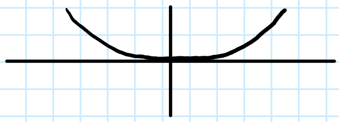


$\left|g(x_1) - g(x_2)\right| = \left||x_1| - |x_2|\right| \leq 1 * |x_1 - x_2|$

$L = 1$

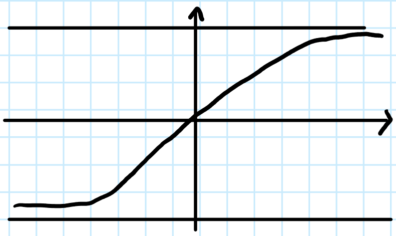
Proprietà
Se g è derivabile, allora g Lipschitziana $\rightarrow \exists L > 0 : |g(x)| \leq L,\ \forall x \in I.$

$g(x) = x^2,\ g'(x) = 2x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$



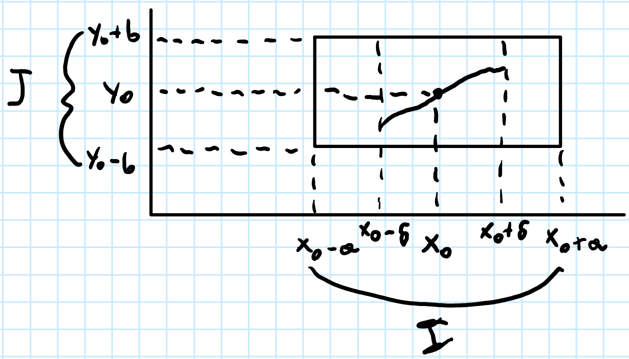
$g(x) = x^2, \qquad \forall x \in [-a, a]$
$|g'(x)| = 2|x| \leq 2a,\ L = 2$

Un esempio di funzione Lipschitziana in tutto R è l'arcotangente.
$g(x) = \arctan x$



$$g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$
$$|g'(x)| = \frac{1}{1 + x^2} \leq 1 =: L$$
Se g è Lipschitziana allora g è continua.

Enunciato del Teorema di Cauchy
Nelle due ipotesi di cui sopra $(f = f(x, y))$ continua in $I + J$ e Lipschitziana rispetto ad y, uniforme rispetto ad x, esiste un numero $\delta >$ 0 e $\delta < a$ ed esiste una sola funzione $y = y(x)$, y: $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, che risolve in tale intervallo il problema di Cauchy.
Problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (equazione differenziale del problema di Cauchy)



Osservazione
Sia $y = y(x)$ soluzione del problema.
$y'(x) = f(x, y(x)),\ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Se facessimo l'integrale:
$$\int_{x_0}^{x} t'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, t(t))\, dt$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt$$
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt$$
Questa qui appena fatta è l'equazione integrale.

Viceversa, se $y(x)$ risolve la soluzione $y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt,$
$y'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} \big(f(t)\, y(t)\big)\, dt =$ Teorema fondamentale del calcolo = $f\big(x, y(x)\big)$
$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Corollaio
$f: I * J \to \mathbb{R}$, continua ed inoltre supponiamo che $f \in C^1(I * J)$, dove $(I * J)$ è un insieme compatto). Allora vale la tesi del teorema di Cauchy.

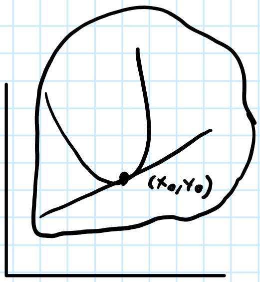
Dimostrazione
$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|, \quad con\ \vartheta\ tra\ y_1\ e\ y_2$
$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| =$ teorema di Lagrange $= \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \vartheta)\right| |y_1 - y_2|$ $\quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$
$g(y_1) - g(y_2) = g'(\Theta)(y_1 - y_2)$ Teorema di Lagrange per $y_1 > y_2$

Quindi $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua in $I * J$ per il teorema di Weierstrass, poiché $I * J$ compatto,
$\exists L > 0 : \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \le L, \forall x \in I\ e\ \forall y \in J$

Teorema di regolarità
$y' = f(x, y)$
$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$
con f continua

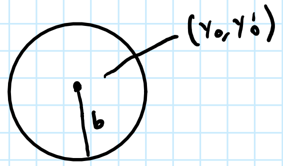
Se $f \in C^0 \to\ y \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$
Se $f \in C^1 \to\ y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$
$\qquad y'' = f_x\big(x, y(x)\big) + f_y\big(x, y(x)\big)\, y'(x)$
Se $f \in C^k \to\ y \in C^{k+1}$
Se $f \in C^\infty \to\ y \in C^\infty$

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} \quad x_0, y_0, y_0' \in \mathbb{R}$$



$f(x, y, z)$

$f(x, y, z)$
$I = [x_0 - a, x_0 + a]$
J =intorno sferico di (y_0, y_0'), di raggio $b > 0 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : \|(y, z) - (y_0, y_0')\| \leq b\}$

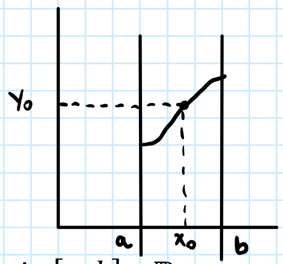


$I * J \subseteq \mathbb{R}^3$
(geometricamente I*J è un cilindro che non so disegnare)

$f = f(x, y, z),\ f: I * J \to \mathbb{R}$
1) f continua in $I * J$
2) f Lipschitziana rispetto ad y, z e uniforme rispetto ad x:
   $\exists L > 0 : |f(x, y_1, z_1) - f(x, t_2, z_2)| \leq L\ \|(y_1, z_1) - (y_2, s_2)\|_{\mathbb{R}^2}$
   $\forall x \in I, \qquad \forall (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in J$
   $\exists \delta > 0, \delta < a$, ed esiste un'unica funzione $y = y(x), y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, che risolve il problema:
   $$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Teorema di esistenza ed unicità globale, o in grande, di Cauchy

$f = f(x, y)$ definita in $[a, b] * \mathbb{R}$



1) f continua in $[a, b] * \mathbb{R}$
2) f Lipschitziana rispetto ad y, uniformemente rispetto ad x:
   $\exists L > 0 : |f(x, y_1 = -f(x, y_2) \leq L|y_1 - y_2|\ \forall x \in [a, b], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

Allora, per ogni $x0 \in [a, b]$ ed ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste una sola funzione $y = y(x)$, $y: [a, b] \to \mathbb{R}$ che risolve in tutto $[a, b]$ il problema
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Equazioni lineari del primo ordine

$y' = a(x)y + b(x)$
Dove $a(x)$ e $b(x)$ vengono chiamati rispettivamente <u>coefficiente</u> e <u>termine noto</u>.

$y' = \lambda y$
$a(x) = \lambda, \qquad b(x) = 0$
$y' = x^2 y - \log x : a(x) = x^2, b(x) = -\log x$

Quando $b(x) = 0$, allora l'equazione $y' = a(x)y$ si dirà omogenea.

$\frac{dy}{dx} = a(x)y$ separando le variabili : $y \neq 0$,

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx$$

$$\log|y| = \int a(x)dx = F(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$|y| = e^{F(x)+c}$
$y = (\pm e^c)e^{F(x)} = k\, e^{F(x)}, \qquad con\ k \neq 0$

$$y' = \lambda y : \frac{dy}{dx} = \lambda y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \lambda\, dx = \lambda x + c$$

$\log|y| = \lambda x + c$
$|y| = e^{\lambda x} * e^c$
$y = \pm e^c * e^{\lambda x} = k\, e^{\lambda x}, \qquad con\ k \in \mathbb{R}$

$y' = -e^x y, \qquad a(x) = -e^x$

$$\frac{dy}{dx} = -e^x y : \int \frac{dy}{y} = -\int e^x\, dx$$

$\log|y| = -e^x + c$
$|y| = e^{-e^x + c} \to g = k\, e^{-e^x}$

$$\begin{cases} y' = -e^x y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Troviamo $y(0) = k\, e^{-1}$
$1 = y(0) = k\, e^{-1}$
$k = e$
$\boldsymbol{y = e * e^{-e^x}}$
Abbiamo trovato la soluzione del problema di Cauchy

Altro esempio
$y' = -(\sin 2x)\, y$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int (\sin 2x)\, dx$$

$$\log|y| = -\frac{1}{2}\int 2\sin(2x)\, dx = \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2}\cos 2x} * e^c$$

$$y = \pm e^c * e^{\frac{1}{2}\cos 2x} = k\, e^{\frac{1}{2}\cos 2x}$$

$y(0) = 1$

$$y(0) = k\, e^{\frac{1}{2}} \to k = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{2}} \cos 2x$$

Equazioni non omogenee
$y' = a(x)y + b(x),\ b(x) \neq 0$
Primitiva di $a(x) : A(x)$
$A'(x) = a(x)$

Moltiplico ambo i membri per $e^{-A(x)}$
$y' e^{-A(x)} = a(x)\, e^{-A(x)} y + b(x)\, e^{-A(x)}$
$y'\, e^{-A(x)} - a(x) e^{-A(x)} y = b(x) e^{-A(x)}$

$\frac{d}{dx}\left[e^{-A(x)} y\right] = b(x)\, e^{-A(x)}$
Integrando si ha:
$e^{-A(x)} y = \int b(x)\, e^{-A(x)} dx$
$y(x) = e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)} dx$

Esempio
$y' = 2xy + e^{x^2} \cos x$
$a(x) = 2x, \qquad b(x) = 2^{x^2} \cos x$
$A(x)\ \int 2x dx = x^2 + c$
$A(x) = x^2$
$y(x) = e^{x^2} \int e^{x^2} \cos x * e^{-x^2} dx$
$y(x) = e^{x^2} \int \cos x\, dx = e^{x^2} (\sin x + c), \qquad c \in \mathbb{R}$
$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi^2}{4}} \left(\sin \frac{\pi}{2} + c\right) = e^{\frac{\pi^2}{4}}(1 + c) = e^{\frac{\pi^2}{4}} + e^{\frac{\pi^2}{4}} c = 1 - e^{\frac{\pi^2}{4}}$
$c = e^{-\frac{\pi^2}{4}} - 1$
$y(x) = e^{x^2} \left(\sin x + e^{-\frac{\pi^2}{4}} - 1\right)$

Esempio
$y' = (\cos x) y + e^{\sin x} \log x$
$A(x) = \sin x$
$y = e^{\sin x} \int e^{\sin x} \log x\ e^{-\sin x} dx = e^{\sin x} \int \log x\ dx = per\ parti$
$= e^{\sin x} [x(\log x - 1) + c]$

$\begin{cases} y' = (x+1)\dfrac{y}{x} + x(1-x) \\ \qquad y(1) = 2 \end{cases}$

Equazione non lineare (a variabili separabili)
Un'equazione a variabili separabili si presenta in questo modo:
$y' = f(x) g(y)$

con $f(x) = \lambda, y' = \lambda y, f(x) = 1, g(y) = y^2$

$y' = e^x \log y$
Si risolvono in questo modo:
$\frac{dy}{dx} = f(x)\ g(y)$, dopodiché si separano le variabili e $g(y) \neq 0$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

$G(y) = F(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$

Il problema sarà esplicitare la y in funzione di x $(y = y(x))$. Quando questo non riesce, può venire in aiuto il teorema del limite

Esempio

$y' = y^2$

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 : y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{y} = x + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{y} = c - x$$

$$y = \frac{1}{c - x}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$y = 0$ non c'è nell'espressione, ma $y = \frac{1}{c-x}$ è soluzione!
$y = 0$ è integrale singolare

Ricaviamo la c

$$y(0) = \frac{1}{c - 0}$$

$$1 = y(0) = \frac{1}{c} \rightarrow c = 1$$

$$y = \frac{1}{1 - x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \qquad f(x) = 1$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx$$

$\arctan y = x + c, \qquad c \in \mathbb{R}$

$$c \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} < x + c < \frac{\pi}{2}$$

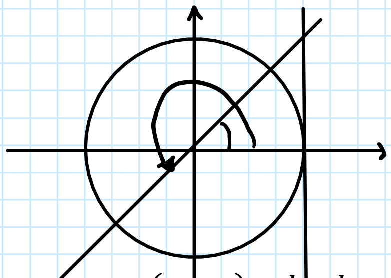
$$-\frac{\pi}{2} - c < x < \frac{\pi}{2} - c$$

$y = \tan(x + c), \qquad c \in \mathbb{R}$

Altro esempio

$y' = \cos^2 y$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y : \cos y \neq 0$$
$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int dx$$
$\tan y = x + c, c \in \mathbb{R}$



$y = \arctan(x + c) + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ e\ c \in \mathbb{R}$

$\cos y = 0\ ? \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Sono soluzioni delle equazioni, per cui

$y' = 0 = \cos^2 y$

$y = \arctan(x + c) + k\pi, y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in z$.

Esercizio da fare a casa

$xy' = \tan y$

$$\begin{cases} xy' = \tan y \\ y(1) = \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Equazioni lineare del secondo ordine

lunedì 22 novembre 2021 10:59

Le equazioni lineari del secondo ordine hanno questa struttura:
$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$

Quando $f(x) = 0$ l'equazione si dice omogenea.
$y_1, \dots, y_k$ sono dette soluzioni di $f(x)$, $c_1y_1 + \dots + c_ky_k$ è ancora soluzione

Problema di Cauchy di esistenza e unicità globale

$$P = \begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \in [a,b] \\ y'(x_0) = y_0', \qquad y_0, y_0' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Esiste unica $\exists!$ soluzione $y = y(x)$ di P di tipo globale.
Conseguenze: se P si pone $f(x) = 0, y_0 = y_0' = 0$ l'unica soluzione è $y(x) = 0$.

Definizione
L'integrale generale di $f(x)$ è l'insieme di tutte le soluzioni (dette anche integrali) di $f(x)$.

Definizione (lineare dipendenza ed indipendenza)
Se si hanno delle funzioni $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$, queste si dicono linearmente indipendenti se l'equazione $\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 + \dots + \lambda_ny_n = 0$ e viene soddisfatta solo per $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

$y_1, \dots, y_k$ sono linearmente dipendenti se l'equazione $\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 + \dots + \lambda_ny_n = 0$ viene soddisfatta per scalari non tutti nulli.

Equazioni omogenee
$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

Siano y_1, y_2 due integrali particolari dell'equazione. Ciò significa che $y''; (x) + a(x)y'; (x) + b(x)y; (x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b] \ \ \forall i = 1,2$.

Determinante Wranskiano di y_1, y_2

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Teorema del Wranskiano
Siano y_1, y_2 due integrali particolari dell'equazione omogenea $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.
Allora si possono verificare una delle eventualità:

1) $\exists x_0 \in [a,b] : W(x_0) = 0 \rightarrow y_1, y_2$ sono linearmente dipendenti.

2) $\exists x_1 \in [a,b] : W(x_1) \neq 0 \to y_1, y_2$ sono linearmente indipendenti.

Osservazione
O si ha che $W(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b]$ (con y_1, y_2 linearmente dipendenti) oppure $W(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$ (con y_1, y_2 linearmente indipendenti).

Teorema di esistenza di un sistema di integrali particolari linearmente indipendenti
Esiste un sistema $\{y_1, y_2\}$ di integrali particolari linearmente indipendenti per l'equazione omogenea.

Dimostrazione
Scegliamo un punto $x_0 \in [a,b]$.
$\begin{cases} y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$, scegliendo queste due condizioni iniziali il teorema di esistenza ed unicità globale afferma che: $\exists!\, y_1 = y_1(x)$ che è **soluzione globale**.

Proviamo adesso con la situazione opposta.
$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$, il teorema di esistenza ed unività globale afferma che: $\exists!\, y_2 = y_2(x)$ che è soluzione globale.

$y_1(x), y_2(x)$ sono integrali particolari dell'equazione omogenea, vogliamo vedere se sono linearmente indipendenti:
$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
$\neq 0 \to$ per il teorema del Wranskiano, y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti.

Teorema (integrale generale di un'equazione omogenea)
Siano y_1, y_2 due integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, allora l'integrale generale dell'equazione omogenea è della forma $c_1 y_1 + c_2 y_2, con\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Osservazione
L'integrale generale è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Equazioni non omogenee $f(x) \neq 0$
$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$

Omogenea associata:
$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$
$y'' - 2y' = \log x$
$y'' - 2y' = 0$

y_1, y_2 sono integrali particolari dell'equazione omogenea.
$c_1y_1 + c_2y_2$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea.

Sia $\overline{y}$ un integrale particolare dell'equazione completa.
$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + \overline{y}$
$y'' + a(x)y' + b(x)y = \overline{\overline{y}}'' + a(x)\overline{\overline{y}}' + b(x)\overline{\overline{y}} + \overline{y}'' + a(x)\overline{y}' + b(x)\overline{y} = f(x)$

Teorema (integrale generale di un'equazione completa)
Siano y_1, y_2 integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata all'equazione completa, ossia l'equazione omogenea. Sia $\overline{y}$ un integrale particolare della completa, allora l'integrale generale dell'equazione completa è dato da:
$c_1y_1 + c_2y_2 + \overline{y},\ al\ variare\ di\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

<u>Ricordiamo</u>:
Equazioni a coefficienti costanti
$y'' + ay' + by = f(x)$
$a, b \in \mathbb{R}$

Equazioni omogenee
$y'' + ay' + by = 0$
$a, b \in \mathbb{R}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$
$y' = \lambda e^{\lambda x}$
$y(x) = e^{\lambda x}$: $questa$ è $soluzione\ dell'equazione\ omogenea\ \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x}$
$= 0 \setminus \Leftrightarrow$
$\left[\overline{P}(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0\right]$

<u>Vediamo ora la casistiche</u>
$\Delta = a^2 - 4b$
<u>Primo caso</u>
$\Delta > 0$: due soluzioni reali e distinte dell'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$.
Siano esse $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Avremo quindi $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$
Verifichiamo che sono linearmente indipendenti.
$y_1' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, y_2' = \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$
$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}[\lambda_2 - \lambda_1] \neq 0$
Per cui y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti.
Allora, l'integrale generale dell'equazione omogenea è: $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

<u>Esempio</u>
$y'' - 4y' = 0$

Equazione caratteristica: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$
$y_1 = e^{\lambda_1 x} = 1, \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{4x}$
L'integrale generale è: $y = c_1 + c_2\, e^{4x},\ c_1, c_2 \notin \mathbb{R}$

<u>Altro esempio</u>
$y'' + 5y' + 4y = 0$

Equazione caratteristica: $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$
$\Delta = 25 - 16 = 9$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 3}{2}$: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1$
$y_1 = e^{-4x}, y_2 = e^{-x}$
Integrale generale è $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x}\ \ con\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

<u>Secondo caso</u>
$\Delta = 0$: un'unica radice doppia reale λ.

$y_1(x) = e^{\lambda x}$: si dimostra che $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ è un integrale particolare
$y_1' = \lambda e^{\lambda x}; y_2' = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}$
$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (\lambda x + 1)e^{\lambda x} \end{vmatrix} = (\lambda x + 1)e^{2\lambda x} - \lambda x e^{2\lambda x} = e^{2\lambda x} > 0$$
y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti, mentre l'integrale generale è dato da:
$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, con\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

<u>Esempio</u>
$y'' - 4y' + 4y = 0$

Equazione caratteristica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
$(\lambda - 2)^2 = 0$
$\lambda = 2$ radice doppia
Integrale generale: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x},\ con\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

<u>Terzo caso</u>
$\Delta < 0$: due radice complesse coniugate

$\lambda = \alpha \pm i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dove α è la parte reale e β è la parte immaginaria.
$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$
$y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$

Queste due sono soluzioni complesse, poiché non fanno parte del campo reale. Dobbiamo quindi cambiare campo con le formule di Eulero.
Eulero afferma che preso un numero reale qualsiasi, lo definiamo come:

$e^{i\gamma} = \cos\gamma + i\sin\gamma$
$e^{-i\gamma} = \cos\gamma - i\sin\gamma$
$\underline{e^{i\pi} + 1 = 0}$ ("*la più bella equazione del mondo*")

$y_1(x) = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}[\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)]$
$y_2(x) = e^{\alpha x}[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)]$
$\overline{y_1} = \dfrac{y_1(x) + y_2(x)}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$
$\overline{y_2} = \dfrac{y_2(x) - y_1(x)}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$
Attraverso il teorema del Wraskiano affermiamo che sono linearmente indipendenti.
L'integrale generale è:
$y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))$

Esempio
$y'' + y = 0$

Equazione caratteristica: $\lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda = \pm i, \alpha = 0, \beta = 1$

L'integrale generale è $y = c_1\cos x + c_2\sin x$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$y'' + \omega^2 y = 0$
$\lambda^2 + \omega^2 = 0\ \lambda = \pm i\omega$
Quindi $\alpha = 0, \beta = \omega$
$y = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Esercizio con problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

$y'' - y' - 2y = 0$

Equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$
$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

L'integrale generale è: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$y(0) = c_1 + c_2$

Imponiamo la prima condizione iniziale
$0 = y(0) = c_1 + c_2$
$y' = -c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3\, c_2 = 3 \rightarrow c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

La soluzione del problema è $y = -e^{-x} + e^{2x}$

Da fare a casa

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 10y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo sempre un'equazione a coefficienti costanti non omogenea: $y'' + ay' + by = f(x)$.

Come determiniamo l'integrale particolare $\overline{y}$ di $f(x)$?

a) $f(x) = e^{\alpha x}\, p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio e α è un numero reale
$f(x) = k = e^{o*x}k\ con\ \alpha = 0, p(x) = k$
$f(x) = x^2 + x = e^{0*x}(x^2 + x)\ \ con\ \alpha = 0$
$f(x) = e^{-x},\ con\ \alpha = -1, p(x) = 0$

Sottocaso 1

α non è radice dell'equazione caratteristiche dell'omogenea, $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$, ossia $P(\alpha) \neq 0$.
Allora $\overline{y}$ sarà della forma $\overline{y}(x) = e^{\alpha x} q(x)$, dove $q(x)$ è un polinonio dello stesso grado di $p(x)$ da determinarsi.

Esempio

$y'' - y' = e^{-x}$
Omogenea associata: $y'' - y' = 0$
Equazione caratteristica: $\lambda^2 - \lambda = 0 :\ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$
Integrale generale dell'omogenea è $y = c_1 + c_2 e^x$
Termine noto: $f(x) = e^{-x} = e^{(-1)*x} * 1,\ con\ \alpha = -1$ che non è radice della caratteristica
$\overline{y} = e^{-x} * a = ae^{-x}, a \in \mathbb{R}$ da determinare

$ae^{-x} + ae^{-x} = e^{-x}$
$2ae^{-x} = e^{-x} \rightarrow a = \frac{1}{2}$
L'integrale cercato è $\overline{y} = \frac{1}{2}e^{-x}$.
L'integrale generale della completa è $y = c_1 + c_2 e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\ con\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Altro esempio

$y'' - 5y' + 4y = 1$

<u>Omogenea associata</u>: $y'' - 5y' + 4y = 0$

<u>Equazione caratteristica</u>: $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$

Integrale generale è: $y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$

$f(x) = 1 * e^{0*x}$, dove $\alpha = 0$ non è radice!

$\overline{y} = e^{0*x} * a = a$ da determinare

$\overline{y}' = \overline{y}''$

…

<u>Sottocaso 2</u>

Se $P(\alpha) = 0$ con α di molteplicità $k \in \{1,2\}$, l'integrale particolare sarà della forma $\overline{y} = x^k\, e^{\alpha x}\, q(x)$, fove $q(x)$ sarà un polinomio da determinarsi.

Esempio

$y'' - y' = x^2$

$y'' - y' = 0$

$\lambda^2 - \lambda = 0, \lambda_1 = 0\ e\ \lambda_2 = 1$

$y = c_1 + c_2 e^x$

$f(x) = x^2\, e^{0*x}$, con $\alpha = 0$ che è radice della caratteristica, di molteplicità $k = 1$.

$\overline{y} = x\, q(x)$, dove $q(x)$ è dello stesso grado di x^2.

$\overline{y} = ax^3 + bx^2 + cx$

$\overline{y}' = 3ax^2 + 2bx + c$

$\overline{y}'' = 6ax + 2b$

Imponendo che ∃ risolva l'equazione: $y'' - y' = x^2$

$6ax + 2b - 3ax^2 - 2bx - c = x^2$

Raccogliamo i termini: $-3ax^2 + (6a - 2b)x + (2b - c) = x^2$

Dal principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 2b - c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ -2 - 2b = 0 \rightarrow b = 1 \\ -2 - c = 0 \rightarrow c = -2 \end{cases}$$

$\overline{y} = ax^3 + bx^2 + cx = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$

$\overline{y}' = -x^2 - 2x - 2,\ \overline{y}'' = -2x - 2$

$\overline{y}'' - \overline{y}' = -2x - 2 + x^2 + 2x + 2 = x^2$

L'integrale generale della completa: $c_1 + c_2\, e^x - \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x\ \ con\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{\alpha x}\, [p(x)\cos(\mu x) + q(x)\sin(\mu x)]$, con $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$
$p(x), \mu \in \mathbb{R}$ e $p(x), q(x)$ polinomi

$f(x) = \cos x + \sin x = e^{0*x}\,[1 * \cos(1 * x) + 1 * \sin(1 * x)]$, con $\alpha = 0, p(x) = q(x) = 1$ e $\mu = 1$.

$f(x) = x^2 \cos x = e^{0*x}\,\left[x^2 \cos(1 * x) + 0 * \sin(1 * x)\right]$
$\alpha = 0, p(x) = x^2, q(x) = 0, \mu = 1.$
$f(x) = e^{-x}\,[\cos x - \sin x]$
$\alpha = -1, p(x) = 1, q(x) = -1, \mu = 1$

<u>Sottocaso 1</u>
$P(\alpha \pm i\mu) \neq 0$, cioè non siano radici complesse coniugate della caratteristica.
Allora un integrale particolare sarà della forma
$\overline{y} = e^{\alpha x}[z(x)\cos(\mu x) + s(x)\sin(\mu x)]$, polinomi di grado pari al max
$\{grad(p(x)), grad(q(x))\}$

<u>Sottocaso 2</u>
$P(\alpha \pm i\mu) = 0$
$\overline{y} = e^{\alpha x} x\,[2(x)\cos(\mu x) + s(x)\sin(\mu x)]$

Esempio

$y'' + y' - 2y = 10 \sin x$

Omogenea associata: $y'' + y' - 2y = 0$
Equazione caratteristica: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 :\ \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \to \lambda_1 = -2\ e\ \lambda_2 = 1$
Integrale generale omogenea: $y = c_1 e^{-2x} + c_2\, e^x$
$f(x) = 10 \sin x = e^{0*x}\,[0 * \cos x + 10 \sin x]$
$\alpha = 0, \mu = 1, p(x) = 0, q(x) = 10$
$\alpha \pm i\mu = \pm i$ non è radice!

$\overline{y} = e^{0*x}[a \cos x + b \sin x] = a \cos x + b \sin x$
$\overline{y}' = -a \sin x + b \cos x$
$\overline{y}'' = -a \cos x - b \sin x$
$-a \cos x - b \sin x - a \sin x + b \cos x - 2a \cos x - 2b \sin x = 10 \sin x$

$(-3b - a) \sin x + (-3a + b) \cos x = 10 \sin x$
$\begin{cases} -3b - a = 10 \\ -3a + b = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 9a - a = 10 \to a = -1 \\ b = 3a \to b = -3 \end{cases}$
$\overline{y} = -\cos x - 3 \sin x$ integrale particolare

Esempio
$y'' + y = \cos x$
Omogenea associata: $y'' + y = 0$;
Equazione caratteristica: $\lambda^2 + 1 = 0 :\ \lambda = \pm i$

L'integrale generale omogenea: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^{0*x}\ [1 * \cos(1 * x) + 0 * \sin(1 * x)]$
$\alpha = 0, \mu = 1, p(x) = 1, q(x) = 0$
$\alpha \pm i\mu = \pm i$ è radice!!

$\overline{y} = e^{0*x} x\ [a \cos x + b \sin x] = x[a \cos x + b \sin x]$
$\overline{y}' = a \cos x + b \sin x + x\ [-a \sin x + b \cos x]$
$\overline{y}'' = -a \sin x + b \cos x - a \sin x + b \cos x + x[-a \cos x - b \sin x] =$
$-\ 2a \sin x + 2b \cos x - x\ [a \cos x + b \sin x]$
$: -2a \sin x + 2b \cos x - x\ [a \cos x + b \sin x] = \cos x$

$$\begin{cases} -2a = 0 \\ 2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\overline{y} = x \left[\frac{1}{2} \sin x\right] = \frac{x}{2} \sin x$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x$$

$$\begin{cases} y'' + y = \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Imponiamo le due condizioni
$0 = y(0) = c_1 \rightarrow c_1 = 0$
$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$
$1 = y'(0) = c_2 \rightarrow c_2 = 1$

La soluzione è $y = \sin x + \frac{x}{2} \sin x$

Altro esempio e poi basta
$y'' + y = 2x \sin x$
$y'' + y = 0$
$\lambda^2 + 1 = 0\ \rightarrow\ \lambda = \pm i$
$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
$f(x) = e^{0*x}[2x \sin(1 * x) + 0 * \cos(1 * x)]$
$\alpha \pm i\mu = \pm i$ è radice!!!

$\overline{y} = x[(ax + b) \sin x + (cx + d) \cos x]$

Calcolando le derivate ed inserendo nell'equazione:
$(2a - 4cx - 2b) \sin x + (4ax + 2b + 2c) \cos x = 2x \sin c$

$$\begin{cases} 2a - 4cx - 2b = 2x \\ 4ax + 2b + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4cx + (2a - 2b) = 2x \\ 4ax + 2b + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4c = 2 \\ 2a - 2d = 0 \\ 4a = 0 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -\frac{1}{2} \\ a = 0 \\ d = 0 \\ b = -c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\overline{y} = x\left[\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x\right]$$

Altrissimo esempio

Ad esempio, si vuole determinale l'integrale dell'equazione $y'' + y = e^x + \sin x$
Siccome questa non rientra in nessuno dei due casi, come si può risolvere?
Si può fare una suddivisione del termine noto considerando le due equazioni separatamente.
$y'' + y = e^x \to y_1$
$y'' + y = \sin x \to y_2$

$\overline{y} = y_1 + y_2$ e integrale particolare della completa!
$\overline{y}'' + \overline{y} = (y_1'' + y_1) + (y_2'' + y_2) = e^x + \sin x$

Equazione omogenea associata: $y'' + y = 0$
Equazione caratteristica: $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$
Quindi la parte reale $\mathbb{R}\lambda = 0$, mentre la parte immaginaria $I\lambda = 1$.
Quindi l'integrale generale: $y = c_1\cos x + c_2\sin x$

Ricaviamo l'integrale particolare di $y'' + y = e^x$
$f(x) = e^x = e^{1*x} = 1$
$\alpha = 1$ non è radice della caratteristica
$\overline{y} = ae^x \to$ da determinare1
$\overline{y}' = a\,e^x = \overline{y}''$
Quindi inseriamo queste due espressioni nell'equazione principale:
$ae^x + ae^x = e^x \to 2a = 1 \to a = \frac{1}{2}$
Primo integrale particolare: $\overline{y} = \frac{1}{2}e^x$

Vediamo ora l'altra parte
$\mathrm{y}'' + \mathrm{y} = \sin x = e^{0*x}[1 * \sin(1 * x) + 0 * \cos(1 * x)]$
$\alpha = 0, \mu = 1$
$\alpha \pm i\mu = \pm i$ è radice!
L'integrale particolare sarà della forma: $y_2 = x[\cos x + b\sin x]$
$y_2' = a\cos x + b\sin x + x[b\cos x - a\sin x]$
$y_2'' = -a\sin x + b\cos x + b\cos x - a\sin x + x[-b\sin x - \mathrm{a}\cos \mathrm{x}]$

Sostituiamo con l'equazione principale
$-2a\sin x + 2b\cos x - x[b\sin x + a\cos x] + x\,[a\cos x + b\sin x] = \sin x$
$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases} :\; y_2 = x\left[-\frac{1}{2}\cos x\right] = -\frac{x}{2}\cos x$
$\overline{y} \coloneqq y_1 + y_2 = \frac{1}{2}e^x - \frac{x}{2}\cos x$

<u>**Esercizio da fare a casa**</u>
$y'' - y' = \sin 2x - \cos 3x$

Integrale particolare
$y'' + y' = \log x\ ?$

In questo caso bisogna calcolare un **integrale particolare**
<u>Un integrale particolare si calcola con il metodo della variazione delle costanti (Lagrange)</u>; vale anche per un'equazione non omogenea qualsiasi, come ad esempio $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$
Questo metodo ci dice di prendere l'equazione omogenea associata, in questo caso $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ con y_1, y_2 integrali particolari linearmente indipendenti. Per cui l'integrale generale della seconda equazione è dato da $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Prendiamo la funzione $\overline{y} = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) :\; \overline{y}$ è un integrale particolare della prima equazione se e soltanto se le derivate $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ verificano il seguente sistema:
$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$
Questo è un sistema lineare nelle incognite $c_1'(x), c_2'(x)$.

Determinante della matrice dei coefficienti:
$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, perché y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti.
Allora per il Teorema di Cramer il sistema ha un'unica soluzione:
$C_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$
$C_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$

Esempio

$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

Equazione omogenea associata: $y'' + y = 0$
Equazione caratteristica: $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$
Integrale generale è: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
$\overline{y} = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$, tale che $c_1'(x), c_2'(x)$ soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0 \\ c_1'(x)\,(-\sin x) + c_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1} = -1$$

$\boldsymbol{c_1(x) = -x}$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix}}{1} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \log|\sin x| + c : \boldsymbol{c = 0, c_2(x) = \log|\sin x|}$$

$\overline{y} = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x = -x \cos x + (\log|\sin x|) \sin x$
Abbiamo ottenuto l'integrale particolare, ora per ottenere quello generale:
$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + [-x \cos x + (\log|\sin x|) \sin x]$

Altro esempio

$y'' + 2y' + y = \frac{\log x}{e^x}$

Equazione omogenea associata: $y'' + 2y' + y = 0$
Equazione caratteristica: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
$(\lambda + 1)^2 = 0 : \lambda = -1$ radice doppia
$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

$\overline{y} = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) * x e^{-x}$

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^{-x} + c_2'(x) * x\, e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)\, [-e^{-x}] + c_2'(x)\, [e^{-x} - x e^{-x}] = \dfrac{\log x}{e^x} \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}(1 - x) \end{vmatrix} = e^{-2x}(1 - x) + x e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\,e^{-x} \\ \frac{\log x}{e^x} & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix}}{e^{-2x}} = -e^{2x} * x \log x \;\, e^{-2x} = -x \log x$$

$\int x \log x \;\, dx$, funziona in questo modo: $f = \log x\,, g' = x, f' = \frac{1}{x}, g = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{1}{x} * \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{1}{2} * \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2}\left[\log x - \frac{1}{2}\right] + c$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{\log x}{e^x} \end{vmatrix}}{e^{-2x}} = e^{2x} * e^{-2x} \log x = \log x$$

$\int \log x \;\, dx = \cdots = x \log x - x + c$

$c_2(x) = x(\log x - 1)$

$\overline{y} = c_1(x)e^{-x} + xe^{-x}\, c_2(x) = \frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right) e^{-x} + xe^{-x}[x\,(\log x - 1)]$

Abbiamo calcolato l'integrale particolare

Da fare a casa

$y'' + 4y = 5 \sin 3x - 7 \cos 3x$

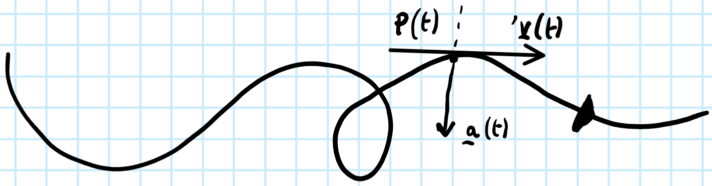
(da provare con i due metodi)

Studio delle curve

domenica 28 novembre 2021 16:18

Cosa si intende per curva?

$P = P(t) \in \mathbb{R}^3$, dove P è di coordinate $P = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \underline{v}(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$$

La traiettoria compiuta dal punto nello spazio viene descritta dalla funzione che associa ad ogni istante t la posizione del punto P.

$\varphi = t \in I \to P(t) \in \mathbb{R}^3$

Moto uniforme

Se il moto è uniforme abbiamo una velocità scalare e una costante, quindi abbiamo che la norma di $v(t)$:

$\left|\left|\underline{v}(t)\right|\right| = c$

$\big(x'(t)\big)^2 + (y'(t)^2 + \big(z'(t)\big)^2 = c$

Eleviamo ad ambo i membri:

$\frac{d}{dt}\Big(\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2\Big) = 0$

$\underline{v}(t) = \ [x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) + z'(t)z''(t)] = 0$

$\underline{a}(t) = \big(x''(t), y''(t), z''(t)\big)$

$\underline{v}(t) * \underline{a}(t) = 0$

Definizione di curva

Una curva è un'applicazione continua del tipo

$\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Essa prende un valore t nell'intervallo I scelto e associa un punto $\varphi(t)$.

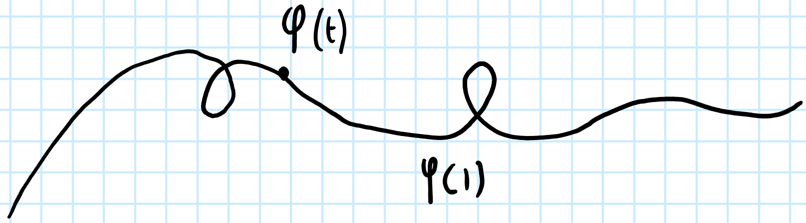
$\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\big)$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \quad \dots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases} \text{equazioni parametriche di } \varphi.$$

L'insieme $\varphi(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ (codominio di φ)

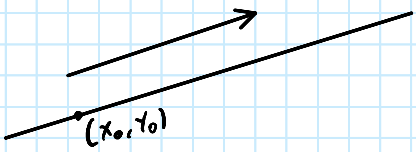
$\varphi(I) = \{\varphi(t) : t \in I\}$ sostegno di φ

Una curva è una funzione, mentre il sostegno è l'oggetto geometrico che noi siamo abituati a chiamare curva.
Le equazioni parametriche servono a identificare univocamente tutti i punti del sostegno.

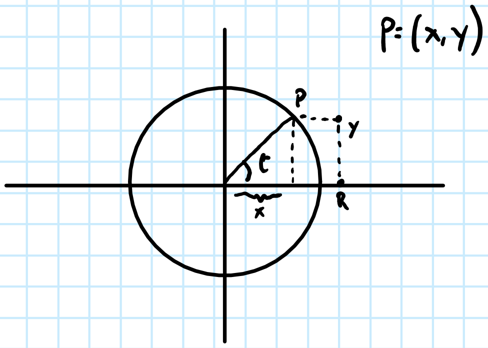


Esempi

1) Retta passante per il punto (x_0, y_0), vettore direzionale
$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 t \\ y = y_0 + \lambda_2 t \end{cases}$$



2) Circonferenza
di raggio $R > 0$ positivo nell'origine



$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$$
$t \in [0,2\pi]$
$\varphi(t) = (R\cos t\,, R\sin t), t \in [0,2\pi]$

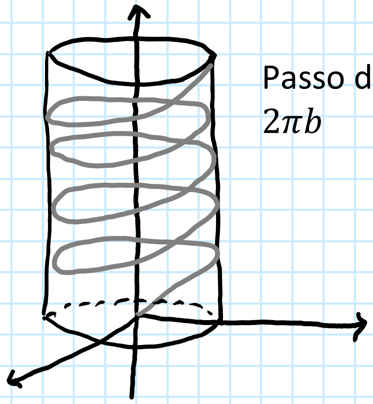
Se consideriamo invece l'equazione in questo modo
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in [0,4\pi]$$
$\varphi(t) = (R\cos t\,, R\sin t), t \in [0,4\pi]$

3) Curva in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = b\,t \end{cases}$$

Con $a, b > 0$ positivi

$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$
$x^2 + y^2 = a^2$ in $\mathbb{R}^3$
Questa equazione rappresenta il cilindro di curva direttrice la circonferenza e con le generatrici parallele all'asse z.

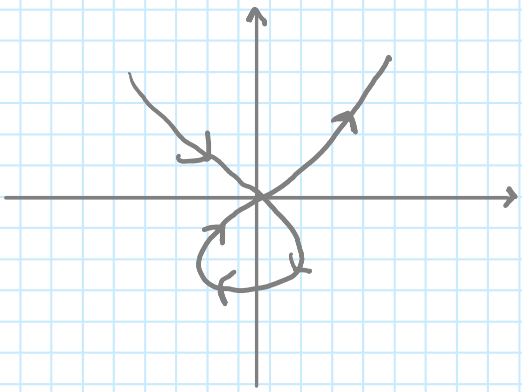


Passo dell'elica
$2\pi b$

Esempio di strofoide
$\varphi(t) = (t^3 - t, t^2 - 1), t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = t^3 - t \;\rightarrow\; & 0 = (0,0) \\ y = t^2 \;\rightarrow\; & t = -1, t = 1 \end{cases}$$

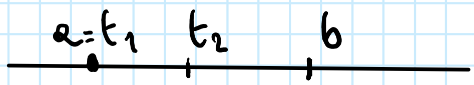
$$t = -1 \rightarrow \begin{cases} x = -1 + 1 = 0 \\ 1 - 1 = 0 \end{cases}, \quad t = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$



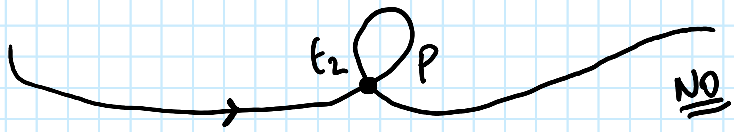
CURVA NON SEMPLICE

Questa curva è uno strofoide
ψ: $t \in [-1,1] \rightarrow (t^3 - t, t^2 - 1) \in \mathbb{R}^2$ <u>cappio di strofoide</u> ← CURVA SEMPLICE

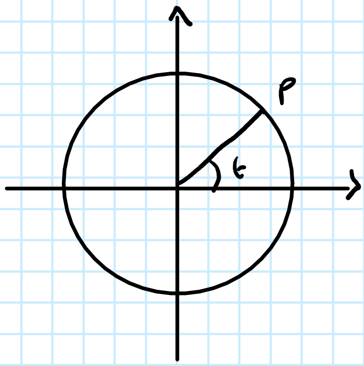
Definizione di curva semplice
$\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ verrà detta curva semplice se per ogni coppia di valori t_1, t_2 con $t_1 \neq t_2$, in cui almeno uno dei valori è interno ad I



Deve accadere che $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$
Una situazione di questo genere però non può capitare.



Nel caso della circonferenza:



CURVA SEMPLICE

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0,2\pi]$$

Se invece fosse stata:

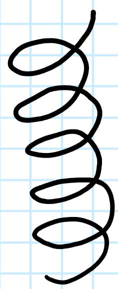
$$\psi(t) = \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0,4\pi]$$

La curva non sarebbe stata semplice poiché a ogni punto corrisponderebbero due variabili.

Definizione di curva chiusa

$\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva chiusa se $\varphi(a) = \varphi(b)$
Circonferenza cappio di strofoide

Un esempio sarebbe un'elica semplice ma non chiusa



Definizione di curva regolare

$\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice regolare se:

1) $\varphi \in C^1([a,b]) : \varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$
   $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))$
2) $\varphi'(t) \neq 0 \ \ \forall r \in (a,b)$
   Possiamo descrivere questa condizione dicendo che:

$$\left\|\varphi'(t)\right\| > 0 \iff \left(\varphi_1'(t)\right)^2 + \cdots + \left(\varphi_n'(t)\right)^2 > 0,\ \forall t \in (a,b)$$

$\Leftrightarrow \varphi_1', \varphi_2', \dots, \varphi_n'$ non si devono annullare simultaneamente

<u>Esempio</u>

$$\varphi = \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 t \\ y = y_0 + \lambda_2 t \end{cases} \quad \varphi(t) = (x_0 + \lambda_1 t, y_0 + \lambda_2 t), \varphi'(t) = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0{,}0)$$

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in [0{,}2\pi] \quad \begin{cases} x' = -R\sin t \\ y' = R\cos t \end{cases}$$

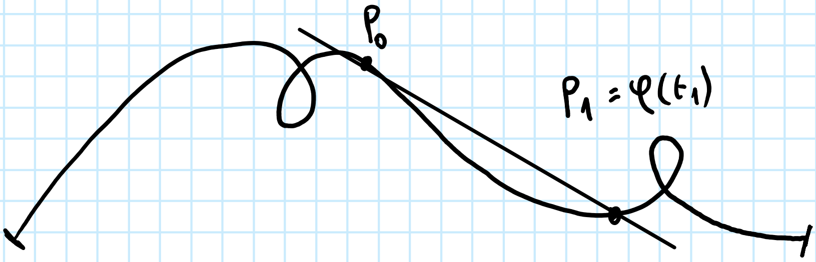
$$(x')^2 + (y')^2 = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t = R^2 > 0$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \ \textit{curva regolare} \\ z = b\,t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = b\cos t \\ z' = b \end{cases}$$

Esistenza della retta tangente

$\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2,\ P_0 = \varphi(t_0) = \left(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)\right)$



$$r(P_0P_1) = \begin{cases} x = \varphi_1(t_0) + \dfrac{\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0)}{t_1 - t_0}\ (t - t_0) \\ y = \varphi_2(t_0) + \dfrac{\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0)}{t_1 - t_0}\ (t - t_0) \end{cases}$$

$$t = t_0 \to \begin{cases} x = \varphi_1(t_0) \\ y = \varphi_2(t_0) \end{cases} = P_0$$

$$t = t_1 \to \begin{cases} x = \varphi_1(t_0) + \varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0) = \varphi_1(t_1) \\ y = \varphi_2(t_0) + \varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0) = \varphi_2(t_1) \end{cases} = P_1$$

Quando $t_1 \to t_0$ la retta secante diventa retta tangente in P_0 allora le sue equazioni saranno:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t_0) + \varphi_1'(t_0)\ (t - t_0) \\ y = \varphi_2(t_0) + \varphi_2'(t_0)\ (t - t_0) \end{cases}$$

$$\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0)) \neq 0$$

Queste saranno le equazioni parametriche della retta tangente in $P_0 = \varphi(t_0)$ a φ.

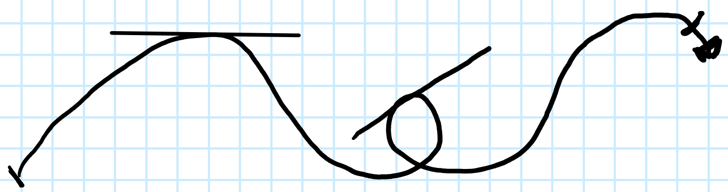
Facciamo un <u>esempio</u> nel caso dovessimo avere tre coordinate.

$\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t_0) + \varphi_1'(t_0)\ (t - t_0) \\ y = \varphi_2(t_0) + \varphi_2'(t_0)\ (t - t_0) \\ z = \varphi_3(t_0) + \varphi_3'(t_0)\ (t - t_0) \end{cases}$$

$\varphi'(t_0) = \left(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0), \varphi_3'(t_0)\right)$

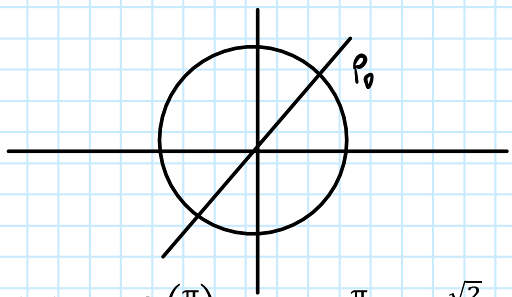
$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{||\varphi'(t_0)||}$ versore tangente



Ad esempio, prendiamo la circonferenza di equazioni

$$\varphi = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

Equazioni della retta tangente in $P_0 = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$



$\varphi_1'(t_0) = \varphi_1'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi_2'(t_0) = \varphi_2'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t_0) + \varphi_1'(t_0)\ (t - t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ y = \varphi_2(t_0) + \varphi_2'(t_0)\ (t - t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$x + y = \sqrt{2}$

<u>Esempio di curva non regolare</u>

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1,1]$$

$\varphi'(t) = \left(3t^2, 2t\right)$

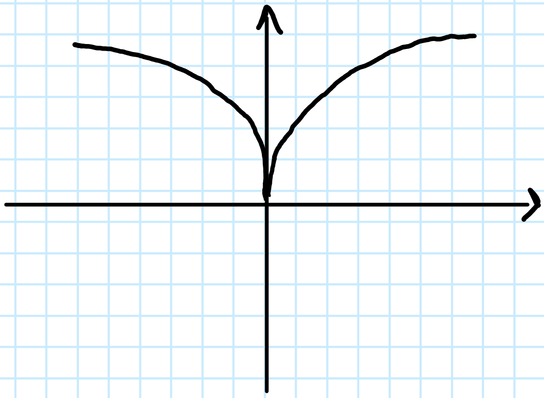
$\varphi'(0) = (0,0)$

$$\begin{cases} t = \sqrt[3]{x} \\ y = t^2 \end{cases}$$

$y = t^2 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}}$

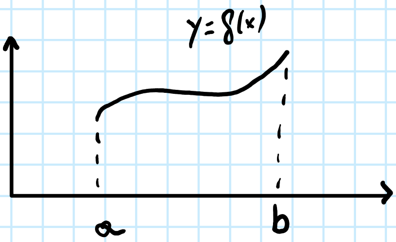
$x \in [-1,1]$

$y = \sqrt[3]{x^2}$



Esempio di curva regolare

$y = f(x), \qquad f \in C^1([a,b])$



Il sostegno di φ è $\{(t, f(t)) : t \in [a,b]\} = grafico\ di\ \ f(x)$!

$$\varphi(t) = \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = f'(t) \end{cases} \neq (0,0) \rightarrow \varphi$ è regolare ed il vettore tangente è $\varphi'(t) = (1, f'(t))$.

Retta tangente ad $f(x)$ in $(x_0, f(x_0)) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$t_0 = x_0 \quad \begin{cases} x = \varphi_1(t_0) + \varphi_1'(t_0)(t - t_0) \\ y = \varphi_2(t_0) + \varphi_2'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t_0 + (t - t_0) = t \\ y = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

$y = f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Caso delle curve piane

Abbiamo una rappresentazione di una funzione parametrica:

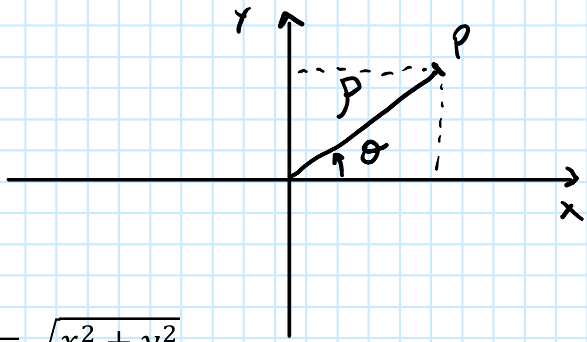
$$\varphi(t) = \begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases} \quad f(x,y) = 0$$

$x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

Coordinate polari

Prendiamo un punto qualsiasi nel piano e connettiamolo con l'origine. La distanza da P all'origine lo denotiamo con ρ.



$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

x = asse polare

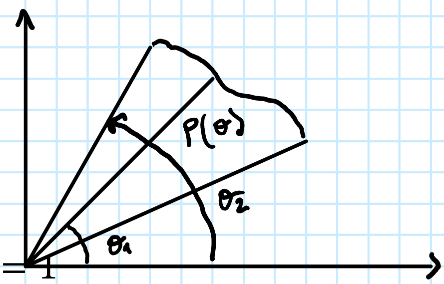
origine = polo

<u>Trasformazione alle coordinate polari</u>

$$\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

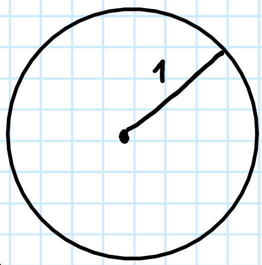
Una **curva che viene espressa in coordinate polari** viene espressa in un'equazione polare.

$\rho = \rho(\theta), \ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$



$x^2 + y^2 = 1$

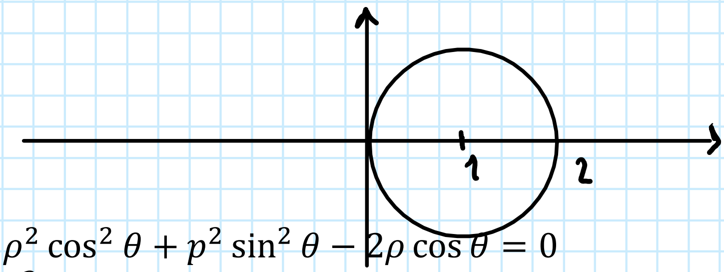
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} : \rho^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ p = 1$$



$x^2 + y^2 - 2x = 0$

$(1,0), R = 1$

$(1,0), R = 1$



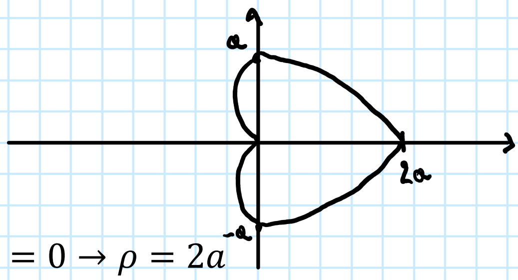
$\rho^2 \cos^2\theta + p^2 \sin^2\theta - 2\rho\cos\theta = 0$
$\rho^2 = 2\,\rho\cos\theta$
$\rho = 2\cos\theta$
$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\rho = \rho(\theta),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2],\ \rho \in C^1([\theta_1, \theta_2])$
$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = p(\theta)\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = p(\theta)\sin\theta \end{cases},\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$\begin{cases} x' = -\rho\sin\theta + p'\cos\theta \\ y' = \rho\cos\theta + p'\sin\theta \end{cases}$
$(x')^2 + (y')^2 = \rho^2\sin^2\theta + (p')^2\cos^2\theta + \rho^2\cos^2\theta + (\rho')^2\sin^2\theta = \rho^2 + (\rho')^2$

Quindi la curva φ ottenuta è regolare se e soltanto se $\rho^2(\theta) + [\rho'(\theta)]^2 > 0\ \ \forall\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Esempio
$\rho = a(1+\cos\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$



$\theta = 0 \to \rho = 2a$
$\theta = \frac{\pi}{2} \to \rho = a$
$\theta = \pi \to \rho = 0$
$\theta = \frac{3}{2}\pi \to \rho = 2a$

Per verificare se la curva è regolare bisogna:
$[\rho^2(\theta)] + [\rho'(\theta)]^2 = a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta = a^2[1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta] = 2a^2[1+\cos\theta] = 0\ per\ \theta = \pi$
Questa curva non è regolare.

Altro esempio

$\rho = a(1 + \cos\theta), \qquad \theta \in [-\pi, \pi]$

Verifichiamo solo se è regolare (siccome è la stessa di prima):

$[\rho^2(\theta)] + [\rho'(\theta)]^2 = 2a^2(1 + \cos\theta)$

$\theta \in (-\pi, \pi), \cos\theta > -1$, la curva è regolare

Curve equivalenti

Prendiamo una curva $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, con variabile $t \to \varphi(t)$.

Prendiamo un'altra curva $\psi: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, con variabile $s \to \psi(s)$,

Diremo che φ e equivalente a ψ e scriveremo $\varphi \sim \psi(s)$.

$\exists s = g(t) : g ; I \to J,\ g \in C^1(I)$ invertibile, $g'(t) \neq 0\ \forall t \in I$ tale che:

$\varphi t) = \psi(g(t)), \qquad \forall t \in I$

La funzione g si chiama cambiamento ammissibile di parametro.

Osservazione 1

$g'(t) \neq 0 \to g' > 0 \quad \Leftrightarrow$ g strettamente crescente oppure $g' < 0 \ \Leftrightarrow$ g strettamente decrescente

Ovviamente: se $\varphi \sim \psi$ allora $\psi \sim \varphi$, $g^{-1}: J \to I$ è tale che $\psi(s) = \varphi(g^{-1}(s))$.

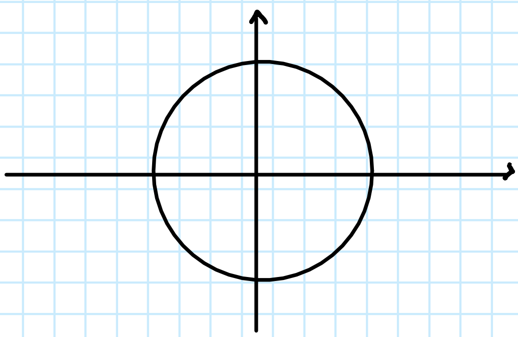
Osservazione 2

Se $\varphi \sim \psi$ allora φ e ψ hanno necessariamente lo stesso segno.

Esempio

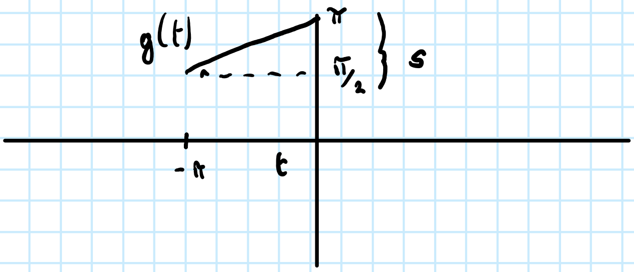
$\varphi(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [-\pi, 0]$

$\psi(s) = \begin{cases} x = \cos(2s) \\ y = \sin(2s) \end{cases} \quad s \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$



$g(t) = \frac{t}{2} + \pi, \qquad t \in [-\pi, 0]$

$g(t) = \frac{t}{2} + \pi, \qquad t \in [-\pi, 0]$



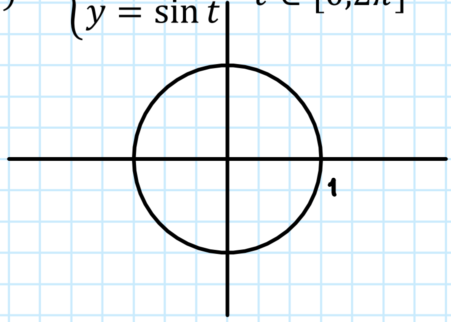
$g' = \frac{1}{2} > 0$

$\varphi(t) = \psi(g(t))$

$$\psi(g(t)) = \psi\left(\frac{t}{2} + \pi\right) = \left(\cos 2\left(\frac{t}{2} + \pi\right)\right), \sin 2\left(\frac{t}{2} + \pi\right)) = (\cos t, \sin t)$$
$$= \varphi(t)$$

<u>Osservazione 3</u>

$\varphi(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$



$\psi(s) = \begin{cases} x = \cos s \\ y = \sin s \end{cases} \quad s \in [0, 4\pi]$

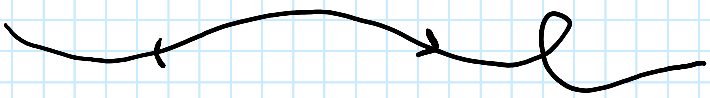
$\varphi \sim \psi$? No, poiché una è semplice mentre l'altra non lo è.

$\tilde{}$ il tilde è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva) nell'insieme delle curve regolari!

Per curva regolare si intende quindi: $\alpha = \widetilde{[\varphi]}$ = l'insieme di tutte le curve regolari equivalenti a φ.

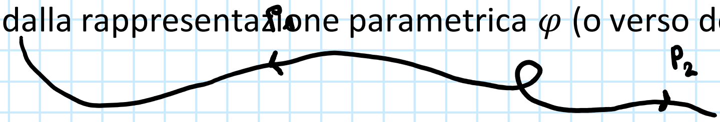
Definizione di orientamento di una curva

Ogni curva $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ induce un verso di percorrenza o orientamento sul suo sostegno, che coincide con il verso in cui $\varphi(t)$ percorre il sostegno all'aumentare di t:



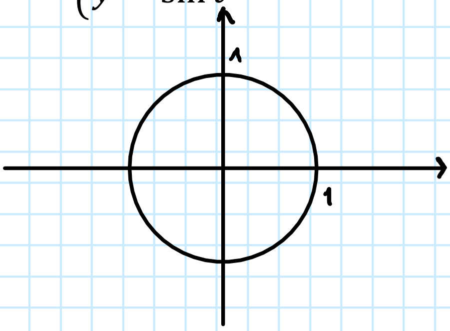
Se $P_1 = \varphi(t_1)$ e $P_2 = \varphi(t_2)$: si dice che P_1 **precede** P_2 nel verso di percorrenza indotto dalla rappresentazione parametrica φ (o verso delle t crescenti) se $t_1 < t_2$

Se $P_1 = \varphi(t_1)$ e $P_2 = \varphi(t_2)$: si dice che P_1 **precede** P_2 nel verso di percorrenza indotto dalla rappresentazione parametrica φ (o verso delle t crescenti) se $t_1 < t_2$



<u>Esempio</u>

$$\varphi = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$



$t = 0 \rightarrow (1,0) = P_1$

$t = \frac{\pi}{2} \rightarrow (0,1) = P_2$

$\frac{\pi}{2} > 0 \rightarrow P_1$ precede P_2 nel verso di percorrenza (antiorario)

<u>Altro esempio</u>

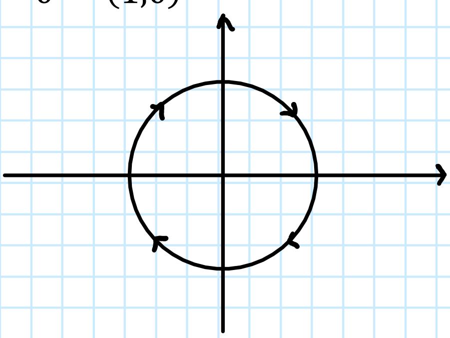
$$\varphi = \begin{cases} x = \cos(-t) \\ y = \sin(-t) \end{cases} \quad t \in [-2\pi, 0]$$

$$\phi(s) = \begin{cases} x = \cos x \\ y = -\sin s \end{cases} \quad s \in [-2\pi, 0]$$

Rappresenta sempre la circonferenza

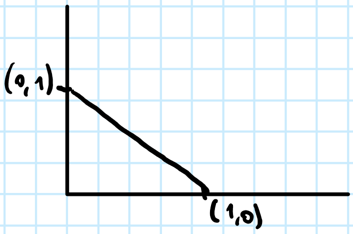
$s = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0,1)$

$s = 0 \rightarrow (1,0)$



Il verso di percorrenza è orario!

<u>Altro esempio</u>

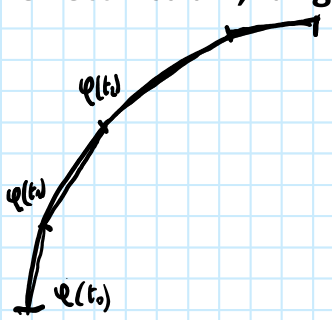


$$\begin{cases} x = t + (1-t) * 0 = t \\ y = t * 0 + (1-t) * 1 = 1 - t \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

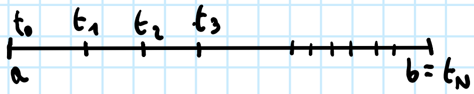
$t = 0 \rightarrow (0,1)$
$t = 1 \rightarrow (1,0)$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad t \in [-1,0]$$

Curve rettificabili, lunghezza di una curva



$\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$



$L(P) = \left|\left|\varphi(t_1) - \varphi(t_0)\right|\right| + \left|\left|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)\right|\right| + \cdots + \left|\left|\varphi(t_N) - \varphi(T_{N-1})\right|\right|$
$L(\varphi) \coloneqq \sup\{L(P): P\ poligonale\ inscritta\ in\ \varphi\} \in [0, +\infty]$

Definizione

φ si dice **rettificabile** se $L(\varphi) < +\infty$.

Teorema di direttificabilità delle curve di classe C^1

Sia $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1: allora φ è rettificabile e si ha:
$L(\varphi) = \int_a^b \left|\left|\varphi'(t)\right|\right| \, dt$

Esempio
$n = 2$, come esplicitiamo la formula? Potremmo scrivere la lunghezza come:

$\int_a^b \sqrt{\left(\varphi_1'(t)\right)^2 + \left(\varphi_2'(t)\right)^2 \, dt}$

$n = 3 \; L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\left(\varphi_1'(t)\right)^2 + \left(\varphi_2'(t)\right)^2 + \left(\varphi_3'(t)\right)^2 \, dt}$

<u>Esempio</u>

$P_1 = (x_1, y_1),\; P-2 = (x_2, y_2)$

$\begin{cases} x = t\,x_2 + (1-t)x_1 \\ y = t\,y_2 + (1-t)y_1 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$\begin{cases} x' = x_2 + (-1)x_1 = x_2 - x_1 \\ \qquad y' = y_2 - y_1 \end{cases}$

$L(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 \, dt} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = d(P_1, P_2)$

Circonferenza

$\varphi(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$

$\begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \end{cases} \quad \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 \, dt} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

$t \in [0,4\pi]: \quad L(\varphi) = 4\pi$

La lunghezza coincide con quella della traiettoria.

<u>Osservazione</u>

Se $\varphi \sim \psi$ e φ è rettificabile, anche ψ è rettificabile e $L(\psi) = L(\varphi)$.

<u>Esempio</u>

$\varphi(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$

"elica cilindrica"

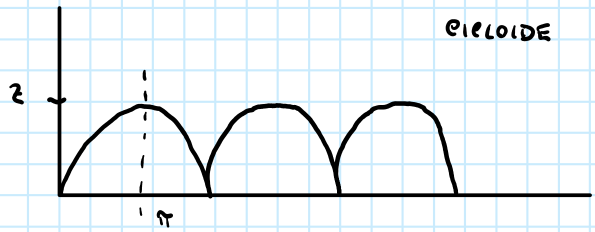
$\begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \\ z' = 1 \end{cases} \quad \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{2}$

$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = 2\pi\sqrt{2}$

<u>Altro esempio</u>

$\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \qquad t \in [0,\pi]$

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$



$$\begin{cases} x' = 1 - \cos t \\ y' = \sin t \end{cases}$$

$(x')^2 + (y')^2 = 1 + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t = 2(1 - \cos t)$

$L(\varphi) = \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)\, dt} = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos t}\ dt$

$1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$

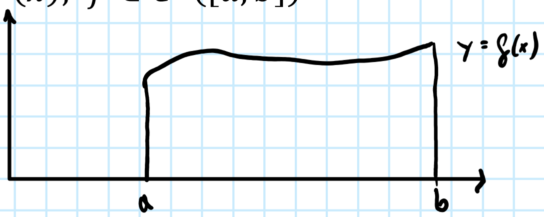
$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2} = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{2}\ \sin\frac{t}{2}\ dt = 2\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\ dt = 4\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ dt$$

$$= -4\left(\cos\frac{t}{2}\right)_{t=0}^{t=\pi} = -4(-1) = 4$$

$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1+\cos t}{2}$

Calcolare la lunghezza del grafico di una funzione del grado C^1

$y = f(x),\ f \in C^1([a, b])$

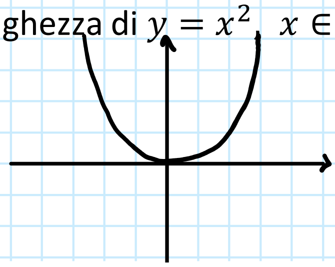


$$\varphi = \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad L(\varphi) \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = f'(t) \end{cases}$$

$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2\, dx}$

<u>Esempio</u>

Lunghezza di $y = x^2,\ x \in [-1,1]$



$f'(x) = 2x$

$L(\varphi) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2}\, dx$?

$\int \sqrt{1+4x^2}\, dx = \int \sqrt{1+(2x)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+t^2}\, dt$

$$\int \sqrt{1+t^2}dt = t\sqrt{1+t^2} - \int t \frac{1}{4\sqrt{1+t^2}} * 2t = t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$$

$$= t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2} + \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int \sqrt{1+t^2}\, dt$$

$-1 \le x \le 1$
$-2 \le t \le 2$

$$= \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{\log(t+\sqrt{1+t^2})}{2} + c$$

Equazione polare di una curva piana

φ: $\rho = \rho(\theta)$, $\quad \rho \in C^1([\theta_1, \theta_2])$

$L(\theta) = ?$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 = \rho^2(\theta) + [\rho'(\theta)]^2$$

Quindi la lunghezza sarà:

$$L(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + [p'(\theta)]^2}\, d\theta$$

Lunghezza della cardioide

$\rho = a(1+\cos\theta)$, $\quad \theta \in [-\pi, \pi]$

$\rho' = -a\sin\theta$

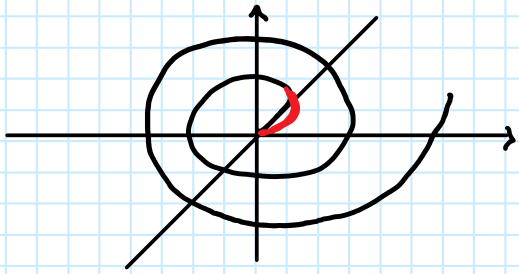
$$L(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta = a\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{2}$$

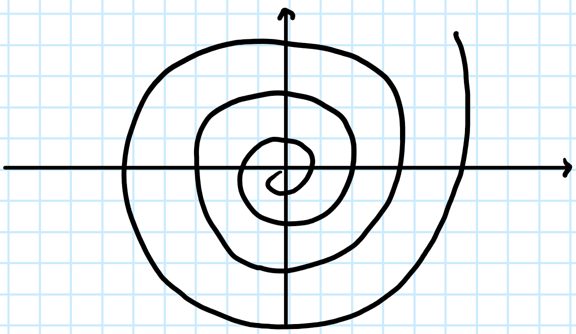
Esercizi

1) Lunghezza della curva
   $\rho = a\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], a > 0$

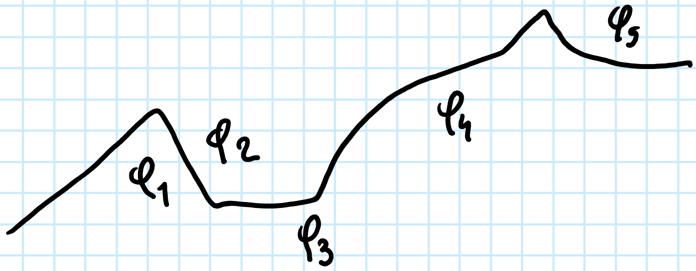
Spirale di Archimede



2) $\rho = e^{2\theta}, \qquad \theta \in [0,2\pi]\ con\ r > 0$



Definizione "curve regolari a tratti"



$$L(\varphi) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2) + L(\varphi_3) + \cdots + L(\varphi_N)$$

<u>Esempio: calcoliamo la lunghezza della curva</u>

$$\varphi = \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

con $t \in [0,2\pi]$

$$\begin{cases} x' = -3\cos^2 t \sin t \\ y' = 3\sin^2 t \cos t \end{cases}$$

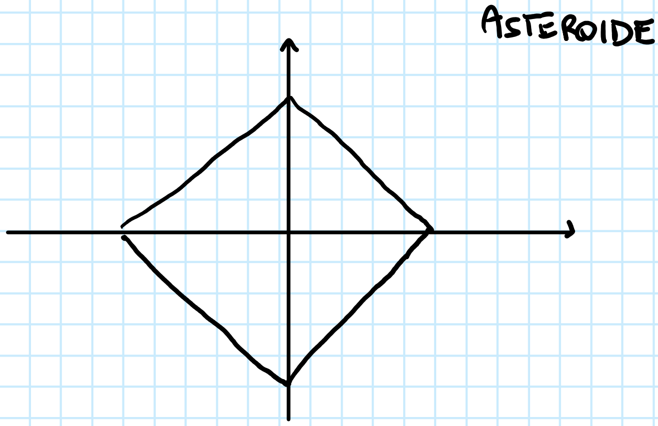
$$t = 0, \begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi'(t) = 0$$

$$t = \pi \rightarrow \varphi'(t) = 0$$

$$t = 2\pi \rightarrow \varphi'(t) = 0$$

La curva non è regolare, ma regolare a tratti



$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\; dt$$

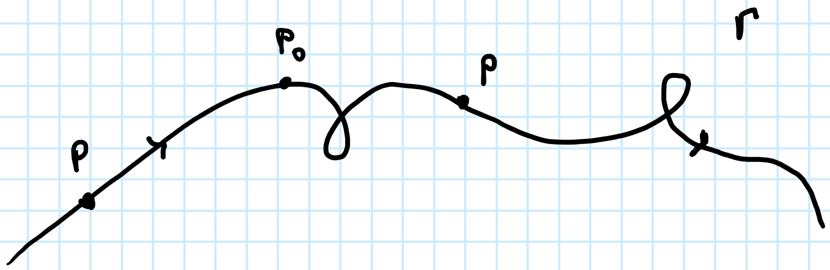
$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt = 3\int_0^{2\pi} |\cos t \sin t|\, dt$$

$$= 3\left[4 * \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t \sin t|\, dt\right] = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\, dt = 12\left(\frac{\sin^2 t}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$$

Ascissa curvilinea o lunghezza d'arco

Sia γ una curva regolare di $\mathbb{R}^n$ di sostegno $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.



$P \in \Gamma$: ascissa curvilinea di $P = \begin{cases} L(\widehat{PoP}) se\ P\ segue\ P_0 \\ -L(\widehat{PoP}) se\ P\ precede\ P_0 \end{cases}$

Supponiamo che φ: $[a, b] \to \mathbb{R}^n$ sia una rappresentazione parametrica di γ, supponiamo che: $P_0 = \varphi(t_0)$

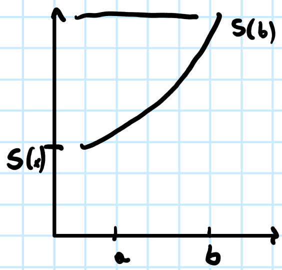
Definiamo la funzione

$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\left|\varphi'(t)\right|\right| \, dT \,, \forall t \in [a, b]$

Se prendiamo un punto sul sostegno della nostra curva $P = \varphi(t) \in \Gamma$, allora ci sono due possiblità:

- se P segue P_0, abbiamo che $t > t_0$; quindi $s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\left|\varphi'(t)\right|\right| dt = lunghezza\ dell'arco\ \widehat{PoP}$
- Se P precede P_0, abbiamo che $t < t_0$; quindi $s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\left|\varphi'(t)\right|\right| dt = \int_{t}^{t_0} \left|\left|\varphi'(t)\right|\right| dt = - L\left(\widehat{PoP}\right)$

$s: t \in [a, b] \rightarrow s(t) \in$
$s'(t) = \left|\left|\varphi'(t)\right|\right| > 0$ in $(a, b) \rightarrow s(t)$ è strettamente crescente



$s = s(t) \rightarrow t = t(s)$
$t = t(s) : [s(a), s(b)] \rightarrow [a, b]$
$s \in t(s)$
$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
$\gamma(s) = \varphi\left(t(s)\right) \forall s \in [s(a), s(b)]$
$\gamma \sim \varphi$ perché $s = s(t)$ cambiamento ammissibile di parametro

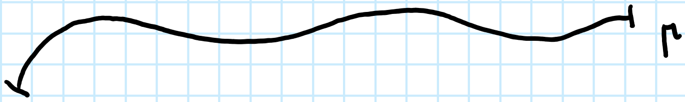
Vettore tangente

$$\gamma'(s) = \varphi'\left(t(s)\right) * \frac{dt}{ds} = (derivata\ funzioni\ inverse) =$$
$$= \varphi'\left(t(s)\right) * \frac{1}{s'\left(t(s)\right)} = \frac{\varphi'\left(t(s)\right)}{\left|\left|\varphi'\left(t(s)\right)\right|\right|}$$

$\left|\left|\gamma'(s)\right|\right| = 1, \qquad \forall s \in [s(a), s(b)]$

Integrale curvilineo di una funzione

Supponiamo di considerare una curva γ regolare di $\mathbb{R}^n$, di sostegno $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una rappresentazione parametrica di γ.



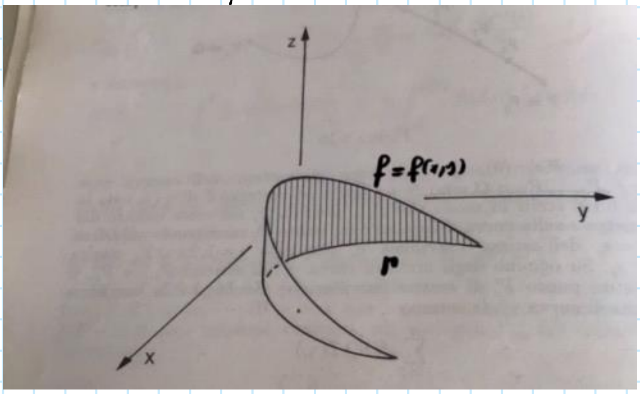
$f = f(x_1, \ldots, x_n), f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Integrale curvilineo di f, esteso a γ

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f\left(\varphi(t)\right) \left\|\varphi'(t)\right\| dt$$

Per $n = 2$: $\int_\gamma f ds = \int_a^b f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \big(\varphi_2'(t)^2\big)}\, dt$

$$f \geq 0 \; se \; \Gamma = \int_\gamma f ds$$



Osservazione

Se $\varphi = \psi$ allora $\int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \left\|\varphi'(t)\right\| dt = \int_c^d f\big(\psi(s)\big) \left\|\varphi'(s)\right\| ds$

Osservazione

Se $f = 1$, allora $\int_\gamma f ds = \int_a^b \left\|\varphi'(t)\right\| dt = L(\varphi)$

Proprietà

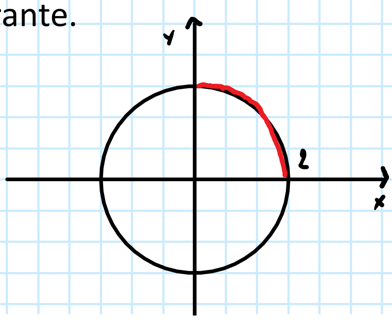
$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_\gamma f ds + \beta \int_\gamma g ds$$

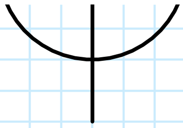
Proprietà

$$\left|\int_\gamma f ds\right| \leq \max_\Gamma |f| * L(\alpha)$$

<u>Esempio 1</u>

$\int_\gamma xy\, ds$, $\gamma =$ quarto di circonferenza e $x^2 + y^2 = 4$, situato nel primo quadrante.





$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0,2\pi]$$

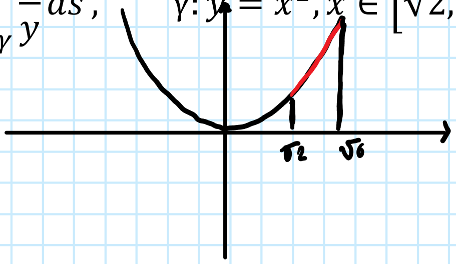
$$\begin{cases} x' = -2\sin t \\ y' = 2\cos t \end{cases}$$

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\int_\gamma xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t * 2\sin t * 2dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t = 4$$

<u>Esempio 2</u>

$$\int_\gamma \frac{x}{y} ds, \qquad \gamma: y = x^2, x \in \left[\sqrt{2}, \sqrt{6}\right]$$



$$\varphi = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \end{cases} \quad t \in \left[\sqrt{2}, \sqrt{6}\right]$$

$$\int_\gamma \frac{x}{y} ds = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{t}{t^2} * \sqrt{1+4t^2}\, dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{1+4t^2}}{t} dt$$

$$\sqrt{1+4t^2} = u$$

$$1 + 4t^2 = u^2$$

$$b^2 = \frac{u^2-1}{4}$$

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{u^2-1}$$

$$dt = \frac{1}{2} * \frac{1}{2\sqrt{u^2-1}} * 2u$$

$$t = \sqrt{2} \to u = \sqrt{1+8} = 3$$

$$t = \sqrt{6} \to u = \sqrt{1+24} = 5$$

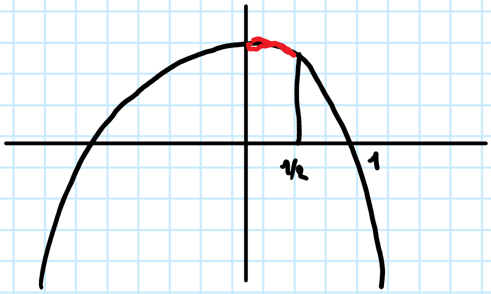
$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{1+4t^2}}{t} dt = 2\int_3^5 \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} * \frac{1}{2} * \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} du = \int_3^5 \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\, du$$

$$= \int_3^5 du + \int_3^5 \frac{du}{u^2-1}$$

<u>Esempio 3</u>

$$\int_\gamma \frac{xy+1}{y\sqrt{1+4x^2}} ds$$

$\gamma: y = 1 - x^2, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$



$$\varphi = \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = -2t \end{cases}$$

$$\int_\gamma - = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t(1-t^2)+1}{(1-t^2)\sqrt{1+4t^2}} * \sqrt{1+4t^2}\, dt$$

$$\left\|\varphi'(t)\right\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t(1-t^2)+1}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$$

$$\int \frac{dt}{t^2-1}$$

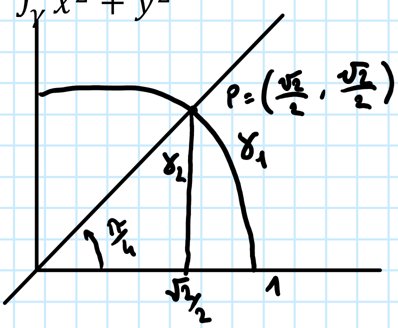
$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \rightarrow 1 = A(t+1) + B(t-1) = (A+B)t + (A-B)$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -B = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c$$

<u>Esempio 4</u>

$$\int_\gamma \frac{ds}{x^2+y^2}$$



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$\int_\gamma - = \int_{\gamma_1} - + \int_{\gamma_2} -$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = t \end{cases}, \qquad t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\gamma_1; \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \end{cases}$$

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 1$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{x^2 + y^2} ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} * 1dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 1 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{x^2 + y^2} ds = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2} + t^2} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{\frac{1}{2}\left(1 + \left(\sqrt{2}t\right)^2\right)}$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}dt}{1 + \left(\sqrt{2}t\right)^2} = \sqrt{2}\left(\arctan \sqrt{2}\, t\right)_{t=0}^{t=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

In conclusione:

$$\int_\gamma \frac{1}{x^2 + y^2} ds = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\sqrt{2} = \frac{\pi}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Analogamente, con una funziona a tre variabili il procedimento è il medesimo.

<u>Esempio 5</u>

$$\int_\gamma \left(\frac{2}{3}x + 4z\right) ds$$

$$\gamma = \begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{3}{2}t^2 \\ z = t^3 \end{cases}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 3t \\ z' = 3t^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{9(1 + t^2 + t^4)} = 3\sqrt{1 + t^2 + t^4}$$

$$\int_\gamma \left(\frac{2}{3}x + 4z\right) ds = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} * 3t + 4t^3\right) \sqrt{1 + t^2 + t^4} dt$$

$$= 3 \left[(1 + t^2 + t^4)^{\frac{3}{2}} * \frac{2}{3}\right]_0^1 = 2\left[3\sqrt{3} - 1\right]$$

Definizione di baricentro di una curva

Sia $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ una curva regolare a tratti, allora il baricentro di γ è il punto (x_0, y_0)

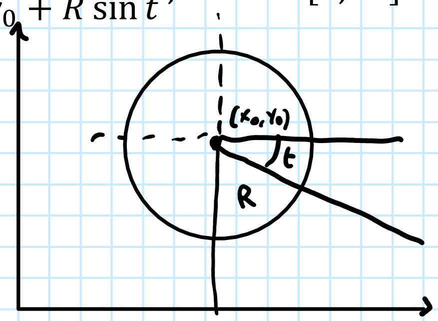
$$x_0 = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x \, ds$$

$$y_0 = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma y \, ds$$

<u>Esempio</u>

Baricentro della circonferenza (x_0, y_0) raggio

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$



$$\begin{cases} x' = -R\sin t \\ y' = R\cos t \end{cases}$$

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = R$$

$$L(\gamma) = 2\pi R$$

Ascissa baricentro

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{\gamma} x\,ds = \frac{1}{2\pi R}\int_{0}^{2\pi}(x_0 + R\cos t) * R\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(x_0 + R\cos t)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} x_0\,dt = x_0$$

Ordinata baricentro = y_0

$\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ ...

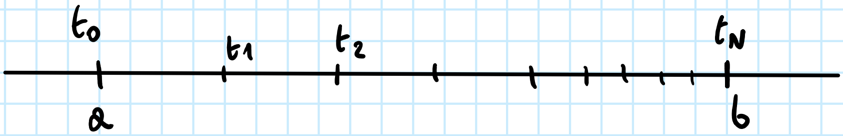
$$x_0 = \frac{1}{2(\gamma)}\int_{\gamma} x\,ds\,, y_0 = \frac{1}{L(\gamma)}\int_{\gamma} y\,ds$$
$$z_0 = \frac{1}{L(\gamma)}\int_{\gamma} z\,ds$$

Integrale di funzione a due variabili

venerdì 3 dicembre 2021 14:17

Consideriamo una funzione di una singola variabile
$f = f(x), f: [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata

In analisi 1 prenderemo l'intervallo, lo decomponiamo scegliendo dei punticini



L'insieme costituito da questi punti viene chiamato partizione.
$P_N = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ (partizione di [a,b])

$[t_i, t_i + 1]$

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{N-1} \inf_{x \in [t_i, t_i+1]} f(x)\,(t_{i+1} - t_i)$$

$$S(f, P) = \sum_{i=0}^{N-1} \sup_{x \in [t_i, t_i+1]} f(x)\,(t_{i+1} - t_i)$$

Per le somme piccole si prende l'estremo inferiore.
Per quelle grandi l'estremo superiore.

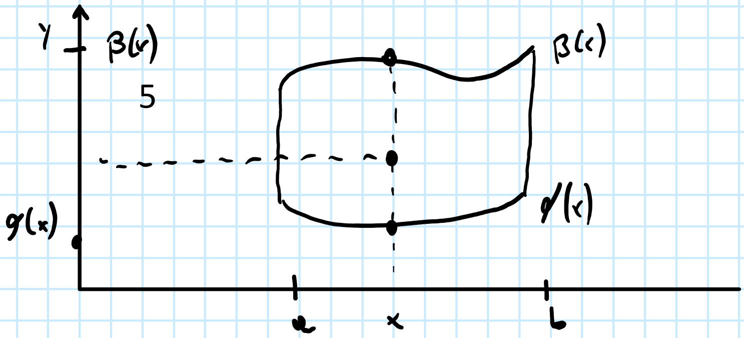
Si ha: $s(f, P_1) \le S(f, P_2)\ \ \forall P_1, P_2$ partizioni di $[a, b]$
cioè $\sup\{s(f, P): P\} \le \inf\{S(f, P): P\}$

Definizione
Se $\sup\{s(f, P), P\} = \inf\{S(f, P): P\}$ si dice che f è integrabile secondo Riemann e si ha
$\int_a^b f(x)dx = \sup\{s(f, P), P\} = \inf\{S(f, P): P\}$

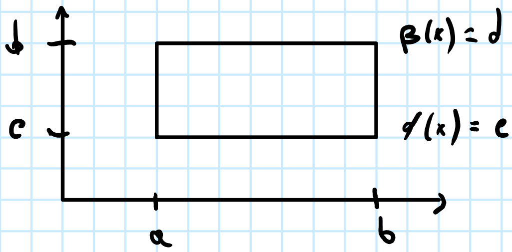
Integrazione multipla

Un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse x se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, d(x) \le y \le \beta(x)\}$

$d(x), \beta(x)$ saranno funzoni continue in $[a, b]$ tali che $d(x) \leq \beta(x)$.

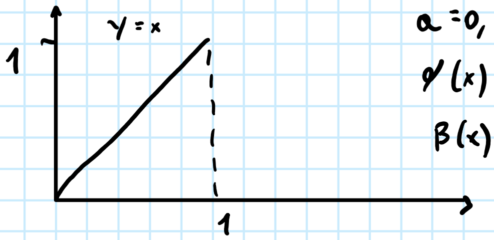


Esempio 1



$D = [a, b] * [c, d]$

Esempio 2

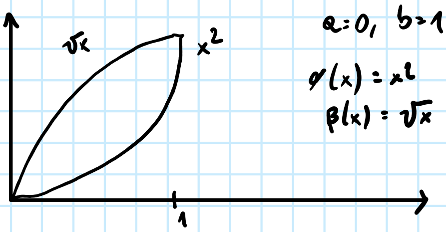


$a = 0, \ b = 1$

$\varphi(x) = 0$

$\beta(x) = x$

Esempio 3

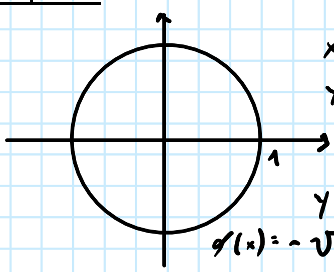


$a = 0, \ b = 1$

$\varphi(x) = x^2$

$\beta(x) = \sqrt{x}$

Esempio 4



$x^2 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - x^2$

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

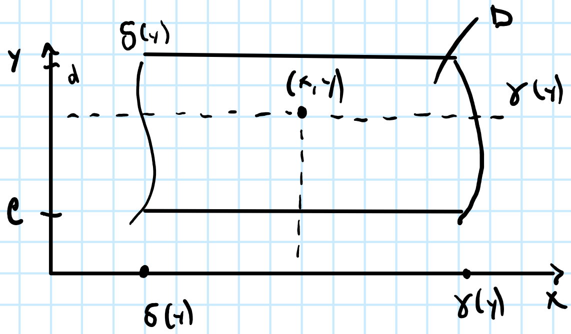
$\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2} \qquad a = -1, \ b = 1$

Definizione

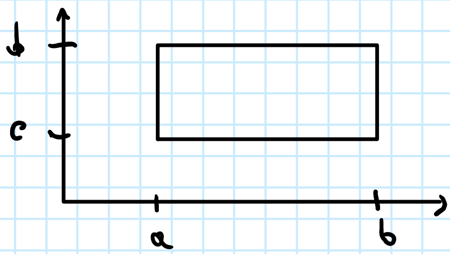
L'area di un dominio normale rispetto all'asse x sarà:

$$A(D) = \int_a^b [\beta(x) - d(x)]$$

Definizione
Il dominio normale rispetto all'asse y sarà:
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \qquad \gamma(y) \leq x \leq \delta(t)\}$
$\gamma(y), \delta(y)$ sono funzioni continue in $[c, d]$
$\gamma(y) \leq \delta(y)$

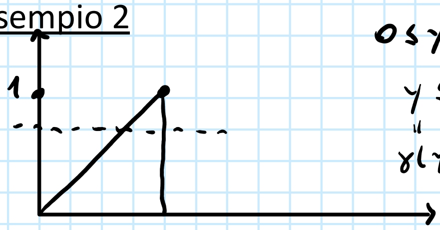


Esempio 1



$\gamma(y) = a, \qquad \delta(y) = b$

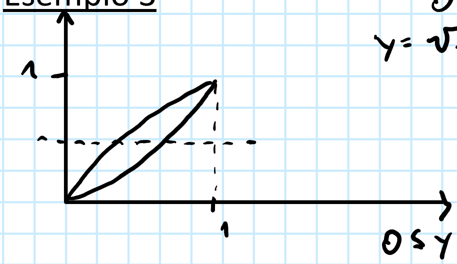
Esempio 2



$0 \leq y \leq 1$

$\underset{\gamma(y)}{y} \leq x \leq \underset{\delta(y)}{1}$

Esempio 3



$0 \leq y \leq 1$

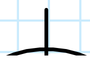
$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \to \gamma(y)$

$y = x^2$

$x = \sqrt{y} \to \delta(y)$

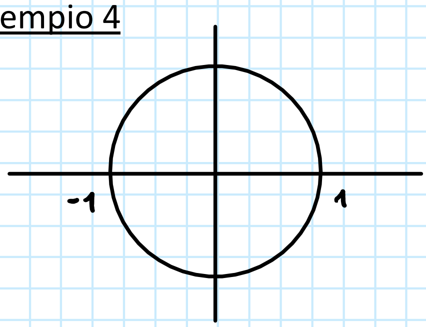
$0 \leq y \leq 1 \quad y^2 \leq x \leq \sqrt{y}$

Esempio 4



$x = \pm\sqrt{1 - y^2}$

Esempio 4



$x = \pm\sqrt{1-y^2}$

$-1 \le y \le 1$

$-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}$

Area

Per calcolare l'area:

$$Area(D) = \int_c^d [d(y) - \gamma(y)]dy$$

Esempio

$$A(D) = \int_0^1 \left(\sqrt{y} - y^2\right)dy = \frac{1}{3}$$

Concetto di partizione di funzioni a due variabili

Definizione

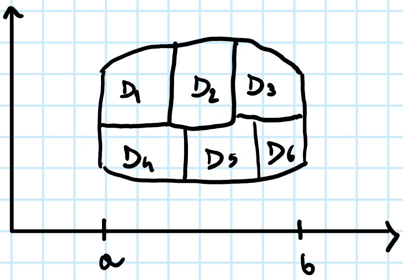
$D \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio normale rispetto ad x

Partizione di D: $P = \{D_1, \dots, D_N\}$

i) D_i dominio normale rispetto ad x

ii) $\dot{D}_i \cap \dot{D}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

iii) $\cup_{i=1}^{N} D_i = D$



Definizione

Definiamo una funzione di due variabili

$f: D \to \mathbb{R}$ limitata, $f = f(x, y)$. Prendiamo una partizione $P = \{D_1, \dots, D_N\}$ di D.

Definiamo le somme piccole e le somme grandi

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{N} \inf_{D_i} f * A(D_i)$$

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{N}\sup_{D_i} f * A(D_i)$$

Proprietà

$s(f,P_1) \le S(f,P_2)\ \ \forall P_1, P_2$ partizione di D

Definizione

Se gli insiemi numerici

$\{s(f,P) : P\}$ e $\{S(f,P): P\}$

sono pure contigui, la funzione f si dice integrabile secondo Riemann su D; per cui in tal caso scriveremo:

$$\iint_D \mathrm{f}(x,y)\,dx\,dy = \sup_P s(f,P) = \inf_P S(f,P)$$

Questo è un integrale doppio di f, esteso a D.

Proprietà

Se f è continua, allora f è integrabile.

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\,dxdy = \alpha \iint_D f\,dxdy + \beta \iint_D g\,dxdy$$

Proprietà additiva

$$\iint_D f\,dxdy = \iint_{D_1} f\,dxdy + \iint_{D_2} f\,dxdy$$

Teorema

Formule di riduzione per gli integrali doppi

Abbiamo da studiare sia un dominio rispetto alle asse x che alle y.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \qquad \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$

Se $f = f(x,y),\ f: D \to \mathbb{R}$ continua, $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy.$

Nel caso di dominio normale rispetto all'asse y la formula si scrive:

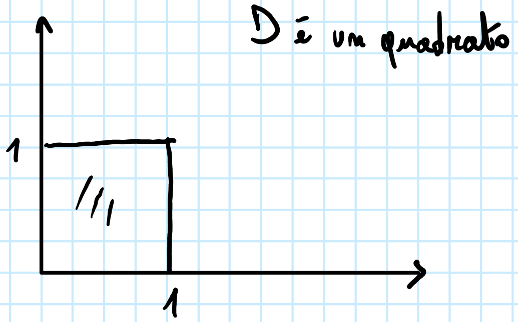
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, \qquad \alpha(y) \le x \le \gamma(y)\}$

Se $f: E \to \mathbb{R}$ continua, $\iint_E f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy\ \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx$

Esercizio 1

$$\iint_D x \arcsin y\ \ dxdy$$

$$\iint_D x \arcsin y \ dxdy$$



$$\iint_D x \arcsin y \ dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x \arcsin y)\ dy = \int_0^1 x\ dx \int_0^1 \arcsin y \ dy$$

$$\int \arcsin y \ dy = y \arcsin y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\ dy = y \arcsin y - \int y\left(1-y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= y \arcsin y + \frac{1}{2} * \sqrt{1-y^2} * 2 + c$$

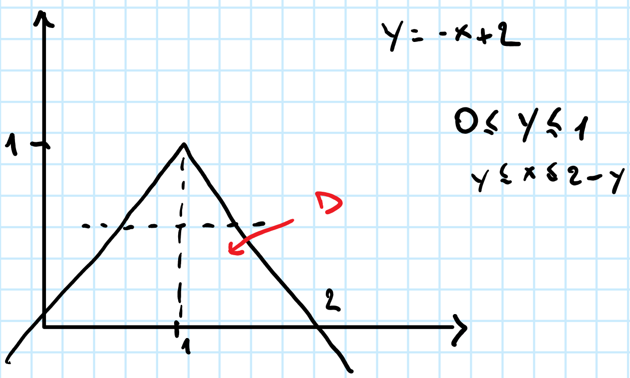
$$\int_0^1 \arcsin y \ dy = (y \arcsin y)_0^1 + \left(\sqrt{1-y^2}\right)_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\iint_D - = \left(\int_0^1 x\ dx\right)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Esercizio 2

$$\iint_D xy^2\ dxdy$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x, y \le -x+2, y \ge 0\right\}$$



$$\beta(x) = \begin{cases} x \ se \ 0 \le x \le 1 \\ -x+2 \ se \ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\iint_D xy^2\ dxdy = \iint_{D_1} - + \iint_{D_2} -$$

Su $D_1 : 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le x$

Calcoliamo i due integrali

$$\iint_{D_1} xy^2\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x xy^2\,dy = \int_0^1 x\left(\int_0^x y^2 dy\right)dx = \int_0^1 x\left(\frac{y^3}{3}\right)_{y=0}^{y=x} dx = \frac{x\,x^3}{3}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^5}{5}\right)_0^1 = \frac{1}{15}$$

$$\iint_{D_2} xy^2 dxdy = \int_1^2 dx \int_0^{-x+2} xy^2\,dy = \int_1^2 x\left(\int_0^{-x+2} y^2 dy\right)dx = \int_1^2 x\left(\frac{y^3}{3}\right)_0^{-x+2} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 x(2-x)^3 dx = \cdots$$

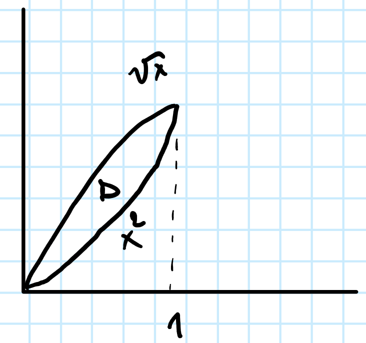
$$D = \{(x,y): 0 \le y \le 1, \qquad y \le x \le 2-y\}$$

$$\iint_D xy^2\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} xy^2 dx = \int_0^1 y^2\left(\int_y^{2-y} x\,dx\right)dy = \int_0^1 y^2\left(\frac{x^2}{2}\right)_{x=y}^{x=2-y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\left[(2-y)^2 - y^2\right]dy = 2\int_0^1 y^2(1-y)dy = 2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = 2 * \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

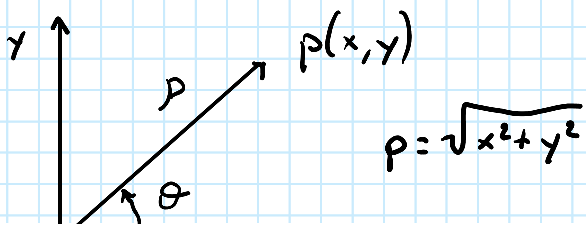
Esercizio per casa

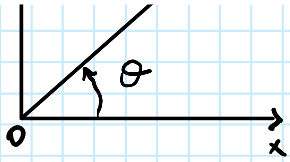
$$\iint_D x e^{y^2} dxdy$$



Trasformazione alle coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

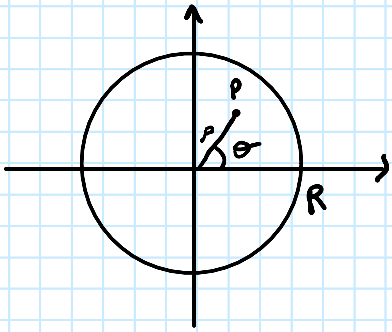




Definizione di Φ

$\Phi : (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (\rho \cos\theta \,, \rho \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$

Esempio di un cerchio

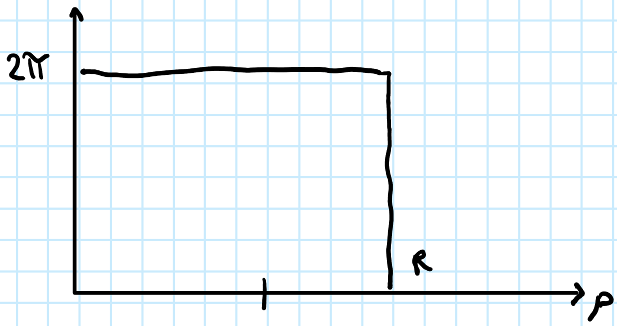


$0 \leq \rho \leq R$

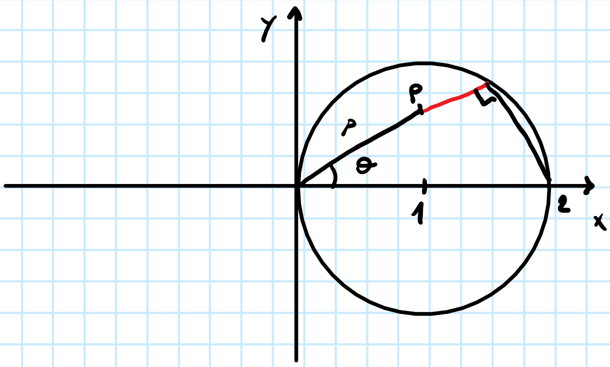
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$(\rho, \theta) \in [0, R] * [0,2\pi]$

Ciò rappresenta:



Altro esempio



$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \rho \leq \bar{\rho} = 2\cos\theta$

$\bar{\rho} = 2\cos\theta$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

$\rho^2 \cos^2\theta + 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2 \sin^2\theta = 1$

$\rho^2 = 2\rho\cos\theta$

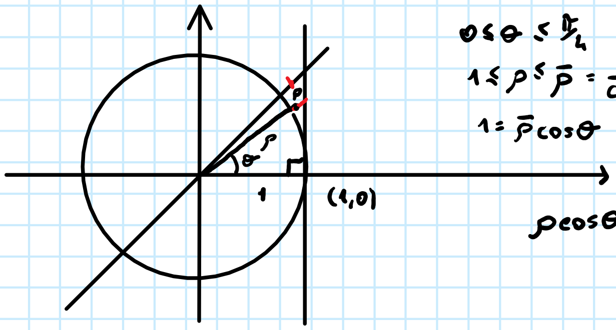
$\rho = 2\cos\theta$

Dove $\rho = 2\cos\theta$ è l'equazione polare della circonferenza!

$$T = \left\{(\rho, \theta): -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 2\cos\theta\right\}$$

Dominio normale rispetto all'asse θ

<u>Altro esempio</u>



$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

$1 \le \rho \le \bar{\rho} = \frac{1}{\cos\theta}$

$1 = \bar{\rho}\cos\theta$

$\rho\cos\theta = x = 1 \rightarrow \rho = \frac{1}{\cos\theta}$

Scrivere il dominio dell'area rossa in coordinate polari.

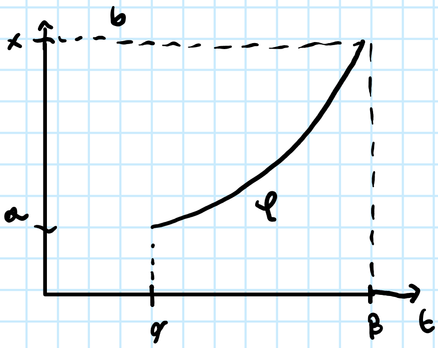
$$T = \{(\rho, \theta): 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 1 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}$$

Formula del cambiamento di variabili negli integrali doppi

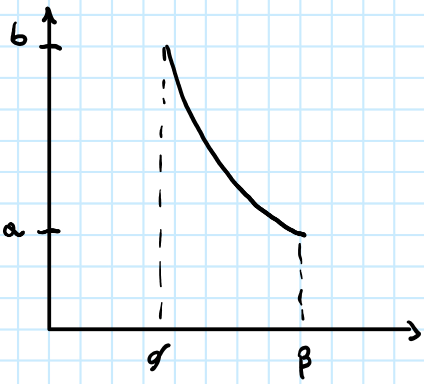
$f = f(x),\ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$x = \varphi(t), \qquad \varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]; \varphi \in C^1\ biunivoca; \varphi' \neq 0$



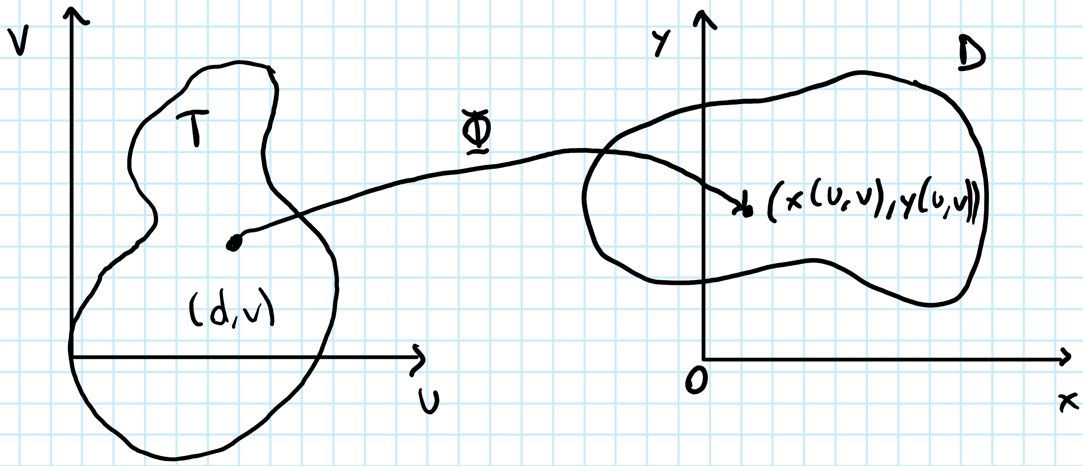
Nel caso opposto invece



$$\int_a^b f(x)dx =$$
$x = \varphi(t): x = a \rightarrow t = \beta; x = b \rightarrow t = \alpha$
$$= \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, |\varphi'(t)|\, dt$$

Le ipotesi da fare sono le seguenti
Nel caso di funzioni di due variabili $f(x,y)$ come si ragiona?
Prendiamo due domini regolari $T \subseteq \mathbb{R}^2_{u,v}, D \subseteq \mathbb{R}^2_{x,y}$. I **domini regolari** sono unioni di un numero finito di domini normali regolari, a due a due privi di punti interni in comune.

Prendiamo una trasformazione $\Phi: (u,v) \in T \rightarrow (x(u,v), y(u,v)) \in D$.



Supponiamo che Φ sia di classe C^1: $\Phi \in C^1(T)$, per cui $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$
Chiameremo **determinante jacobiano** di Φ il seguente determinante:
$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = |J_\Phi|$$

<u>Esempio del determinante jacobiano</u>
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \qquad u = \rho \quad v = \theta$$
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} x_p & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

Formula del cambiamento di variabili
Viene espressa dal **Teorema**
$T, D \subseteq \mathbb{R}^2$ siano domini regolari
$\Phi: T \rightarrow D$ sia una trasformazione biunivoca di classe C^1, tale che il determinante jacobiano $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ in T.

Allora, se $f = f(x,y),\ f\colon D \to \mathbb{R}$ è continua, vale la seguente formula:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_T f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Prima osservazione

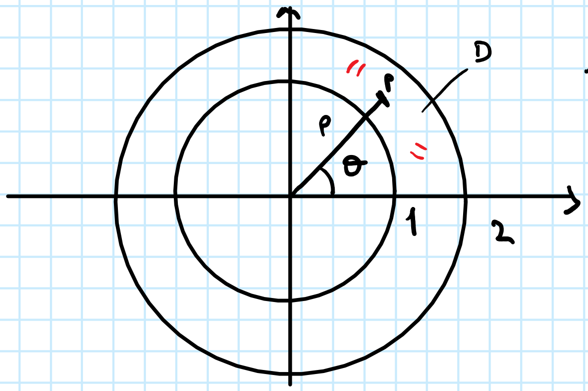
Useremo sempre la trasformazione delle coordinate polari, ma non è biunivoca.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \text{non è biunivoca}$$

Si può dimostrare che la formula vale sotto delle condizioni più generali.

Esercizio 1

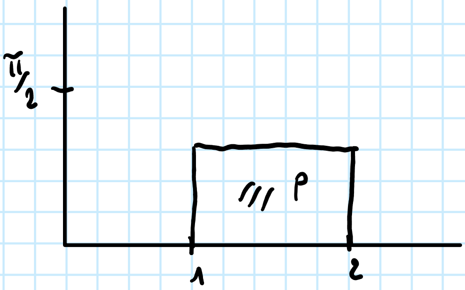
$$\iint_D \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$



$1 \le \rho \le 2$

$0 \le \theta \le \pi/2$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$



Il determinante jacobiano in questo caso fa ρ.

$$\iint_D \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_T \left[\arcsin\frac{\rho\sin\theta}{\rho}\right]\rho\, d\rho d\theta = \iint_T \rho\theta\, d\rho\, d\theta$$

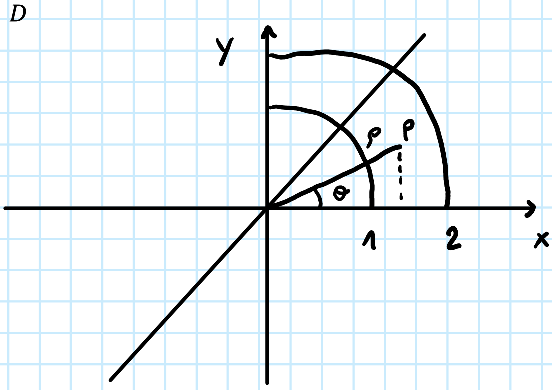
$$= formule\ di\ riduzione = \int_1^2 \rho\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\, d\theta = \frac{1}{2}(\rho^2)_1^2 * \frac{1}{2}(\theta^2)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} * 3 * \frac{\pi^2}{4} = \frac{3}{16}\pi^2$$

$$\int e^{y^2} y^4 dy = \frac{1}{2}\int \left(e^{y^2} * 2y\right)\ y^3 dy = \frac{1}{2}\int \frac{d}{dy}\left(e^{y^2}\right)\ y^3 dy = per\ p.$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{y^2} y^3 - \int e^{y^2} * 3y^2\ dy\right] = \frac{1}{2}[y^3 e^{y^2} - \frac{3}{2}\int 2\left(ye^{y^2}\right) y\ dy$$

<u>Esercizio 2</u>

$$\iint_D \frac{y^2}{x^4} dxdy$$



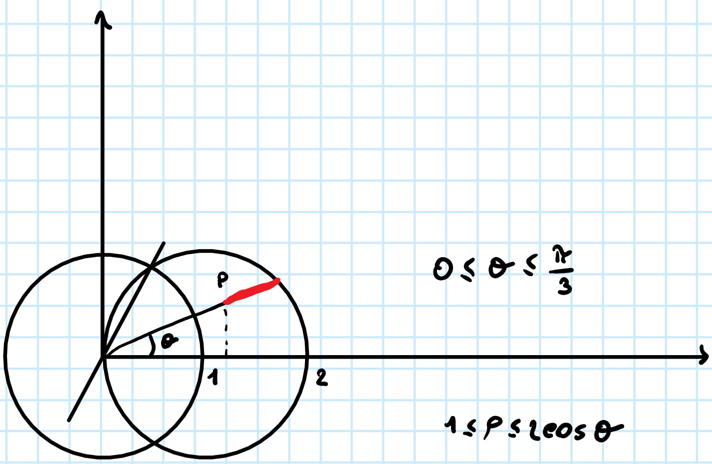
$$T: \begin{cases} 1 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\iint_D \frac{y^2}{x^4} dxdy = \iint_T \frac{\rho^2 \sin^2\theta}{\rho^4 \cos^4\theta} * \rho\ d\rho\ d\theta = \iint_T \frac{1}{\rho}\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}\ d\rho\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} d\theta \int_1^2 \frac{1}{rho} d\rho$$

$$\int \tan^2\theta * \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\ d\theta$$

<u>Esercizio 3</u>

$$\iint (x^2 + y^2) dxdy$$



$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$

$1 \le \rho \le 2\cos\theta$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$T=\left\{(\rho,\theta): 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}, 1\le\rho\le 2\cos\theta\right\}$$

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint_T \rho^2 * \rho \, d\rho d\theta = \iint_T \rho^3 \, d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} \rho^3 \, d\rho =$$

Sfruttiamo le formule di riduzione

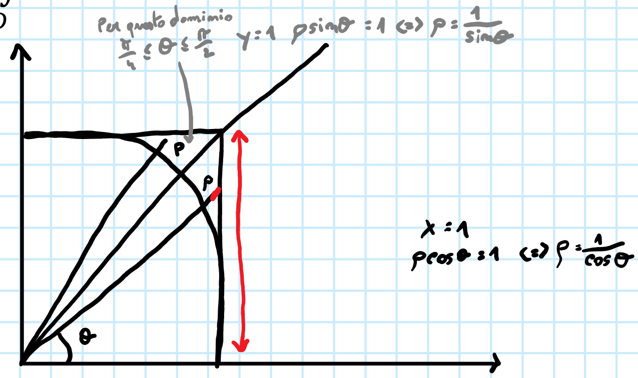
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\rho^4\right)_{\rho=1}^{\rho=2\cos\theta}$$

$$d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(16\cos^4\theta - 1\right) d\theta$$

$$\int \cos^4\theta = \int \cos^2\theta * \cos^2\theta = \int \cos^2\theta \ \left(1-\sin^2\theta\right) d\theta = \int \cos^2\theta - \int \sin^2\theta\cos^2\theta \, d\theta$$

Esercizio 4

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy$$

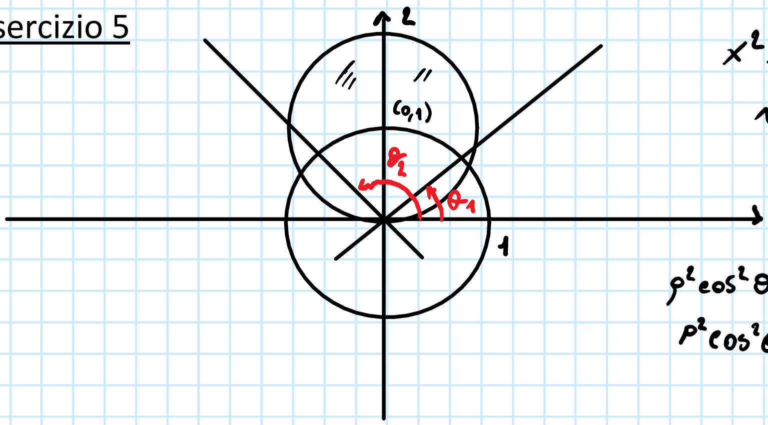


$$T: \begin{cases} 0\le\theta\le\frac{\pi}{4} \\ 1\le\rho\le\frac{1}{\cos\theta} \end{cases}$$

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint_T \rho^3 \, d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\frac{1}{\sin\theta}} \rho^3 \, d\rho = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4\theta} \, d\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^4\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}$$

Esercizio 5



$x^2+(y-1)^2=1$

$1\le\rho\le\bar{\rho}$

$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5}{6}\pi$

$\theta_1=\frac{\pi}{6}$

$\theta_2=\frac{5}{6}\pi$

$\rho^2\cos^2\theta+(\rho\sin\theta-1)^2=1$

$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2\rho\sin\theta=0$

$\boxed{\rho=2\sin\theta}$, QUINDI $1\le\rho\le 2\sin\theta$

$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2\rho\sin\theta+1=1$$
$$\rho^2=2\rho\sin\theta$$
$$\rho=2\sin\theta$$

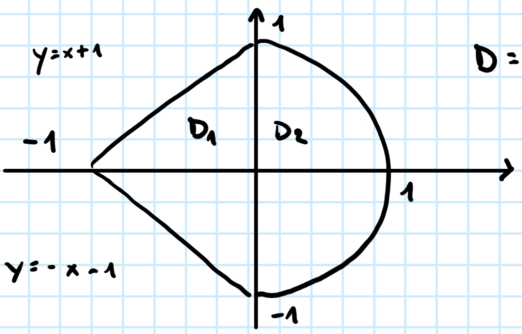
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2-(y-1)^2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2-y^2+2y-1=0 \rightarrow y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=1-y^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} d\theta\int_1^{2\sin\theta}\rho^3\,d\rho$$

Esercizio 6



$D=D_1\cup D_2$

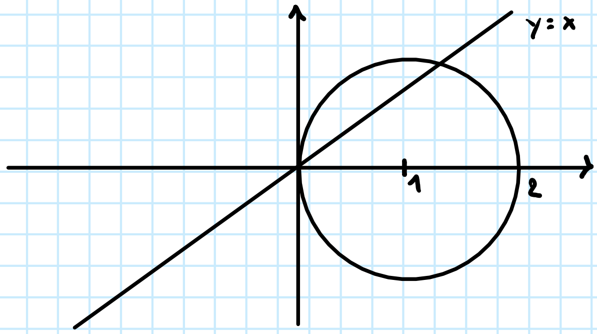
$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=\iint_{D_1}(x^2+y^2)\,dxdy+\iint_{D_2}(x^2+y^2)\,dxdy$$

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy + \iint_{D_2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy = \begin{Bmatrix} -1 \leq x \leq 0 \\ -x-1 \leq y \leq x+1 \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{x+1} (x^2+y^2 = dy =$$

Esercizio 7 (a casa)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x \leq 0, y \geq x\}$



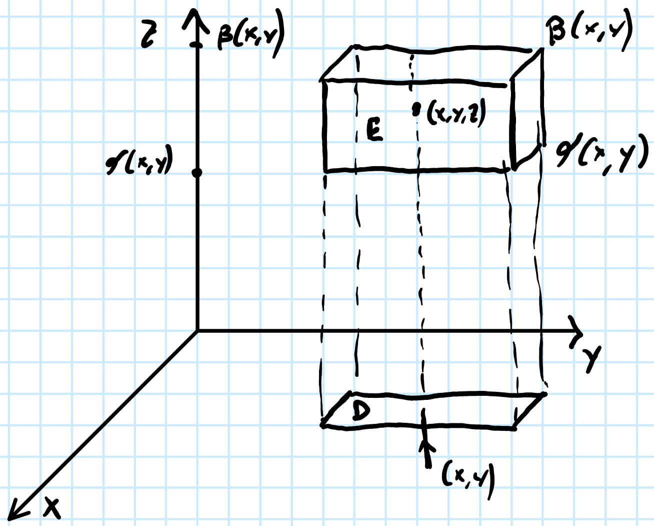
$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \cdots$$

$\mathbb{R}^3$, $E \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice **normale** rispetto al piano xy se $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio regolare e $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ continue in D e tali che $\alpha(x,y) \leq \beta(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$.



$$Vol(E) = m(E) = \iint_D [\beta(x,y) - \alpha(x,y)]dxdy$$

y_z

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D, \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$

x_z

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D, \alpha(x,z) \leq y \leq \beta(x,z)\}$

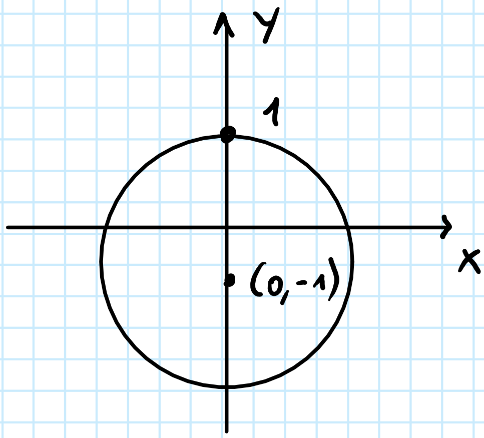
Esempio

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D$ e $x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2y\}$ xy

Dove D è il cerchio centrato in $(0,-1)$ di raggio 2

$$Vol(E) = \iint_D (3 - 2y - x^2 - y^2)dxdy$$

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y - 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} X = \rho\cos\theta \\ Y = \rho\sin\theta \end{matrix}$$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta - 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho$$

$\iint_D (3 - 2y - x^2 - y^2)\, dxdy =$

trasformazione coordinate polari + cambio variabili integrale doppio

$$= \iint 0 \leq \rho \leq 2, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\iint \left(3 - 2(\rho\sin\theta - 1) - \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta - 1 + 2\rho\sin\theta\right) \rho d\rho d\theta$$

$[0,2] * [0,2\pi]$

$$= \iint \left[3 - 2\rho\sin\theta + 2 - \rho^2 - 1 + 2\rho\sin\theta\right] \rho d\rho d\theta$$

$[0,2] * [0,2\pi]$

$$= \iint [4-\rho^2]\rho \, d\rho d\theta = f.le\ di\ riduzione$$

$[0,2] * [0,2\pi]$

Definizione

$E \subseteq \mathbb{R}^3$ dominio normale

$P = \{E_1, \dots, E_N\}, E_i = dominio\ normale$

tale che $\dot{E}_i n \dot{E}_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

$\cup_{i=1}^{N} E_i = E$

$f = f(x,y,z), \qquad f: E \to \mathbb{R}\ limitata$

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{N} \inf_{E_i} f * vol(E_i)$$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{N} \sup_{E_i} f * vol(E_i)$$

$\{s(f,P)\}, \{S(f,P)\}$ separati

$s(f,P_1) \leq S(f,P_2)\ \forall P_1, P_2$ partizioni di E

Definizione

f è integrabile secondo Riemann se:

$\sup_P s(f,P) = \inf_P S(f,P)$

e se:

$$\iiint_E f(x,y,z) dxdydz = \sup_P s(f,P) = \inf_P S(f,P)$$

Proprietà

Se f è continua in E, f è integrabile in E.

Formule di riduzione

Sia $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$ ed $f: E \to \mathbb{R}$ continua.

Allora:

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\, dz$$

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D, \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z)\}$

$$\iiint_F f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_D dydz \int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)\, dx$$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D \ con\ \alpha(x,z) \le y \le \beta(x,z)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_D dxdz \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)dy$$

Esempio

$$\iiint_E e^{x^2}\, dxdydz$$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, -1 \le z \le 4\}$$

$$(x,z) \in [0,1] * [-1,4] =: D$$

$$\alpha(x,z) = 0, \qquad \beta(x,z) = x$$

$$\iiint_E e^{x^2} dxdydz = \iint_D dxdz \int_0^x e^{x^2} dy = \iint_D e^{x^2} * x\, dxdz = \int_0^1 dx \int_{-1}^4 x\, e^{x^2} dz$$

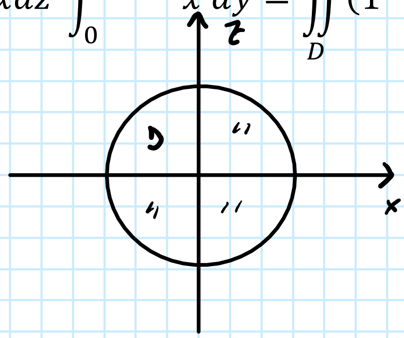
$$= \frac{5}{2}\int_0^1 2xe^{x^2} dz = \frac{5}{2}\left(e^{x^2}\right)_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{2}(e-1)$$

Esempio

$$\iiint_E x dxdydz\, , E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + x^2 \le 1, 0 \le y \le 1 - x - z\}$$

$$D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \le 1\}$$

$$= \iint_D dxdz \int_0^{1-x-z} x\, dy = \iint_D (1 - x - z)\, xdxdz =$$



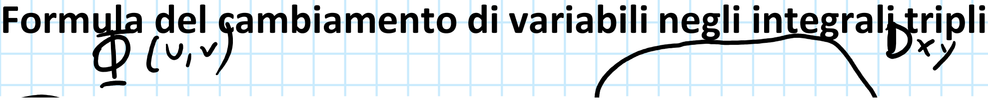
$$= \iint (1 - \rho\cos\theta - \rho\sin\theta)^2 \rho\cos\theta\, d\rho d\theta$$

$$\rho \in [0,1], \qquad \theta \in [0,2\pi]$$

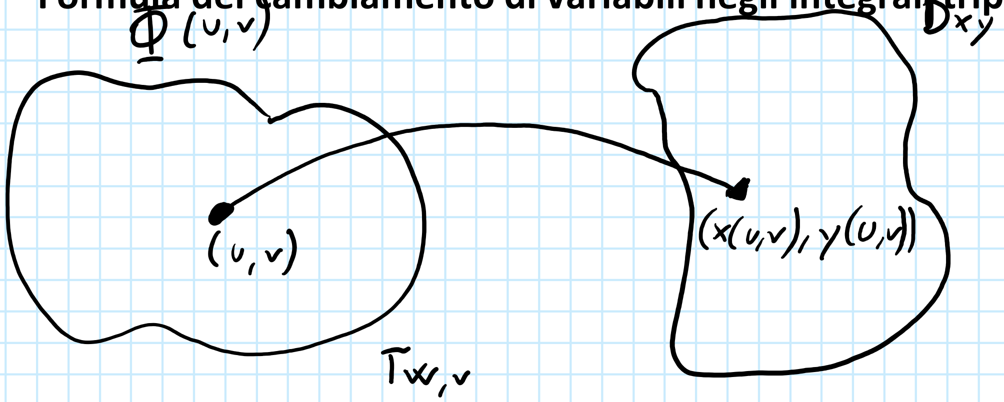
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$0 \le \rho \le 1, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

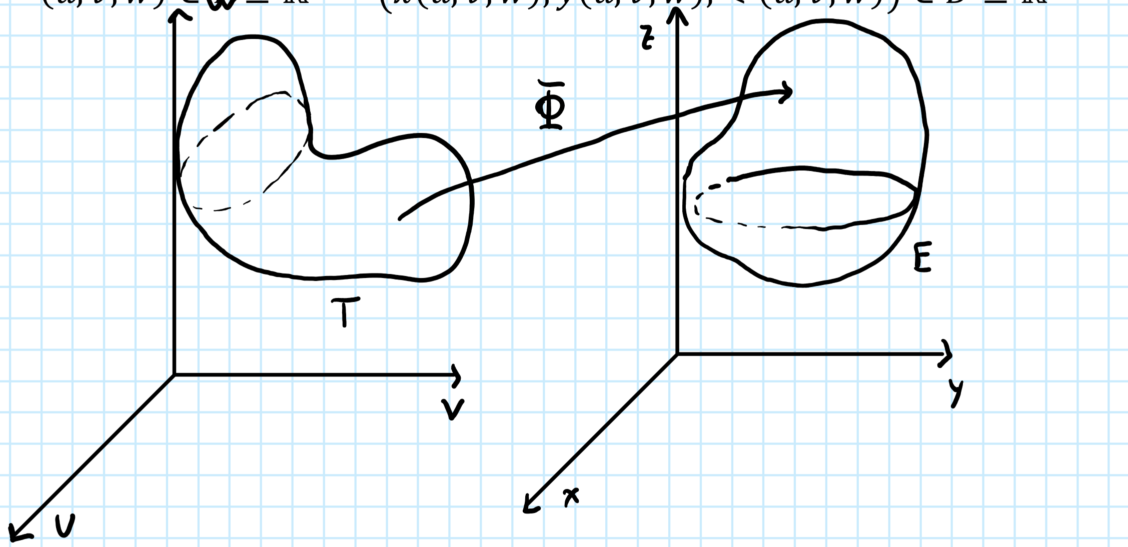
Formula del cambiamento di variabili negli integrali tripli



Formula del cambiamento di variabili negli integrali tripli



$\Phi : (u,v,w) \in T \subseteq \mathbb{R}^3 \to \big(x(u,v,w), y(u,v,w), < (u,v,w)\big) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$



$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

$$\Phi \in C^1 : \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = determinante\ jacobiano\ di\ \Phi$$

Teorema

Siano $E, T \subseteq \mathbb{R}^3$ dei domini regolari

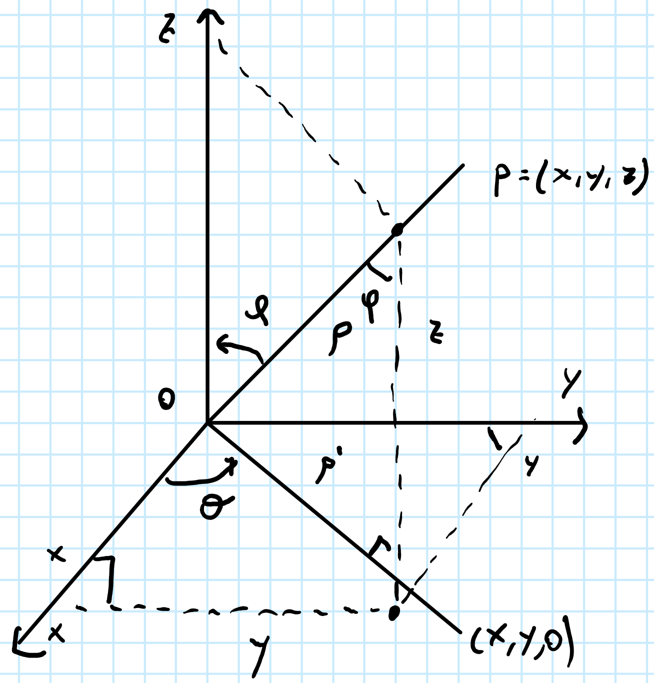
$\Phi: T \to E$ di classe C^1, biunivoca $(u,v,w) \to \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)$ e tale che $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$ in T.

Se $f = f(x,y,z), f: E \to \mathbb{R}$ continua,

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dxdydz$$

$$= \iiint_T f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\ \left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Trasformazione alle coordinate sferiche



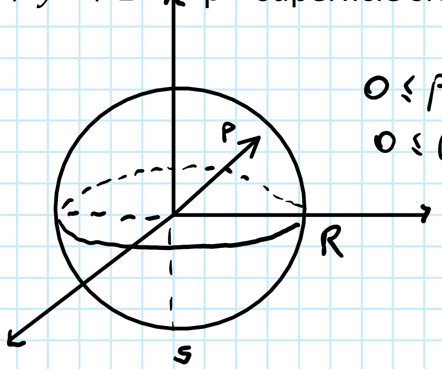
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$\theta = longitudine$
$\varphi = colatitudine\ \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\ latitudine\right)$

$\rho' = \rho \sin\varphi$
$x = \rho' \cos\theta$
$y = \rho' \sin\theta$
$z = \rho \cos\varphi$

Trasformazione alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ superficie sferica di raggio ρ

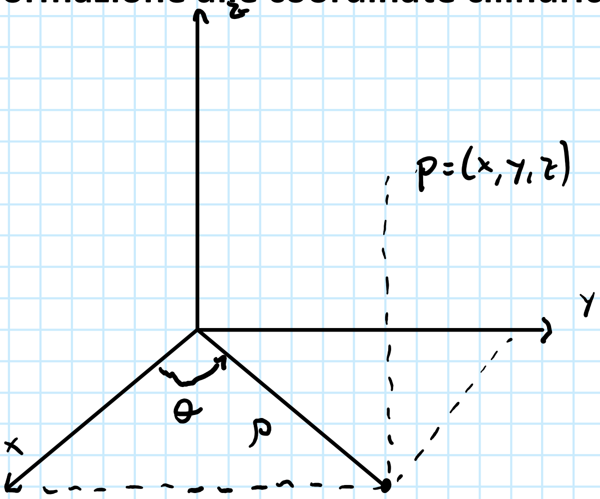


$0 \leq \rho \leq R$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$
$0 \leq \varphi \leq \pi$

$[0, R] * [0,2\pi] * [0, \pi]$ parallelepipedo

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(p,\theta,\varphi)} = \rho^2 \sin\varphi$$

Trasformazione alle coordinate cilindriche

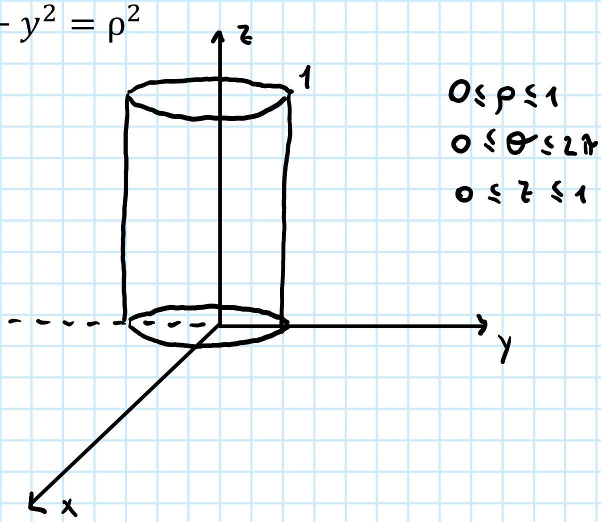


$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \rho$$

$$x^2+y^2 = \rho^2$$



Esempio

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz =^{(*)}$$

E = sfera centrata nell'origine, di raggio 1

$0 \le \rho \le 1, \qquad 0 \le \theta < 2\pi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi$

formula cam. variabili

$$=^{(*)} \iiint \rho * \rho^2 \sin\varphi \; d\rho d\theta d\varphi = \iiint \rho^3 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi$$

$$= formule\ di\ riduzione = \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \; d\varphi = -\frac{1}{4} * 2\pi \, (\cos\varphi)_0^{\pi}$$

$$= \pi$$

Verificare il valore della sfera di raggio R. E' $\frac{4}{4}\pi R^3$.

$$\iiint_E 1 * dxdydz = \cdots trasformazione\ in\ coordinate\ sferiche$$

Probabilità

martedì 21 dicembre 2021 18:29

Esperimento casuale (o aleatorio): il risultato di tale esperimento viene chiamato esito. L'insieme di tutti i possibili esiti costituisce un insieme.
Ω = spazio campione

Un **evento** è un qualsiasi sottoinsieme di Ω. Un evento A si dice verificato se l'esito dell'esperimento appartiene all'evento.

Esempio
Esperimento: lancio di un dado a sei facce.
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Esempi di eventi:

A. Uscita di un numero dispari: $A = \{1,3,5\}$
B. Uscita del numero 5: $B = \{5\}$
C. Uscita di un numero inferiore a 6: $C = \{1,2,3,4,5\}$
D. Uscita di un numero negativo: $D = \emptyset$, evento impossibile
E. Uscita di un numero compreso tra 1 e 6: $E = \Omega$, evento certo

3: sono verificati A, C, E.
5: sono verificati A, B, C, E.

Esempio
Lancio di una moneta:
$\Omega = \{T, C\}$.

Esempio
Numero di immatricolati del caso di informatica:
$\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,5, \dots\}$

A. nessun nuovo iscritto: $A = \{0\}$
B. meno di 200 iscritti: $B = \mathbb{N} \cap [0,200)$
C. almeno 200 iscritti: $C = \mathbb{N} \cap [200, +\infty)$

Definizione
$\Omega =$ spazio campione

$A \wedge B = A \cap B =$ evento intersezione, si legge "A e B". Si verifica quando A e B si verificano simultaneamente.
$A \vee B = A \cup B =$ evento unione, "A o B". Si verifica quando almeno uno dei due

eventi A, B è verificato.
$\neg A = \Omega \setminus \mathrm{A} =$ evento negazione o complementare, si legge "non A", si verifica quando **non** si verifica A.

$A = \Omega$ evento cuto
$A = \emptyset$ evento impossibile

$A \wedge B = \emptyset$, A e B incompatibili.
A implica B se $A \leq B$.

Esempio
Scelta casuale di una carta di un mazzo di carte francesi (escludendo i Jolly).
Consideriamo gli eventi:
A. Un asso
B. Una carta di cuori
C. Una carta di seme rosso
D. Una carta con un numero pari

$A \wedge B =$ asso di cuori; $A \wedge D =$ evento impossibile.
$B \wedge C =$ una carta di cuori $= B$.
$B \vee C = C$

$\neg D =$ carte di numero dispari o una figura
$B \subset C$: B implica C.

$\Omega =$ spazio campione
$P: \{eventi\} \rightarrow \mathbb{R}$

Definizione (Laplace, classica)
La probabilità di un evento A è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed A ed il numero dei casi possibili.
$|\Omega| = n$
$A \subseteq \Omega$ evento, $|A| = n_A$
$P(A) = \frac{n_A}{n}$

Esempio

Lancio di un dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Evento A: uscita di un numero pari
$A = \{2,4,6\}\ n_A = 3, n = 6$
$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Proprietà
1) $0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(A) =$ se A è certo, $A = \Omega = P(\Omega) = 1$
3) Se $A \wedge B = \emptyset$ (cioè A,b mutuamente esclusivi) allora $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$

Esempio
Urna che contiene 7 biglie rosse, 4 bianche, 5 verdi.
Esperimento aleatorio: estrazione di una biglia.

1) Spazio campione
   $\Omega = \{7\ R, 4\ B, 5\ V\}$
2) Estrazione di una biglia rossa:
   a. $A = \{7\ R\}$
   Estrazione di una biglia verde:
   b. $B = \{9\ V\}$
3) Probabilità di A e $\neg B$
   $P(A) = \frac{7}{20}, P(\neg B) = \frac{11}{20}$

Esempio
Si giochino 3 numeri al lotto sulla ruota di Napoli. Calcolare la probabilità di fare terno.
$\Omega = spazio\ campione\ : |\Omega| = C_{90,5} = \binom{90}{5}$

$C_{m,k} = \binom{m}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90!}{5!\,85!}$
A= fare terno: numero delle combinazioni di 2 numeri sui 87 che non abbiamo giocato $= \binom{87}{2}$
$P(A) = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} \approx 8 * 10^{-5}$

Probabilità frequentista $A\ n_A$

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Probabilità soggettiva: prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si veridica, 0 se non si verifica. Non è possibile attribuire una vincita o una perdita certa.

Definizione assiomatica di probabilità

Ω insieme (spazio campione associato ad un esperimento)
2^Ω = insieme delle parti di Ω (nsieme di tutti i sottoinsiemi di Ω)

Definizione ($\sigma - algebra$)

$\eta \subseteq 2^\Omega, \eta \neq \emptyset$, si dice σ-algebra se sono verificate le seguenti proprietà:

1) Se $A \in \eta \to \neg A \in \eta$
2) $A_1, \dots, A_n, \dots$ famiglia numerabile di eventi di η, si ha che $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \eta$

Proprietà $\eta\ \sigma - algebra$

1) $A_1, \dots, A_n, \dots \in \eta$, allora
$$\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \eta$$
$$\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \left(\bigcup_{n=1}^\infty \neg A_n\right) \in \eta$$
2) $\emptyset, \Omega \in \eta: E \in \eta \to \neg E \in \eta$
Per cui $\emptyset = (E \cap \neg E) \in \eta \to \emptyset \in \eta \to \Omega = \emptyset^c \in \eta$

Esempio ($\sigma\_algebra$) $\mathbb{R}$

η = la più piccola $\sigma - algebra$ contenente tutti gli intervalli aperti, cioà gli intervalli $(a,b), a, b \in \mathbb{R}$.
$\eta = \sigma - algebra$ di Borel, i cui elementi vengono chiamati anche insiemi boreliani

Oltre a contenere tutti gli intervalli
$(a,b)\ [a,b]\ (a,+\infty)\ [a,+\infty)$ ...

Contiene anche le intersezioni degli intervalli
$$\bigcup_{n=1}^\infty (a_n, b_n) \qquad a_n < b_n$$
$$\bigcup_{n=1}^\infty \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$x \in \mathbb{R} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)=\{x\}$

Definizione

Ω spazio campione, $\eta\ \sigma - algebra$ di eventi.

Una misura di probabilità su η è una funzione $P: \eta \to \mathbb{R}$ tale che:

1) $P(A) \geq 0, \forall A \in \eta$
2) $P(\Omega)=1$
3) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tali che $A_i \cap A_j=\emptyset\ \ \forall i \neq j$.

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

$A \wedge B=\emptyset, \qquad P(A \vee B)=P(A)+P(B)$

Definizione (Ω, η, P) spazio di probabilità

Esempio

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ con $\eta=2^{\Omega}$

$P=$ misura probabilità classica $=\frac{n_A}{n}$

$(\Omega, 2^{\Omega}, P)=$ spazio di probabilità

Esempio 2 $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \boldsymbol{P})$

$\Omega=\mathbb{R}$, con $\sigma - algebra$ di Borel

$$P(A)=\frac{1}{\pi} \int_A \frac{1}{1+x^2} dx$$

1) $P(A) \geq 0$
2) $P(\mathbb{R})=\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx=\frac{1}{\pi} \lim_{a \to+\infty_{b \to-\infty}} \int_b^a \frac{1}{1+x^2} dx$
$=\frac{1}{\pi} \lim_{a \to+\infty_{b \to-\infty}}(\arctan x)_b^a=\frac{1}{\pi} \lim_{a \to+\infty_{b \to-\infty}}(\arctan a-\arctan b)$
$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1$
3) Discende dalla proprietà additiva dell'integrale
$A \cap B=\emptyset$
$\int_{A\ e\ B} dx=\int_A \frac{1}{1+x^2} dx+\int_b \frac{1}{1+x^2} dx$
$\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$

Proprietà (Ω, η, P) spazio di probabilità:

1) $P(\emptyset)=0$

2) $P(\neg A) = 1 - P(A)\ \big(\Omega = A \cup \neg A; 1 = P(\Omega) = P(A) + P(\neg A)\big)$
3) $A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B) \quad con\ A, b \in \eta$
4) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \eta$
5) $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \vee B)$
   $A = (A \wedge B) \vee (A|B)$
   $B = (A \wedge B) \vee (B|A)$
   $A \vee B = (A \wedge B) \vee (A|B) \vee (B|A)$

$P(A) = P(A \wedge B) + P(A|B)$
$P(B) = P(A \wedge B) + P(B|A)$
$P(A \vee B) = P(A \wedge B) + P(A|B) + P(B|A)$
$P(A) + P(B) = 2\, P(A \wedge B) + P(A|B) + P(B|A)$
$= P(A \wedge B) + \big(P(A \vee B) + P(A \wedge B) + P(A|B) + P(B|A)\big)$
$= P(A \wedge B) + P(A \vee B)$
Per cui $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$

Esempio
Esperimento aleatorio: lancio di due dadi, uno rosso e uno blu.
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} * \{1,2,3,4,5,6\}$
$6 * 6 = 36$

A) Somma pari a 8: $(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$
   $P(A) = \frac{5}{36}$ (probabilità classica)
B) "uscita di un 1 (almeno)"
   $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)$
   $(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)$
   $P(B) = \frac{11}{36}$

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

B = se almeno uno dei dadi verifica l'evento "uscita di 1"
B_1 = uscita di 1 sul dado rosso: $P(B_1) = \frac{1}{6}$
B_2 = uscita di 1 sul dado blu: $P(B_2) = \frac{1}{6}$

$B = B_1 \vee B_2$
$$P(B) = P(B_1 \vee B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \wedge B_2) = \frac{1}{3} - P(B_1 \wedge B_2)$$

$$P(B_1 \wedge B_2) = \frac{1}{36}$$
$$P(B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{12-1}{36} == \frac{11}{36}$$

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{3\}, \qquad B = \{1,3,5\}, \qquad P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(A|B) = \frac{1}{3}$

Probabilità condizionata

$\Omega =$ spazio campione

$(\Omega, \eta, P) =$ spazio di probabilità

$A, B \in \eta$: si dice probabilità di A condizionata a B, la probabilità che si verifichi l'evento A, sapendo che si è verificato l'evento B.

$$P(A|B)\ [probabilità\ di\ A\ dato\ B] = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

Osservazione

Nel caso precedente, $B = \{1,3,5\}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A = \{3\}, \qquad P(A \wedge B) = P(A) = \frac{1}{6}$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Osservazione

Da $\frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$, se $A \wedge B = \emptyset, P(A|B) = 0$;

Se $B \subset A \ \Rightarrow \ P(A \wedge B) = P(B) \ \Rightarrow \ P(A|B) = 1$

Se $A \subset B \ : \ P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$

$P(B) \leq 1$

$P(A|B) \geq P(A)$

Definizione

Diremo che A e B sono **positivamente correlati** se $P(A|B) > P(A)$

Diremo che A e B sono **negativamente correlati** se $P(A|B) < P(A)$

A e B sono **indipendenti** se $P(A|B) = P(A)$

Esempio

Spazio di probabilità classico associato ad un mazzo di carte francesi (senza jolly)

A. ogni carta di colore rosso
B. ogni donna

C. il 7 di cuori
D. il 3 di fiori e il 3 di picche

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \qquad P(C) = \frac{1}{52}, \qquad P(D) = \frac{1}{26}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \wedge A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{13} = P(B)$$

$P(B|A) = P(B) \Rightarrow$ A e B sono indipendenti

$$P(C|A) = \frac{P(C \wedge A)}{P(A)} = \frac{P(C)}{P(A)} >\neq P(C)$$

$C \subset A$, A e C sono positivamente correlati

$$P(D|A) = \frac{P(D \wedge A)}{P(A)} = 0 < P(D)$$

A e D sono negativamente correlati poiché mutuamente esclusivi.

Teorema legge delle probabilità composte

(Ω, η, P) spazio di probabilità, $A, B \in \eta$

$P(A \wedge B) = P(A|B) * P(B) = P(B|A) * P(A)$

In particolare, A e B sono eventi indipendenti se e solo se:

$P(A \wedge B) = P(A) * P(B)$

Se A e B sono indipendenti, $P(A|B) = P(A)$

$P(A \wedge B) = P(A) * P(B)$

Se vale la prima ($P(B|A) * P(A)$), allora

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{P(A) * P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Esercizio (estrazioni ripetute)

Si effettuano due estrazioni consecutive da un'urna contenente 7 biglie rosse e 5 nere. Si calcolino le probabilità degli eventi:

A. estrazione di due biglie rosse (con reintegro)
B. estrazione di due biglie rosse (senza reintegro)
C. estrazione di una biglia rossa e una nera (con reintegro)
D. estrazione di una biglia rossa e una nera (senza reintegro)

Svolgimento

Sia:

R. una biglia rossa (un'unica estrazione)

N. una biglia nera (un'unica estrazione)

$P(R) = \frac{7}{12}, \qquad P(N) = \frac{5}{12}$

R_1 = estrazione di una biglia rossa al primo turno
R_2 = estrazione di una biglia rossa al secondo turno

$A = R_1 \wedge R_2$ con reintegro
$B = R_1 \wedge R_2$ senza reintegro

$P(A) = P(R_1 \wedge R_2) = R_1\ e\ R_2$ sono indipendenti $= P(R_1) * P(R_2) = P(R)^2 = \frac{49}{144}$
$P(B) = P(R_1 \wedge R_2) =$ legge delle probabilità composte$= P(R_1) * P(R_2|R_1) = \frac{7}{12} * P(R_2|R_1)$

$6\ R, 5\ N = 11\ totale$
$P(R_2|R_1) = \frac{6}{11}$
$P(B) = \frac{7}{12} * \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$

Ora consideriamo
N_1 = estrazione di una biglia nera al primo turno
N_2 = estrazione di una biglia nera al secondo turno

$C = (R_1 \wedge N_2) \vee (N_1 \wedge R_2)$ con reintegro
$D = (R_1 \wedge N_2) \vee (N_1 \wedge R_2)$ senza reintegro

$P(C) = P(R_1 \wedge N_2) + P(N_1 \wedge R_2) = 2P(R_1 \wedge N_2)$
$P(R_1 \wedge N_2) = P(R_1) * P(N_2) = \frac{7}{12} * \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$
dove R_1 e N_2 sono indipendenti
$P(C) = 2 * \frac{35}{144} = \frac{35}{72}$
$P(D) = 2P(R_1 \wedge N_2)$
$P(R_1 \wedge N_2) =$ legge della probabilitò composta $= P(R_1) * P(N_2|R_1) = P(R) * P(N_2|R_1)$
$P(N_2|R_1) = \frac{5}{11}$
$P(D) = 2\ P(R) * P(N_2|R_1) = 2 * \frac{7}{12} * \frac{5}{11} = \frac{7}{6} * \frac{5}{11} = \frac{35}{66}$

Teorema di Bayes

(Ω, η, P) spazio di probabilità
$A_1, A_2, \dots, A_n, \qquad E \in \eta$

Supponiamo che:
1) gli eventi $A_1, \dots, A_n$ siano mutuamente esclusivi $\left(A_i \wedge A_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j\right)$
2) E evento possibile, ossia $P(E) > 0$
3) E implichi almeno uno degli eventi $A_1, \dots, A_n$ (quindi $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$)

Allora
$\forall k = 1, \dots, n$
$$P(A_k|E) = \frac{P(E|A_k) * P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|A_i) * P(A_i)}$$

Dimostrazione
$$P(A_k|E) = \frac{P(A_k \wedge E)}{P(E)}$$
$$P(E|A_k) = \frac{P(A_k \wedge E)}{P(A_k)} \;\Rightarrow\; P(A_k \wedge E) = P(E|A_k) * P(A_k)$$

Da $\frac{P(A_k \wedge E)}{P(E)}$ ricaviamo che:
$$P(A_k|E) = \frac{P(E|A_k) * P(A_k)}{P(E)}$$

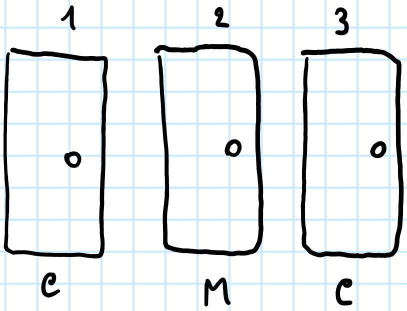
$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} (E \wedge A_i) \; [mutuamente\ esclusivi] \Rightarrow$$
$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \wedge A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E|A_i) * P(A_i)$$

Sostituendo in $\frac{P(E|A_k) * P(A_k)}{P(E)}$, si ha:
$$P(A_k|E) = \frac{P(E|A_k) * P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(E|A_j\right) * P(A_i)}$$

Esercizio (diagnosi medica)
Diciamo che E sia l'insieme dei sintomi manifestati dal malato, mentre $A_1, \dots, A_n$ la famiglia di malattie.

$P(A_k|E)$
$P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$
$P(E|A_k)$ = frazioni dei malati di A_i che hanno manifestato i sintomi E.

Paradosso di Monty Hall



Chiamiamo l'evento che la macchina si trovi dietro a una certa porta rispettivamente con A_1, A_2, A_3.

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Porta numero 1 (scelta del concorrente)

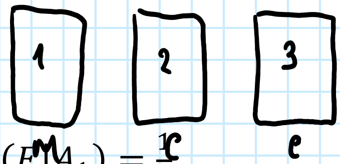
E. "Il presentatore apre la porta 3"

$$P(E) = \frac{1}{2}$$

Utilizziamo Bayes per calcolare a posteriori le probabilità degli eventi A_1, A_2, A_3

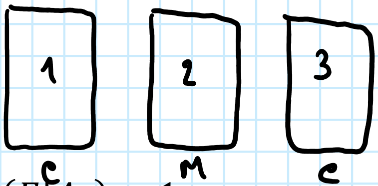
$P(A_1|E), \quad P(A_2|E), \quad P(A_3|E)$

- Se la macchina sta dietro la porta 1



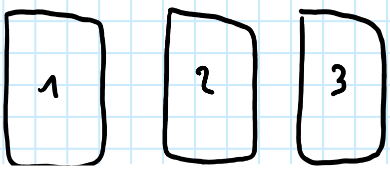
$P(E|A_1) = \frac{1}{2}$

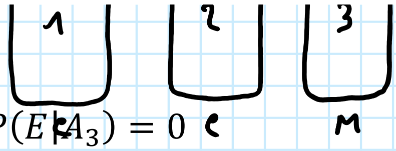
- Se la macchina sta dietro la porta 2



$P(E|A_2) = 1$

- Se la macchina sta dietro la porta 3





$P(E|A_3) = 0$

$$\sum_{i=1}^{3} P(E|A_i) * P(A_i) = P(E|A_1) * P(A_1) + P(E|A_2) * P(A_2) + P(E|A_3) * P(A_3)$$
$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3} = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = P(E)$$

$$P(A_1|E) = \frac{P(E|A_1) * P(A_1)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2|E) = \frac{P(E|A_2) * P(A_2)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_3|E) = \frac{P(E|A_3) * P(A_3)}{P(E)} = 0, \qquad poiché\ E = 0$$