

NUMERI REALI

Postulato: Esiste $\mathbb{R} \neq \emptyset$, (insieme dei numeri reali) che soddisfa gli assiomi seguenti:

(A1) Sull'insieme \mathbb{R} sono definite due operazioni

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

(SOMMA)

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow xy$$

(PRODOTTO)

che godono delle proprietà seguenti:

$$(1) \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x (y z) = (x y) z$$

} $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
(prop. ASSOCIATIVA)

$$(2) \quad \text{esiste } 0 \in \mathbb{R} \mid x + 0 = 0 + x = x$$

$$\text{esiste } 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0 \mid x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

} $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(esistenza dell'elemento neutro)

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ esiste un UNICO } y \in \mathbb{R} \mid x + y = y + x = 0;$$

tale y si chiama **OPPOSTO** di x , e si indica con $-x$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \text{ esiste un UNICO } z \in \mathbb{R} \mid xz = zx = 1;$$

tale z si chiama **INVERSO** di x , e si indica con $x^{-1}, \frac{1}{x}$.

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} x + y = y + x \\ xy = yx \end{array} \right\} \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (prop. COMMUTATIVA)}$$

$$(5) \quad x(y + z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \text{ (prop. DISTRIBUTIVA)}$$

NOTAZIONE: Dati $x, y \in \mathbb{R}$, si pone

$$\left. \begin{array}{l} (i) \quad x - y = x + (-y) \\ (ii) \quad \frac{x}{y} = x y^{-1} \quad (\text{se } y \neq 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{opposto di } y \\ \text{inverso di } y \end{array}$$

Oss (!) Tutte le "usuali" regole dell'Algebra Elementare seguono dalle prop. (1) - (5) delle operazioni:

- $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$
- $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } y = 0;$
- $x + z = y + z \Leftrightarrow x = y;$
- se $z \neq 0$, $xz = yz \Leftrightarrow x = y;$
- $-(-x) = x;$
- $-(x + y) = -x - y;$

(A2) Sull'insieme \mathbb{R} è definita una relazione d'ordine \leq , che gode delle seguenti proprietà:

(1) $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (prop. RIFLESSIVA)

(2) $x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y$ (prop. ANTI-SIMMETRICA)

(3) $x \leq y \text{ e } y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (prop. TRANSITIVA)

(4) $\left. \begin{array}{l} x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \\ x \leq y \text{ e } z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(COMPATIBILITÀ di} \\ \leq \text{ con } + \text{ e } \cdot \text{)} \end{array}$

(5) dati $x, y \in \mathbb{R}$, o $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (prop. BUON ORDINAMENTO)

Oss (!) Tutte le "osodi" regole di segno seguono delle prop. (1) - (5) della relazione \leq :

- $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$;
- $x > 0$ ($x \geq 0$ e $x \neq 0$) $\Leftrightarrow x^{-1} > 0$;
- $x^2 (= x \cdot x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $1 > 0$

(A3) - ASSIOMA DI COMPLETEZZA:

Dati due insiemi $A, B \in \mathbb{R} \mid a \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$, esiste $c \in \mathbb{R}$ (elemento separatore) $\mid a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$.

Es (!) Consideriamo gli insiemi

$$A = \{a \geq 0; a^2 \leq 2\}, \quad B = \{b \geq 0; b^2 \geq 2\}$$

Si può dimostrare che $a \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$; dunque, per

l'Assioma di Completezza esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$$

In questo caso, c è UNICO e $c^2 = 2$ ($\Rightarrow c = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$)

ESTREMI DI UN SOTTOINSIEME di \mathbb{R}

NOTAZIONE: Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, si pone:

$$\bullet (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\};$$

$$\bullet (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$\bullet (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\};$$

$$\bullet [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$\bullet [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\};$$

$$\bullet (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$\bullet [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\};$$

$$\bullet (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

Tali insiemi si chiamano **INTERVALLI** (di \mathbb{R}).

Def (MAGGIORANTE / MINORANTE): Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{R}$

Diciamo che m è un **MAGGIORANTE** (**MINORANTE**) di A se

$$m \geq a \quad (m \leq a) \quad \forall a \in A$$

Def. (INSIEME SUP/INF. LIMITATO): Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che A

è **SUPERIORMENTE** (**INFERIORMENTE**) **LIMITATO** se esiste (almeno)

un **MAGGIORANTE** (**MINORANTE**) di A

Diciamo poi che A è **LIMITATO** se è **sup. e inf. LIMITATO**.

Es (!) Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, gli intervalli

$$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b]$$

sono tutti **LIMITATI**: infatti, in tutti i casi $m = a$ è un **MINOR.**,

mentre $m = b$ è un **MAGGIOR.** Al contrario, gli intervalli

$$(a, +\infty), \quad [a, +\infty)$$

sono INF. LIMITATI ($m=a$ è un MINOR.), ma non SUP. LIMITATI;

Analogamente, gli intervalli:

$$(-\infty, b), \quad (-\infty, b]$$

sono SUP. LIMITATI ($m=b$ è un MAGGIOR.), ma non inf. LIMITATI.

Def (MASSIMO/MINIMO): Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{R}$. Diciamo che

m è un MASSIMO (MINIMO) di A se:

(1) $m \geq a$ ($m \leq a$) $\forall a \in A$, cioè m è un MAGGIOR. (MINOR.) di A ;

(2) $m \in A$

Oss (!) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ ammette un massimo (minimo), esso è UNICO, e si indica con $\max(A)$ ($\min(A)$).

× ESEMPI:

(1) Se $A = [0, 1]$, allora $\exists \max(A) = 1$, $\min(A) = 0$;

(2) Se $A = [0, 1)$, allora $\exists \min(A) = 0$ MA $\nexists \max(A)$!

(cioè non esistono maggioranti di A in A)!

Def (ESTREMO SUP/INF.): Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme SUP. (INF.)

LIMITATO, e sia

$$A^+ = \{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ è un MAGGIOR. di } A\} \neq \emptyset$$

$$(A^- = \{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ è un MINOR. di } A\})$$

Se A^+ HA MINIMO (A^- HA MASSIMO), tale minimo (massimo)

si chiama ESTREMO SUPERIORE (INFERIORE) di A , e si indica

$$\sup(A), \quad (\inf(A)).$$

Oss (!) Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme sup. (inf.) LIMITATO, e sia

$m \in \mathbb{R}$. Dire che $m = \text{sup}(A)$ ($\text{inf}(A)$) significa che:

- (1) m è un MAGGIOR. (MINOR.) di A , cioè $m \geq (\leq) a \forall a \in A$;
- (2) m è il PIÙ PICCOLO dei MAGGIOR. (il PIÙ GRANDE dei MINOR.) di A , cioè se $m' \in \mathbb{R}$, $m' < m$ ($m' > m$) esiste $a \in A$ tale che $m' < a \leq m$ ($m \leq a < m'$), cioè m' non è un MAGGIOR. (MINOR.) di A .

Es.: Se $A = [0, 1)$, si può dimostrare che $\exists \text{sup}(A) = 1$: in effetti risulta $A^+ = [1, +\infty)$, e $\min(A^+) = \text{sup}(A) = 1$

Teor (di completezza): Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme sup. (inf.) LIMITATO. Allora esiste l'estremo superiore (inferiore) di A .

Oss (!) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme sup. (inf.) LIMITATO, e sia

$m = \text{sup}(A)$ ($= \text{inf}(A)$) la cui esistenza segue dal Teorema di Completezza; allora A ha massimo (minimo) \Leftrightarrow

$$\text{sup}(A) \in A \quad (\text{inf}(A) \in A)$$

In tal caso, $\max(A) = \text{sup}(A)$ ($\min(A) = \text{inf}(A)$).

Def (VALORE ASSOLUTO): Dato $x \in \mathbb{R}$, si pone

$$|x| = \max \{x, -x\} = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (\text{VALORE ASSOLUTO})$$

Teor (PROPRIETÀ di 1.1): Valgono le seguenti proprietà:

(1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $|xy| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(3) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
" " "
" " "

(4) dato $r > 0$, $|x| < r \Leftrightarrow x \in (-r, r)$.

SOTTOINSIEMI "NOTTEVOLI" di \mathbb{R}

Def (Insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$): Definiamo

• $\mathbb{N} = \{1, 2=1+1, 3=2+1, \dots\}$ (numeri NATURALI);

• $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (numeri INTERI);

• $\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ (numeri RAZIONALI).
 \downarrow
 pq^{-1}

Teor (prop. di $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$): Valgono le seguenti proprietà:

(1) $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, cioè esistono numeri interi non NATURALI (es: $x = -1$), numeri razionali non INTERI (es: $x = \frac{1}{2}$), numeri reali non RAZIONALI (es: $x = \sqrt{2}$);

(2) Se $A \subseteq \mathbb{Z}$ sup. (inf.) limitato, allora $\exists \max(A)$ ($\min(A)$);

(3) (Prop. ARCHIMEDEA di \mathbb{R}): Dati $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$

(4) (DENSITÀ di \mathbb{Q} in \mathbb{R}): Dati $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $x < r < y$.

Alcune conseguenze

(1) \mathbb{N} non è sup-lim. Infatti, scelto un qualsiasi $y > 0$, per la prop. ARCHIMEDEA (con $x=1$) $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che
$$n = n \cdot 1 > y,$$

e dunque y non è un maggior. di \mathbb{N}

(2) $\exists \min(\mathbb{N}) = 1$. Infatti, perché $1 > 0$ si ha
$$\begin{aligned} \cdot 2 &= 1+1 > 1; \\ \cdot 3 &= 2+1 > 2; \\ &\vdots \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \cdot 2 \\ \cdot 3 \\ \vdots \end{aligned}} \right\} \Rightarrow n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ (1 è minor. di } \mathbb{N});$$

d'altra parte, $1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \min(\mathbb{N}) = 1$

(3) L'insieme \mathbb{Z} non è né sup-lim. ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$) né inf-lim.
(poiché $\{-n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}$ e non è inf-lim.

(4) Sia $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Perché $\exists \min(\mathbb{N}) = 1$, A è inf-lim.
($a \geq 1 \quad \forall a \in A \subseteq \mathbb{N}$), allora, poiché $A \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, dal
teor. precedente (punto (2)) segue che $\exists \min(A)$

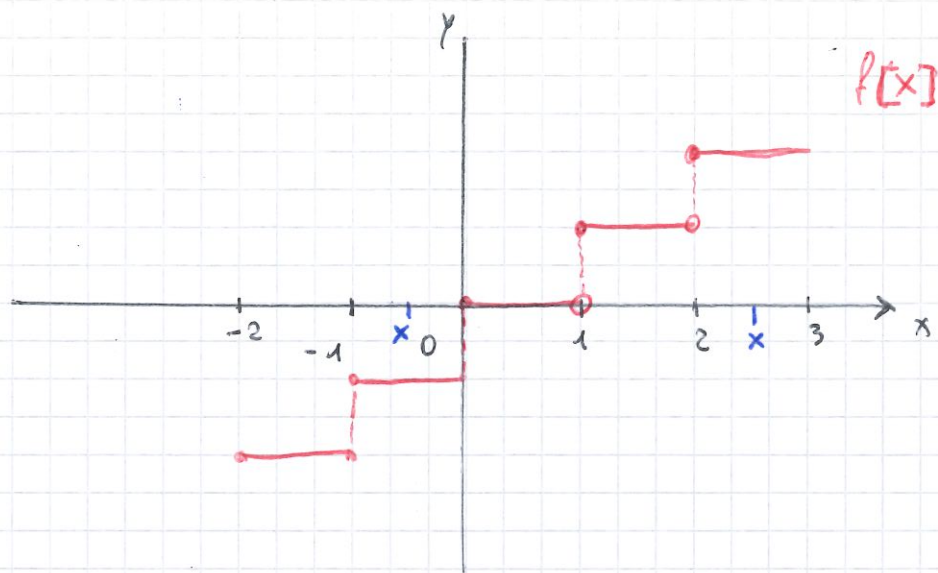
Es. (PARTE INTEGRA): Sia $x \in \mathbb{R}$ fissato, e sia

$$A_x = \{p \in \mathbb{Z}; p \leq x\} \subseteq \mathbb{Z}$$

Perché \mathbb{Z} non è inf-lim., $A_x \neq \emptyset$, (x non è minor. di \mathbb{Z}),
inoltre A_x è sup-lim. (x è un maggior. di A_x). Allora, per il
teorema precedente (punto (2)) $\exists \max(A_x)$. Si pone

$$[x] = \max(A_x) \quad (\text{PARTE INTEGRA di } x)$$

Si noti che $[x] \in \mathbb{Z}$ è l'unico intero tale che $[x] \leq x < [x] + 1$
$$\underbrace{[x] \leq x}_{[x] \in A_x}$$



Oss (!) : Si può dimostrare che $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ verifica gli assiomi

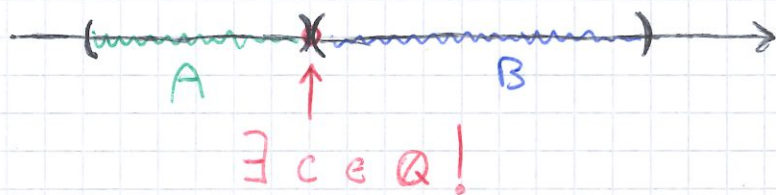
(A1) e (A2) visti all'inizio; Tuttavia non verifica l'Assioma (A3)!

In fatti, se consideriamo gli insiemi

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\}, \quad B = \{b \in \mathbb{Q} : b^2 \geq 2\}.$$

allora $a \leq b \forall a \in A, b \in B$ ma $\nexists c \in \mathbb{Q}$ tale che $a \leq c \leq b$

$\forall a \in A, b \in B$ (se esistesse si avrebbe $c^2 = 2$, ma non esiste alcun numero razionale con questa proprietà)!

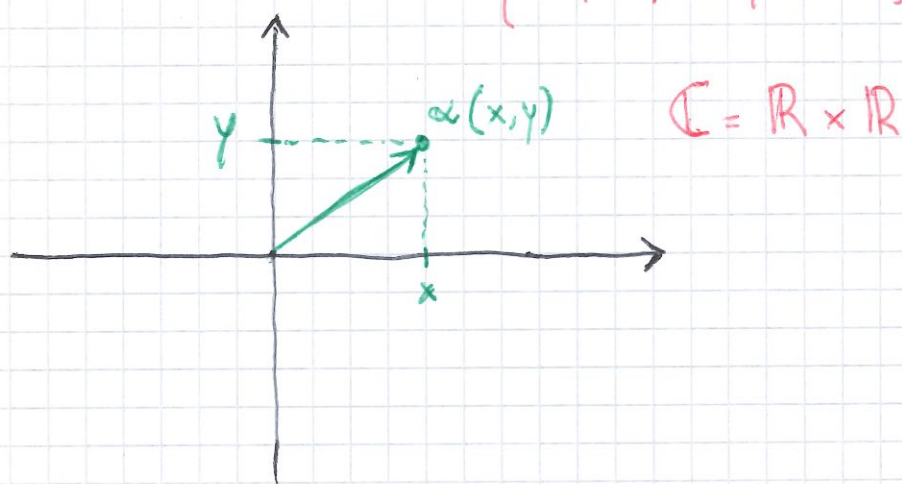


NUMERI COMPLESSI

Problema: Esistono polinomi a coeff. reali (in \mathbb{R}) che **NON** **HANNO ZERI** (o **RADICI**), ad es. $p(x) = x^2 + 1$ ($\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)!
Cerchiamo quindi di "allargare" \mathbb{R} in modo che ogni polinomio abbia (almeno) una radice, e mantenendo almeno l'**Assioma (A1)**

Costruzione di \mathbb{C} . Definiamo l'insieme dei numeri complessi, che denoteremo con \mathbb{C} , nel modo seguente:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$



Su \mathbb{C} def. poi due operazioni:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$

[(1) - SOMMA]

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \cdot (x_1, y_1) = (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1y)$$

[(2) - PRODOTTO]

Teor. (Struttura Algebrica di \mathbb{C}): $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ verifica **TUTTE** le proprietà

(1) - (5) nell' **Assioma (A1)**. Più precisamente:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \alpha + (\beta + \gamma) &= (\alpha + \beta) + \gamma \\ \alpha \cdot (\beta \gamma) &= (\alpha \beta) \cdot \gamma \end{aligned} \right\} \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

$$(2) \left. \begin{aligned} (0,0) + \alpha &= \alpha + (0,0) = \alpha \\ (1,0) \cdot \alpha &= \alpha \cdot (1,0) = \alpha \end{aligned} \right\} \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

$$(3) \text{ per ogni } \alpha = (x,y) \in \mathbb{C}, \text{ si ha } \alpha + (-x,-y) = (-x,-y) + \alpha = (0,0)$$

$$\text{per ogni } \alpha = (x,y) \neq (0,0), \text{ si ha } \alpha \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right) \cdot \alpha = (1,0)$$

$$(4) \left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= \beta + \alpha \\ \alpha \beta &= \beta \alpha \end{aligned} \right\} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$(5) \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

Oss (!): Sembra più "naturale" def. il prodotto in \mathbb{C} come

$$(x,y) \cdot (x_1,y_1) = (xx_1, yy_1)$$

Tale prodotto è ancora associativo, commutativo ed ha come elemento neutro $e = (1,1)$, cioè:

$$\alpha \cdot (1,1) = (1,1) \cdot \alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

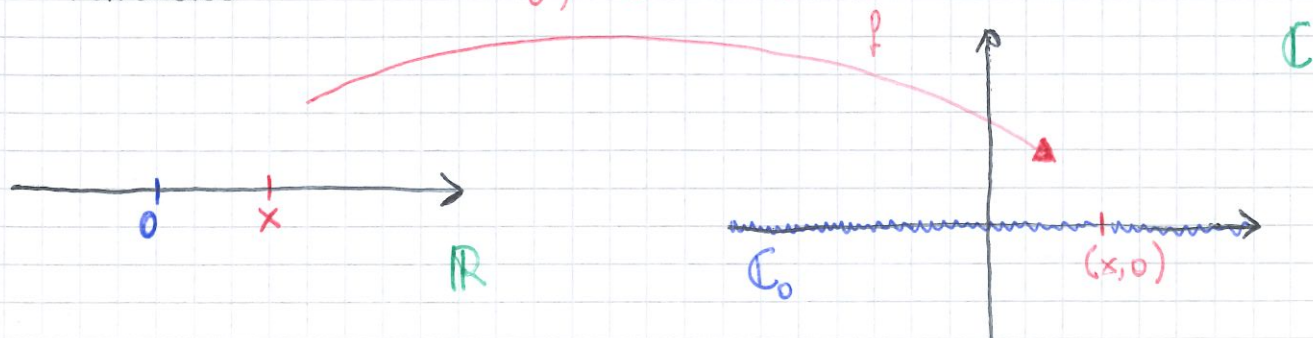
Tuttavia, esistono $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq (0,0)$ privi di inverso rispetto a \cdot ;

ad esempio, se $\alpha = (1,0)$ ~~non~~ $\exists \beta \in \mathbb{C}$ tale che $\alpha\beta = \beta\alpha = (1,1)$!

\mathbb{R} come sottoinsieme di \mathbb{C} . Consideriamo l'insieme

$$\mathbb{C}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{C} \mid y=0\} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

e la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_0, f(x) = (x,0)$



È facile vedere che f è INIETTIVA ($f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$) e
 SURIETTIVA ($\forall \alpha \in \mathbb{C}_0 \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \alpha$), dunque **BIIUNIVOCA**,
 possiamo allora IDENTIFICARE \mathbb{R} e \mathbb{C}_0 COME INSIEMI.
 Inoltre, si ha:

$$\begin{array}{lcl}
 \cdot f(x+y) = f(x) + f(y) & \begin{array}{c} (x,y) \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R} (x+y) \\ \downarrow f \quad \downarrow f \quad \xrightarrow{=} \quad \uparrow f \end{array} \\
 \uparrow \mathbb{R} \qquad \qquad \uparrow \mathbb{C} \\
 \cdot f(xy) = f(x) \cdot f(y) & \begin{array}{c} \mathbb{C}_0 \times \mathbb{C}_0 \xrightarrow{+/-} \mathbb{C}_0 \\ (x,0), (y,0) \quad (x,0) +/- (y,0) \end{array} \\
 \uparrow \mathbb{R} \qquad \qquad \uparrow \mathbb{C}
 \end{array}$$

In altri Termini, sommare/moltiplicare due num. reali x, y in \mathbb{R}
 o in \mathbb{C} (identificandoli coi numeri complessi $(x,0), (y,0)$) è LA
 STESSA COSA; possiamo allora identificare "prettamente"

$$\mathbb{R} = \mathbb{C}_0 \subseteq \mathbb{C} \quad (*)$$

FORMA ALGEBRAICA dei NUM. COMPLESSI. Usando l'identificazione (*)
 e posto $i = (0,1) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ($y=1 \neq 0$), per ogni $\alpha = (x,y) \in \mathbb{C}$
 possiamo scrivere l'uguaglianza seguente:

$$\alpha = (x,y) = (x,0) + (0,y) = \underbrace{(x,0)}_x + \underbrace{(y,0)}_y \cdot \underbrace{(0,1)}_i = x + yi$$

Questa si chiama **FORMA ALGEBRAICA** di α , i num. REALI x, y si
 chiamano **parte REALE** di α ($\text{Re}(\alpha)$), **parte IMMAGINARIA** di α .

Oss (!) Per def. di prodotto in \mathbb{C} , si ha

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1 \in \mathbb{R}, \quad (.)$$

dunque, $\alpha = i$ è una radice di $p(x) = x^2 + 1$! Usando (.) e
 l'identificazione (*) e la "buona" struttura algebrica di \mathbb{C} ,
 è possibile operare coi num. complessi in **forma algebrica** con

le "usuali" regole dell'algebra; ad esempio, posto

$$(1) \alpha - \beta = \alpha + (-\beta) \quad (\text{se } \beta = x + yi, -\beta = -x - yi)$$

$$(2) \alpha \beta^{-1} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{se } \beta = x + yi \neq 0, \beta^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i)$$

abbiamo:

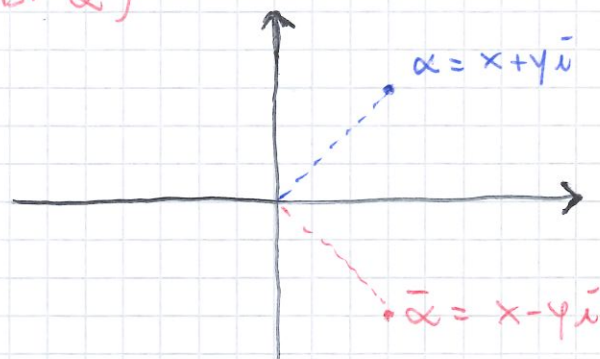
$$\frac{(1+i)(1-2i)}{1-i} = (1+i)(1-2i)(1-i)^{-1} = (1-2i+i-2i^2)(1-i)^{-1}$$

$$= (3-i) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i^2 = 2 + i.$$

Def. (CONIUGATO): Dato $\alpha = x + yi \in \mathbb{C}$, si pone

$$\bar{\alpha} = x - yi \in \mathbb{C} \quad (\text{CONIUGATO DI } \alpha)$$

Teor. PROPRIETÀ DEL CONIUGATO:



Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha

$$(1) \overline{(\alpha + \beta)} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$$

$$(2) \overline{(\alpha \beta)} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$$

$$(4) \bar{\alpha} = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(3) \overline{(\bar{\alpha})} = \alpha$$

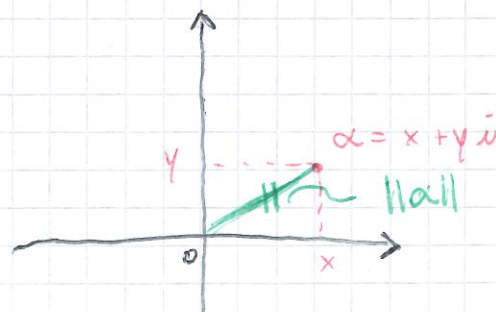
$$(5) \bar{\alpha} \cdot \alpha = x^2 + y^2 \geq 0 \quad (\text{se } \alpha = x + yi)$$

Def. (NORMA/MODULO). Dato $\alpha = x + yi \in \mathbb{C}$, si pone

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha}} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad (\text{NORMA DI } \alpha)$$

Oss. Poiché $\alpha \cdot \bar{\alpha} = x^2 + y^2 \geq 0$, la def. di norma di α è ben posta (cioè $\exists \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ in \mathbb{R}); inoltre, $\|\alpha\|$ rappresenta la distanza del punto $\alpha = (x, y)$ da $0 (= (0, 0))$.

Teor. (Proprietà della norma):



Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha:

$$(1) \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

$$(2) \|\alpha\beta\| = \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$$

$$(3) \|\alpha\| \geq 0 \text{ e } \|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

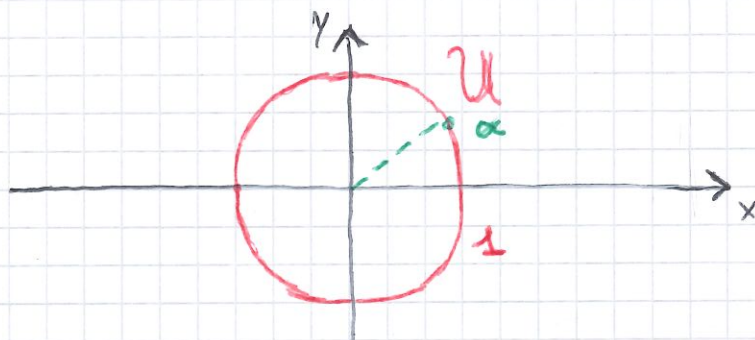
$$(4) \|\alpha^{-1}\| = (\|\alpha\|)^{-1}$$

$$(5) \|\alpha\| = |\alpha| \text{ se } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(6) \alpha^{-1} = \bar{\alpha} / \|\alpha\|^2, \text{ se } \alpha \neq 0$$

NOTAZIONE: Indichiamo con \mathcal{U} l'insieme

$$\mathcal{U} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \|\alpha\| = 1\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C}$$



Osserviamo che $\alpha^{-1} = \|\alpha\| \forall \alpha \in \mathcal{U}$, inoltre, dato un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, allora $w = \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \in \mathcal{U}$

$$(\|w\| = \frac{\|\alpha\|}{\|\alpha\|} = 1) !$$

FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, e sia

$$w = \alpha / \|\alpha\| \in \mathcal{U}. \text{ Poich\'e } w \in \mathcal{U}, \text{ esiste un UNICO } t \in [0, 2\pi)$$

$$\text{Tale che: } w = \frac{\alpha}{\|\alpha\|} = \cos(t) + \sin(t)i \quad (*)$$

Tale "t" si chiama ARGOMENTO di α , e si indica con $\text{Arg}(\alpha)$.

Tenuto conto di (*), possiamo allora scrivere

$$\alpha = \|\alpha\| \cdot \underbrace{\alpha / \|\alpha\|}_w = \|\alpha\| (\cos(t) + \sin(t)i)$$

Questa si chiama FORMA TRIGONOMETRICA di α

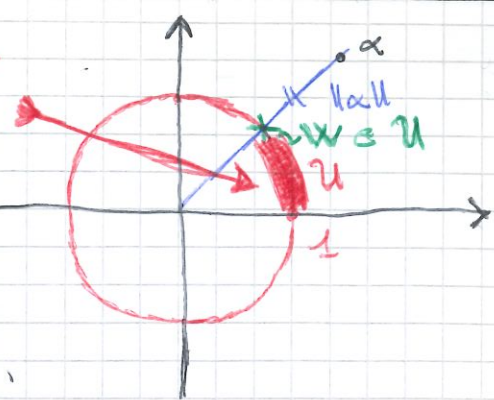
Oss. Dato $\alpha = x + yi \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, $\text{Arg}(\alpha) = t$

il numero $t = \text{Arg}(\alpha)$ è l'unico num. nell'intervallo $[0, 2\pi)$ tale che:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} i = \cos(t) + \sin(t) i$$

$$w = \alpha / \|\alpha\|$$

$$\begin{cases} \cos(t) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin(t) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$



Es. Scriviamo in forma trigonometrica il num. complesso

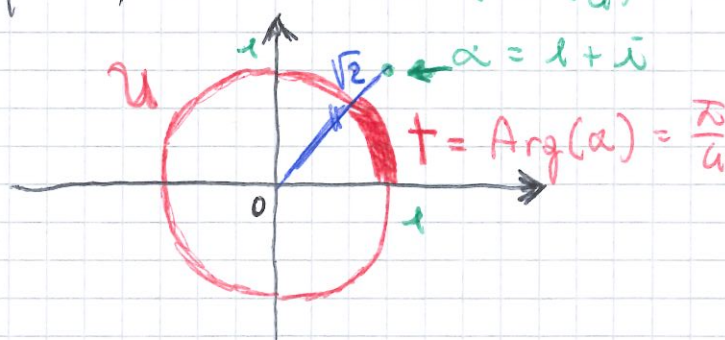
$$\alpha = 1 + i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Anzitutto, si ha $\|\alpha\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, inoltre, $t = \text{Arg}(\alpha)$ è

l'unico num. in $[0, 2\pi)$ tale che:

$$\begin{cases} \cos(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow t = \text{Arg}(\alpha) = \frac{\pi}{4}$$

In conclusione, quindi, $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) i \right)$



Teor (FORMULE DI DE MOIVRE): Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \neq 0$. Se

$$\alpha = \|\alpha\| (\cos(t) + \sin(t) i), \quad \beta = \|\beta\| (\cos(s) + \sin(s) i)$$

(con $t = \text{Arg}(\alpha)$, $s = \text{Arg}(\beta) \in [0, 2\pi)$), allora:

$$(1) \alpha\beta = \|\alpha\| \cdot \|\beta\| (\cos(t+s) + \sin(t+s) i)$$

$$(2) \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} \cdot (\cos(t-s) + \operatorname{sen}(t-s) \bar{i})$$

In particolare, per ogni $n \geq 2$ si ha:

$$\alpha^n = \|\alpha\|^n (\cos(nt) + \operatorname{sen}(nt) \bar{i})$$

Oss (!): In generale non è detto che $T+S = \operatorname{Arg}(\alpha\beta)$

($T-S = \operatorname{Arg}(\frac{\alpha}{\beta})$), ciò è vero se e solo se $T+S \in [0, 2\pi]$

($T-S \in [0, 2\pi]$)! .

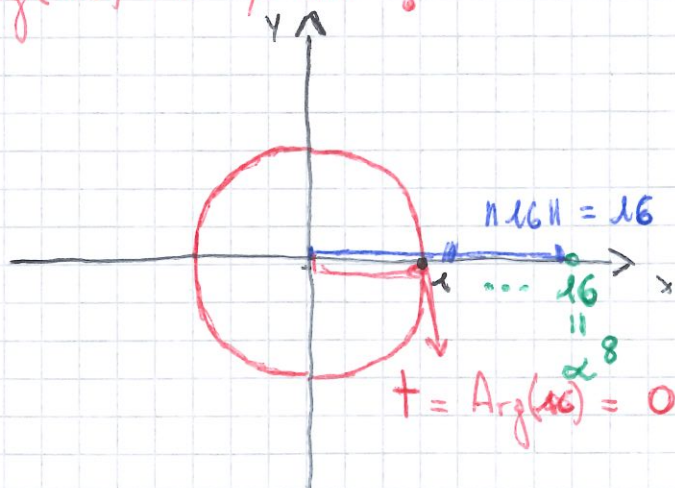
Ad esempio, sappiamo che

$$1 + \bar{i} = \sqrt{2} (\cos(\frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) \bar{i})$$

allora, per le formule di De Moivre si ha

$$\begin{aligned} (1+i)^8 &= [\sqrt{2} (\cos(\frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) \bar{i})]^8 \\ &= (\sqrt{2})^8 \cdot [\cos(8 \cdot \frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen}(8 \cdot \frac{\pi}{4}) \bar{i}] \\ &= 16 [\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi)}_{=0} \bar{i}] = 16 \end{aligned}$$

Tuttavia, $\operatorname{Arg}(16) = 0 \neq 2\pi$!



Notazione: Dati $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, si pone

$$r e^{i\theta} = r (\cos(\theta) + \sin(\theta) i) \in \mathbb{C},$$

Tale notazione è "giustificata" dalle identità seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} (1) e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ (2) (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta} \end{array} \right\} \text{(Formule di De Moivre)}$$

Osserviamo alcune osservazioni:

~~(A)~~ (A) $e^{i\theta} \in \mathcal{U}$ ($\|e^{i\theta}\| = 1$) $\forall \theta \in \mathbb{R}$

(B) in generale, $\text{Arg}(e^{i\theta}) \neq \theta$ (sono uguali $\Leftrightarrow \theta \in [0, 2\pi)$);

(C) dati $r_1, r_2 > 0$ e $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

RADICI n-esime di un Num. Complesso. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$

Dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vogliamo trovare (se esistono) tutti i num. complessi $\beta \in \mathbb{C}$ tale che $\beta^n = \alpha$ (RADICI n-esime di α)

Anzitutto, poiché $\alpha \neq 0$ possiamo scrivere

$$\alpha = \|\alpha\| (\cos(t) + \sin(t)i), \quad (t = \text{Arg}(\alpha) \in [0, 2\pi));$$

d'altra parte, se β è una radice n-esima di α , allora anche $\beta \neq 0$ (se $\beta = 0$, $\beta^n = 0 \neq \alpha$), e dunque

$$\beta = \|\beta\| (\cos(\theta) + \sin(\theta)i), \quad (\theta = \text{Arg}(\beta) \in [0, 2\pi)).$$

Usando queste rappresentazioni, otteniamo

$$\beta^n = \alpha \Leftrightarrow [\|\beta\| (\cos(\theta) + \sin(\theta)i)]^n = [\|\alpha\| (\cos(t) + \sin(t)i)]$$



(usando le formule di De Moivre)

$$\Leftrightarrow \|\beta\|^n (\cos(\theta) + \sin(\theta)i) = \|\alpha\| (\cos(t) + \sin(t)i)$$

$$\Leftrightarrow \|\beta\|^n \cdot e^{i(n\theta)} = \|\alpha\| e^{it}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|\beta\| = \sqrt[n]{\|\alpha\|} \\ n\theta = t + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|\beta\| = \sqrt[n]{\|\alpha\|} \\ \theta = \frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Ora, è "facile" vedere che $\theta = \frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi)$

$\Leftrightarrow k = 0, 1, \dots, n-1$ (ad es., per $k=n$ si trova $\theta = \frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n} > 2\pi$),

In conclusione, quindi, esistono **ESATTAMENTE** n **RADICI** n -esime di α , date da

$$\beta_k = \sqrt[n]{\|\alpha\|} \left(\cos\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)i \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Es. (!): Calcoliamo le 3 radici Terze di $\alpha = 1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Anzitutto, scriviamo $\alpha = 1$ in forma Trigonometrica:

(a) $\|\alpha\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

(b) $t = \text{Arg}(\alpha)$ è l'unico num. in $[0, 2\pi)$ tale che

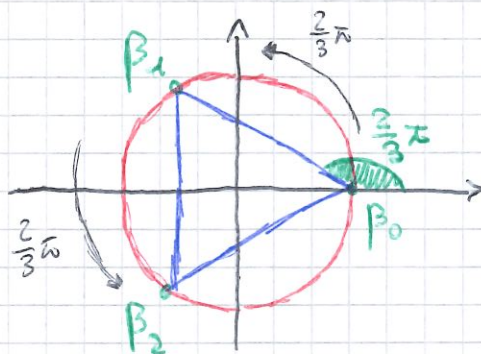
$$\begin{cases} \cos(t) = 1 \\ \sin(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \text{Arg}(\alpha) = 0$$

Dunque: $1 = 1 (\cos(0) + \sin(0)i)$. Le 3 radici Terze di α sono allora date da

$$\beta_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)i \right) \quad (k = 0, 1, 2)$$

Esplícitamente:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1 \cdot (\cos(0) + \sin(0) i) = 1; \\ \beta_1 &= 1 \cdot (\cos(\frac{2}{3}\pi) + \sin(\frac{2}{3}\pi) i) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \\ \beta_2 &= 1 \cdot (\cos(\frac{4}{3}\pi) + \sin(\frac{4}{3}\pi) i) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad (= \overline{\beta_1}) \end{aligned}$$



Alcune osservazioni:

- (1) Perché $p(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, i numeri β_1 e $\beta_2 = \overline{\beta_1}$ sono le due radici di $p_1(x) = x^2+x+1$ (IRRIDUCIBILE in \mathbb{R}).
- (2) Le tre radici $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto in \mathbb{U} , e β_1, β_2 si ottengono da $\beta_0 = 1$ con rotazioni successive di $\frac{2}{3}\pi$. In generale, le n radici n -esime ($n \geq 3$) di $\alpha = 1$ sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in \mathbb{U} , e si ottengono a partire da $\beta_0 = 1$ con rotazioni successive di $\frac{2\pi}{n}$.

TEOR (FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA): Sia $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n$ un polinomio di grado $n \geq 1$ a coeff. complessi ($\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}, \alpha_n \neq 0$). Allora $p(z)$ ha esattamente n radici in \mathbb{C} (contate con molteplicità). In altre parole, l'equazione $p(z) = 0$ ha esattamente n soluzioni in \mathbb{C} (contate con la loro molteplicità).

Oss (!): Il "prezzo da pagare" per avere il Teor. Fondamentale dell'Algebra è l'impossibilità di ordinare \mathbb{C} (assiomi (A2)-(A3)).

Non è possibile definire in \mathbb{C} una "relazione d'ordine" \circ Tale che:

$$\cdot \alpha \circ \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\cdot \alpha \circ \beta \text{ e } \beta \circ \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\cdot \alpha \circ \beta \text{ e } \beta \circ \gamma \Rightarrow \alpha \circ \gamma$$

$$\cdot \alpha \circ \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \circ \beta + \gamma$$

$$\cdot \alpha \circ \beta \text{ e } \gamma \circ \delta \Rightarrow \alpha\gamma \circ \beta\delta$$

$$\cdot \alpha \circ \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \text{ se } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

LIMITI DI FUNZIONI

NOTAZIONE: Poniamo $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$; e conveniamo che $-\infty < a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (in particolare, $-\infty \neq +\infty$). Dato poi $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$ definiamo tre cose:

$$U(x_0) = \begin{cases} \{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : \varepsilon > 0\} & \text{se } x_0 \in \mathbb{R}, \\ \{(M, +\infty) : M \in \mathbb{R}\} & \text{se } x_0 = +\infty, \\ \{(-\infty, M) : M \in \mathbb{R}\} & \text{se } x_0 = -\infty. \end{cases}$$

Gli intervalli in $U(x_0)$ si chiamano **INTERNI** di $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$, e rappresentano i numeri reali "vicini ad x_0 ".

DEF (Punto di Accumulazione): Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$. Diciamo che x_0 è (UN PUNTO) DI ACCUMULAZIONE per A , e scriviamo $x_0 \in D(A)$, se

$$A \cap (V - \{x_0\}) \neq \emptyset \quad \forall V \in U(x_0) \quad (*)$$

Oss (!): La condizione (*) può essere esplicitata a seconda che $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure $x_0 = +\infty/-\infty$. Più precisamente:

(1) se $x_0 \in \mathbb{R}$, $V \in U(x_0) \Leftrightarrow V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, ($\varepsilon > 0$), e dunque

$$(*) \Leftrightarrow A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) - \{x_0\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0.$$

(2) se $x_0 = +\infty$, $V \in U(+\infty) \Leftrightarrow V = (M, +\infty)$, ($M \in \mathbb{R}$), e dunque

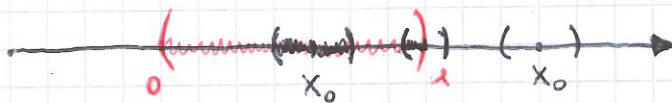
$$(*) \Leftrightarrow A \cap (M, +\infty) \neq \emptyset \quad \forall M \in \mathbb{R}.$$

(3) se $x_0 = -\infty$, $V \in U(-\infty) \Leftrightarrow V = (-\infty, M)$, ($M \in \mathbb{R}$) e dunque

$$(*) \Leftrightarrow A \cap (-\infty, M) \neq \emptyset \quad \forall M \in \mathbb{R}$$

Alcuni Esempi:

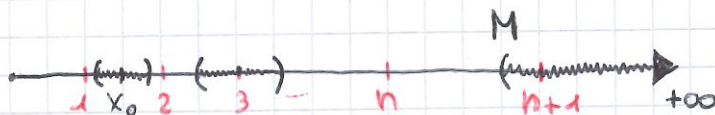
(1) Se $A = (0, 1)$, allora $D(A) = [0, 1]$



(2) Se $A = (0, 1) \cup \{3\}$, allora $D(A)$



(3) Se $A = \mathbb{N}$, allora $D(A) = \{+\infty\}$



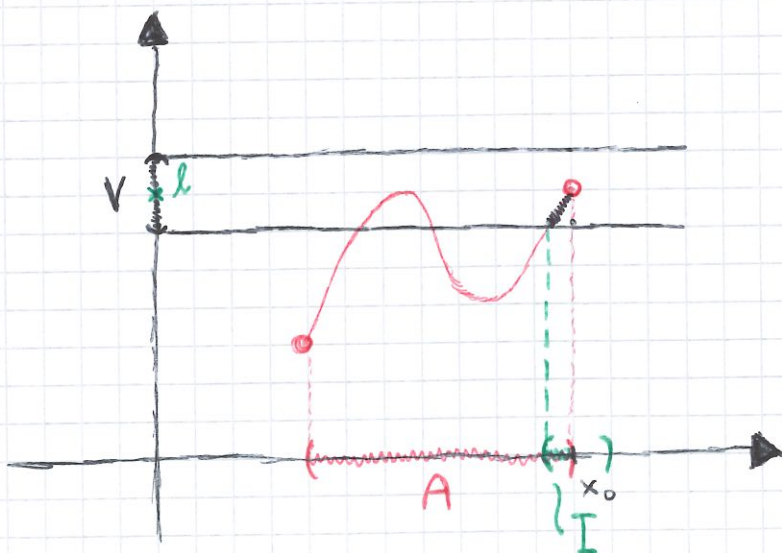
Oss: Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, $+\infty \in D(A)$ ($-\infty \in D(A)$) $\Leftrightarrow A$ non è sup.-lim (inf.-lim)

DEF (Limito): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D(A)$. Sia poi $l \in \hat{\mathbb{R}}$.

Diciamo che f tende ad l per x che tende a x_0 , e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \text{ se}$$

$$\forall V \in \mathcal{U}(l) \exists I \in \mathcal{U}(x_0) \mid f(x) \in V \forall x \in A \cap (I - \{x_0\}) \quad (*).$$



Alcune Osservazioni:

- (1) L'ipotesi " $x_0 \in D(A)$ " assicura che la condizione (*) è "sensata": infatti, $x_0 \in D(A) \Rightarrow A \cap (I - \{x_0\}) \neq \emptyset \quad \forall I \in \mathcal{U}(x_0)$!
- (2) Poiché $x_0 \in D(A)$, può essere che $x_0 \in A$ ($\exists f(x_0)$) o $x_0 \notin A$ ($\nexists f(x_0)$); in ogni caso, poiché (*) deve valere $\forall x \in A \cap (I - \{x_0\}) \neq \emptyset$ il valore $f(x_0)$, (SE ESISTE) NON HA RUOLO!
- (3) A seconda che $x_0/l \in \mathbb{R}$ oppure $x_0/l = \pm\infty$, la condizione (*) si può "esplicitare": ad esempio, se $x_0 = +\infty$ e $l \in \mathbb{R}$, allora

$$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad (\forall V = (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \in \mathcal{U}(l)) \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad (\exists I = (M, +\infty) \in \mathcal{U}(+\infty))$$

Tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ ($f(x) \in V = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$) $\forall x \in A, x > M$
 $(x \in A \cap I = (M, +\infty))$

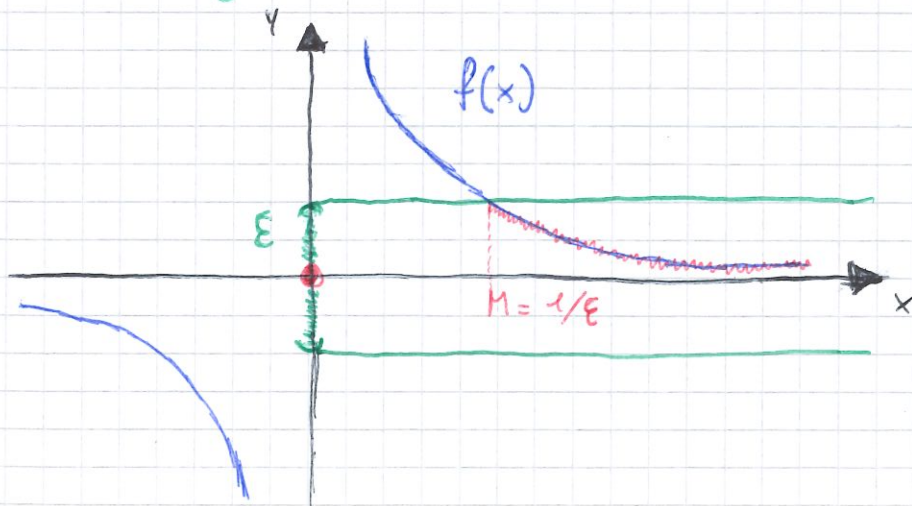
Es: Sia $f: A = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$. Proviamo che

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

A tale scopo, scegliamo un qualsiasi $\varepsilon > 0$ e mostriamo che esiste un opportuno $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - 0| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, x > M$. In effetti:

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{|x|}}_{>0} < \underbrace{\varepsilon}_{>0} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \text{ opp. } x > \frac{1}{\varepsilon};$$

dunque, posto $M = \frac{1}{\varepsilon}$, otteniamo $|f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, x > M$



TEORE (UNICITÀ del LIMITE): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(f)$. SE f ha limite per $x \rightarrow x_0$, allora tale limite è UNICO (in $\hat{\mathbb{R}}$).

DIMOSTRAZIONE (CASO $l \in \mathbb{R}$):

Supponiamo PER ASSURDO che esistano $l_1 \neq l_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$. Dalla def. di limite con

$$\varepsilon = \frac{1}{4} |l_1 - l_2| > 0 \quad (V = (l - \varepsilon, l + \varepsilon))$$

segue che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists I_1 \in \mathcal{U}(x_0) \text{ tale che } |f(x) - l_1| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (I_1 - \{0\});$$

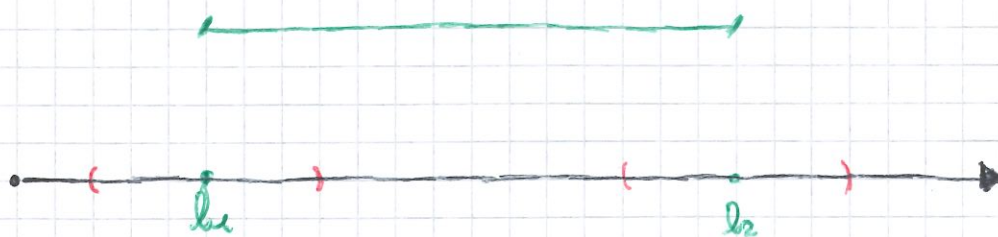
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow \exists I_2 \in \mathcal{U}(x_0) \text{ tale che } |f(x) - l_2| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (I_2 - \{0\});$$

Allora, posto $I = I_1 \cap I_2 \in \mathcal{U}(x_0)$, per ogni $x \in A \cap (I - \{0\}) \neq \emptyset$ si ha:

$$0 < |l_1 - l_2| = |(f(x) - l_1) - (f(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{1}{2} |l_1 - l_2|,$$

ma questo è ASSURDO ($|l_1 - l_2| > 0$).

#



CRITERI GENERALI per l'esistenza del limite

(1) LIMITE DESTRO/SINISTRO. Dati $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, poniamo

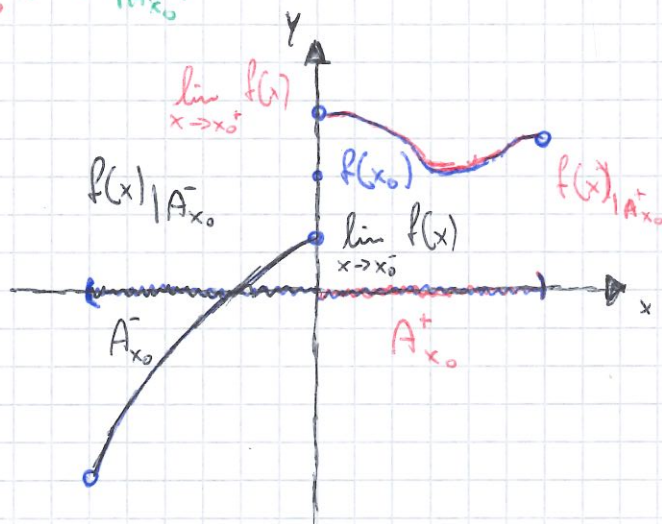
$$A_{x_0}^+ = A \cap (x_0, +\infty), \quad A_{x_0}^- = A \cap (-\infty, x_0).$$

• DEF (Limite DESTRO/SINISTRO): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A_{x_0}^+)$ ($D(A_{x_0}^-)$)

Dato $l \in \hat{\mathbb{R}}$, diciamo che f TONDE ad l PER x CHE TONDE a x_0 DA DESTRA (DA SINISTRA), e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$) = l se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Big|_{A_{x_0}^+} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Big|_{A_{x_0}^-} \right) = l.$$

dove $f(x) \Big|_{A_{x_0}^+}$ ($f(x) \Big|_{A_{x_0}^-}$) è la restrizione di f ad $A_{x_0}^+$ ($A_{x_0}^-$)



TEOR (!): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che ESISTA $\delta > 0$ Tale che:

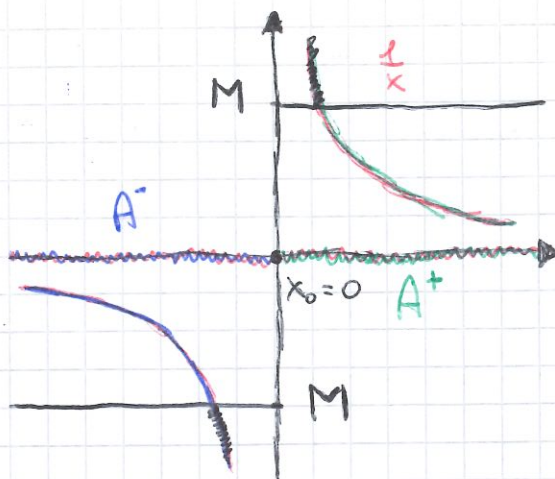
$$I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \subseteq A \quad (\Rightarrow x_0 \in D(A_{x_0}^+) \cap D(A_{x_0}^-)). \text{ Allora:}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \hat{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

Es (!): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Direttamente dalla def. di limite (e poiché $\frac{1}{x}$ cambia segno in $x_0 = 0$) si vede che

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty;$$

dunque, poiché $-\infty \neq +\infty$, $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.



(2) TEOREMI DEL CONFRONTO:

• Teor (del confronto al finito): Siano $f, g, h: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$.
Supponiamo valgano le ipotesi seguenti:

$$(1) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$(2) \exists I_0 \in \mathcal{U}(x_0) \text{ tale che } g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A \cap I - \{x_0\}$$

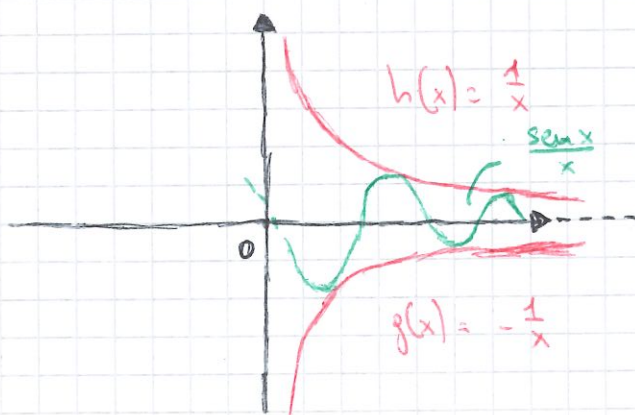
Allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Es.: Sia $f: A = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Proviamo che $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

In effetti, poiché $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{g(x)} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{h(x)} \quad \forall x > 0 \quad (\forall x \in I_0 = (0, +\infty) \in \mathcal{U}(+\infty))$$

dunque, poiché $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ allora $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$



• Teor (del confronto all'infinito): Siano $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$.
Supponiamo valgano le ipotesi seguenti:

(1) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ } (-\infty)$;

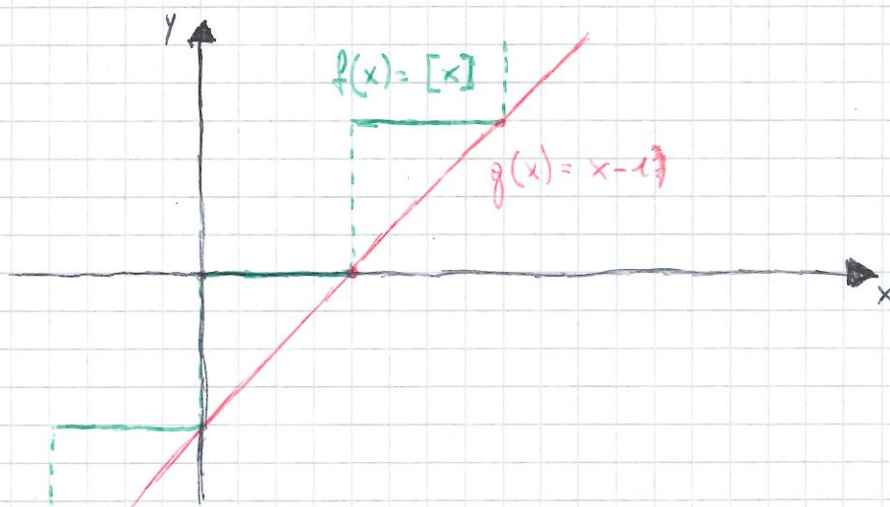
(2) $\exists I_0 \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $f(x) \geq g(x)$ ($f(x) \leq g(x)$) $\forall x \in A \cap I_0 - \{x_0\}$.

Allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ } (-\infty)$.

Ese.: Sia $f: A = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$. Proviamo che $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$.
In effetti, poiché (per def.) $[x] \leq x < [x] + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$[x] > \underbrace{x-1}_{g(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

Allora, poiché $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$, concludiamo che $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$.



(3) LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE:

• Def (FUNZIONE MONOTONA): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è **MONOTONA CRESCENTE** (**DECRESCENTE**) in A se:

$$x, y \in A, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (f(x) \geq f(y))$$

• Def (Funzioni sup./inf. limitate): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è **superiormente** (**inferiormente**) **limitata** se tale risulta l'insieme:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$$

cioè se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq m$ ($f(x) \geq m$) $\forall x \in A$. In tal caso, si pone

$$\sup_A f = \sup(f(A)) \quad \left(\inf_A f = \inf(f(A)) \right).$$

NOTAZIONE: Se $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è **sup.lim.** (**inf.lim.**), conveniamo che

$$\sup_A f = +\infty \quad \left(\inf_A f = -\infty \right)$$

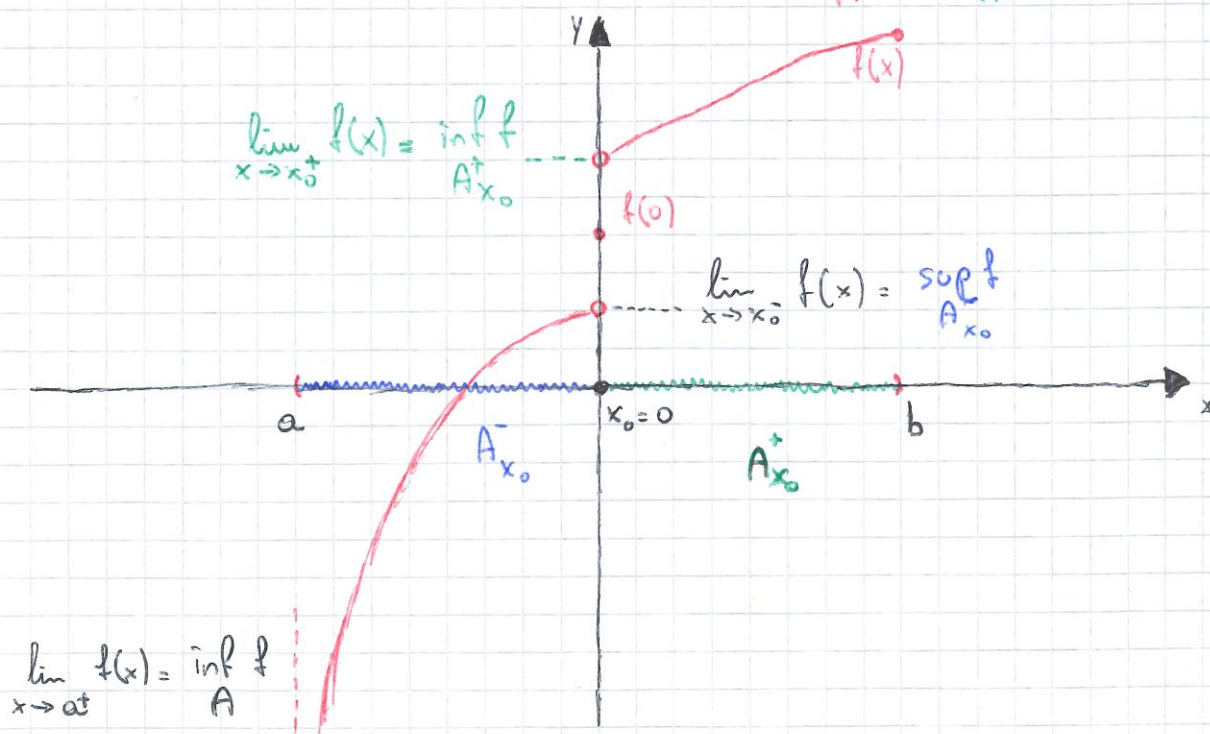
TEOR (!): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona **crescente** (**decrescente**) in A , e sia $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$. Allora:

$$(1) \text{ se } x_0 \in D(A_{x_0}^-), \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{A_{x_0}^-} f \quad \left(\inf_{A_{x_0}^-} f \right);$$

$$(2) \text{ se } x_0 \in D(A_{x_0}^+), \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{A_{x_0}^+} f \quad \left(\sup_{A_{x_0}^+} f \right);$$

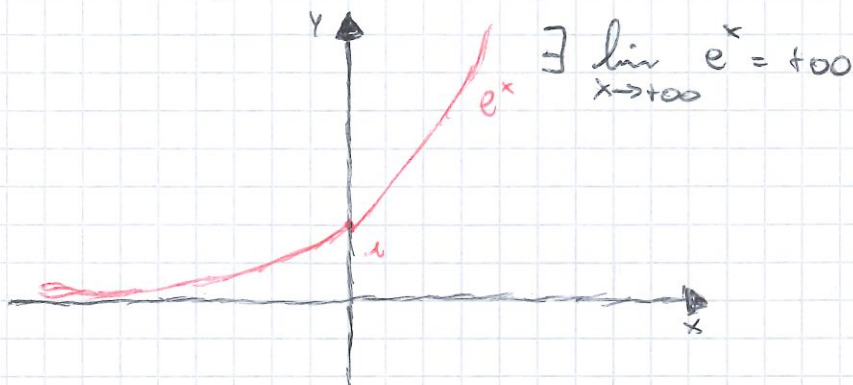
$$(3) \text{ se } x_0 = +\infty \in D(A), \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup_A f \quad \left(\inf_A f \right);$$

$$(4) \text{ se } x_0 = -\infty \in D(A), \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf_A f \quad \left(\sup_A f \right).$$



Es.: Sia $f: A = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Proviamo che $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
 In effetti, si vede "facilmente" che $f(x) = e^x$ è MONOTONA CRESCENTE
 in \mathbb{R} e non sup.lim. ($e^n \geq n \forall n \in \mathbb{N}$); dunque

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$$



ALGEBRA DEI LIMITI

NOTAZIONE: Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$. Se $l \in \mathbb{R}$, scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+ (l^-)$$

se (1) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e (2) $\exists I_0 \in \mathcal{U}(x_0) \mid f(x) > l (< l) \forall x \in A \cap I_0 - \{x_0\}$

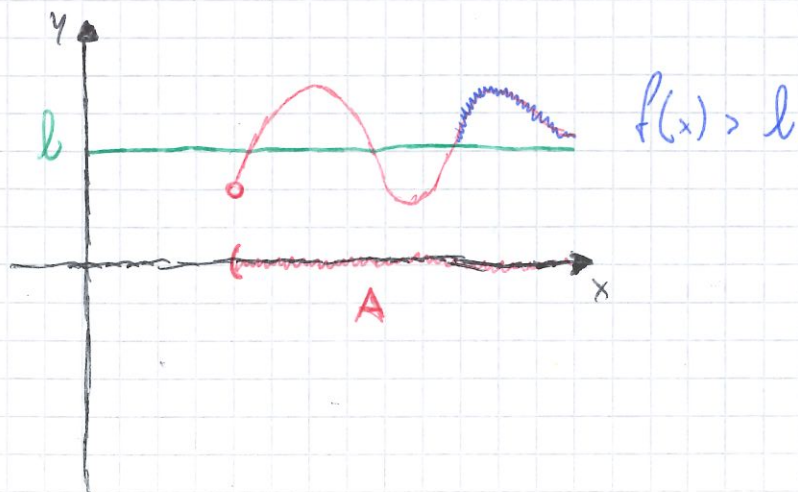
TEORE (ALGEBRA DEI LIMITI): Siano $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D(A)$.

Supponiamo che $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \hat{\mathbb{R}}$, $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \hat{\mathbb{R}}$.

Valgono allora le seguenti TABELLE per

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$$



(1) LIMITE DELLA SOMMA:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$$

$\begin{matrix} m \\ l \end{matrix}$	$m \in \mathbb{R}$	$m = +\infty$	$m = -\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + m$	$+\infty$	$-\infty$
$l = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FORMA DI INDETERMINAZIONE
$l = -\infty$	$-\infty$	FORMA DI INDETERMINAZIONE	$-\infty$

(2) LIMITE DEL PRODOTTO:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$$

$\begin{matrix} m \\ l \end{matrix}$	$m \in \mathbb{R}, m > 0$	$m \in \mathbb{R}, m < 0$	$m = 0$	$m = +\infty$	$m = -\infty$
$l \in \mathbb{R}, l > 0$	lm	lm	0	$+\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}, l < 0$	lm	lm	0	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$l = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$l = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

(3) LIMITE DEL QUOZIENTE: Se, in più, esiste $I_0 \in U(x_0)$ tale che

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A \cap I - \{x_0\}$$

vale allora la seguente TABELLA.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$l \backslash m$	$m \in \mathbb{R}, m > 0$	$m \in \mathbb{R}, m < 0$	$m = 0^+$	$m = 0^-$	$m = +\infty$	$m = -\infty$
$l \in \mathbb{R}, l > 0$	$\frac{l}{m}$	$\frac{l}{m}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$l \in \mathbb{R}, l < 0$	$\frac{l}{m}$	$\frac{l}{m}$	$-\infty$	$+\infty$	0	0
$l = 0^+$	0	0	F.I.	F.I.	0	0
$l = 0^-$	0	0	F.I.	F.I.	0	0
$l = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	F.I.
$l = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Teor (del cambio di variabile): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$. Sia poi $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(A) \subseteq B$ ($f(x) \in B \forall x \in A$). Supponiamo che:

(1) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \hat{\mathbb{R}}$;

(2) $l \in D(B)$ e $\exists \lim_{t \rightarrow l} g(t) = m \in \hat{\mathbb{R}}$;

(3) $l \notin B$ oppure $l \in B$ e $g(l) = m$ ($\Rightarrow m \in \mathbb{R}$).

Allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = m$ ($t = f(x) \rightarrow l$)

Es.: Sia $F: A = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = [e^x + \frac{1}{x}]$. Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x + \frac{1}{x}] = +\infty$$

Inoltre, per ogni $x \neq 0$ si ha $F(x) = g(f(x))$, dove

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad , \quad g(t) = [t] \quad (t \in \mathbb{R})$$

D'altra parte, sappiamo che:

(1) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \frac{1}{x}) = +\infty$ (Algebra dei limiti);

(2) $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} [t] = +\infty$

(3) " $l = +\infty \notin \mathbb{R}$ "

Dunque, dal Teor. del Cambio di Variabile concluderemo che

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{[e^x + \frac{1}{x}]}_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} [t] = +\infty$$

Oss. (!): la necessità dell'ipotesi (3) viene dalla definizione stessa di limite: infatti, poiché $\exists \lim_{t \rightarrow l} g(t) = m$, allora:

$$\forall V \in \mathcal{U}(m) \exists I \in \mathcal{U}(l) \mid g(t) \in V \quad \forall t \in B \cap I - \{l\} \quad (*)$$

Dunque, volendo scegliere $t = f(x) \in B$, dobbiamo sapere che $f(x) \neq l$!.
Questo è vero se $l \notin B$ (poiché $f(x) \in B \quad \forall x \in A$) oppure se $l \in B$ e $g(l) = m$ (nel qual caso (*) vale anche per $t = l$!).

ANALISI DELLE FORME DI INDETERMINAZIONE.

TEORE (Limiti "Notevoli"): Valgono i seguenti limiti.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

DEF (ASINTOTICO e "O Piccolo"): Siano $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$.

Supponiamo che $\exists I_0 \in \mathcal{U}(x_0) \mid g(x) \neq 0 \quad \forall x \in A \cap I - \{x_0\}$. Diciamo che:

(1) f è ASINTOTICA a g per $x \rightarrow x_0$ ($f \sim g$ per $x \rightarrow x_0$) se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

(2) f è un "O Piccolo" di g per $x \rightarrow x_0$ ($f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$) se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Alcuni Esempi.

(1) Sia $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ ($\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \alpha_n \neq 0$). Allora:

$$p(x) \sim \alpha_n x^n \text{ per } x \rightarrow \pm \infty$$

In fatti, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{p(x)}{\alpha_n x^n} = \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^n}}_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^{n-1}}}_0 + \dots + 1 = 1$$

(2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Allora:

$$x^\alpha = o(x^\beta) \text{ per } x \rightarrow \pm \infty \quad \vee \quad x^\beta = o(x^\alpha) \text{ per } x \rightarrow 0$$

(3) Poiché $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, allora $\sin x = o(x)$ per $x \rightarrow +\infty$. In generale, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione LIMITATA (cioè $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$), si ha $f(x) = o(x^\alpha)$ per $x \rightarrow +\infty \quad \forall \alpha > 0$

(4) (GERARCHIA DEGLI INFINITI): Per ogni $a > 1, \alpha > 0$ si ha:

$$\log_a(x) = o(x^\alpha), \quad x^\alpha = o(a^x) \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \right), \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \right)$$

TEOR (Proprietà di \sim , "o"): Nelle ipotesi della definizione precedente, valgono le seguenti proprietà:

(1) se $f \sim g$ per $x \rightarrow x_0$, allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \hat{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$;

(2) se $f \sim f_1, g \sim g_1$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f g \sim f_1 g_1, \frac{f}{g} \sim \frac{f_1}{g_1}$ per $x \rightarrow x_0$;

(3) se $f \sim g, g \sim h$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f \sim h$ per $x \rightarrow x_0$;

(4) se $f_1, f_2 = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$, allora $\lambda f_1 + \mu f_2 = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$
 $\forall \lambda, \mu \neq 0$

(5) se $f = O(g)$, $g \sim h$ per $x \rightarrow x_0$, allora $f = O(h)$ per $x \rightarrow x_0$;

(6) $f \sim g$ per $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f - g = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$.
($f = g + o(g)$)

Oss(!!!): Usando il Teorema precedente, è possibile "scrivere" i limiti notevoli: ad esempio

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \sim x \text{ per } x \rightarrow 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sin x = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

Es. (1): Calcoliamo $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x + \sin x}$. A tale scopo, uniamo i

limiti notevoli nella "forma" di " \sim " e " o ", si ha

$$\begin{aligned} \bullet e^x - \cos x &= (1 + x + o(x)) - \cos x = x + (1 - \cos x) + o(x) \\ &= x + \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) + o(x) \\ &= x + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + o(x)}_{o(x)} = x + o(x) \sim x \end{aligned}$$

$$\bullet x + \sin x = x + (x + o(x)) = 2x + o(x) \sim 2x$$

Dunque, dalle proprietà di " \sim " segue che

$$\frac{e^x - \cos x}{x + \sin x} \sim \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \text{ per } x \rightarrow 0$$

Da qui, perché $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ concludiamo che $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x + \sin x} = \frac{1}{2}$.

4) LIMITI E RELAZIONE D'ORDINE

Teor (della permanenza del segno): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$.
 Supponiamo che $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \hat{\mathbb{R}}$. Allora:

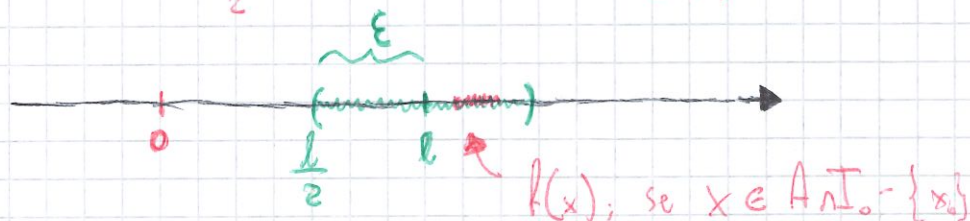
(1) se $l > 0$ (eventualmente $l = +\infty$) ($l < 0$, eventualmente $l = -\infty$)
 esiste $I_0 \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) $\forall x \in A \cap I_0 - \{x_0\}$.

(2) se esiste $I_0 \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) $\forall x \in A \cap I_0 - \{x_0\}$,
 allora $l \geq 0$, eventualmente $l = +\infty$ ($l \leq 0$, eventualmente $l = -\infty$).

Dim (Punto (1), $l > 0$): Se $l = +\infty$, dalla DEFINIZIONE di limite con $M=1$ ($V=(1, +\infty)$) segue l'esistenza di un certo $I_0 \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che
 $f(x) > 1 > 0 \quad \forall x \in A \cap I_0 - \{x_0\}$ $f(x)$, se $x \in A \cap I_0 - \{x_0\}$

Se invece $l \in \mathbb{R}$, $l > 0$, dalla DEFINIZIONE di limite con $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$
 segue l'esistenza di $I_0 \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Rightarrow f(x) > l - \varepsilon = \frac{l}{2} > 0 \quad \forall x \in A \cap I_0 - \{x_0\}.$$



Oss (!): Il precedente teorema non vale se nell'enunciato (1) si
 sostituisce $> (<)$ con $\geq (\leq)$ ad esempio, sappiamo che

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

ma $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ CAMBIA SEGNO infinite volte. Analogamente, il
 precedente Teorema non vale se nell'enunciato (2) si sostituisce
 $\geq (\leq)$ con $> (<)$: ad esempio, $f(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0$, MA

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

SUCCESSIONI IN \mathbb{R}

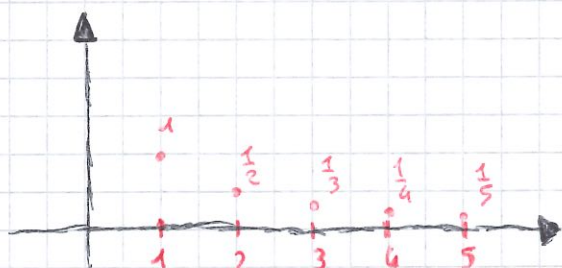
DEF (Successioni in \mathbb{R}): Chiamiamo successioni in \mathbb{R} una qualsiasi funzione $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(n) = a_n \in \mathbb{R}$.
Identificheremo la funzione a con la sua immagine

$$a(\mathbb{N}) = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subseteq \mathbb{R},$$

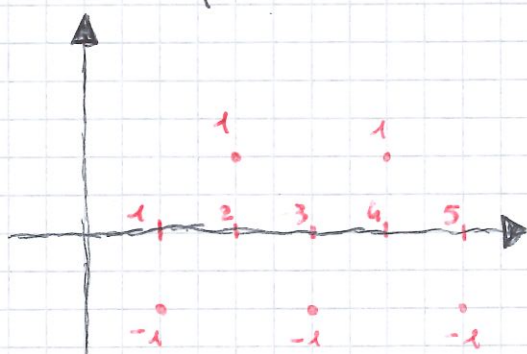
e useremo la notazione $(a_n)_n$.

UN PAIO DI ESEMPLI:

$$(1) \left(a_n = \frac{1}{n}\right)_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right\}$$



$$(2) \left(a_n = (-1)^n\right)_n = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$$



Oss (!): Siccome una successione è una funzione definita su $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, e poiché $D(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$, tutto quanto detto finora si applica alle successioni con $A = \mathbb{N}$ e $x_0 = +\infty$. In questo caso particolare, si usa la notazione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

ALCUNI ESEMPLI:

(1) Consideriamo la successione $(a_n = (1 + \frac{1}{n})^n)_n$. Si può dimostrare che tale successione è

- MONOTONA CRESCENTE ($n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m$)
- SUPERIORMENTE LIMITATA ($a_n \leq 3 \forall n \in \mathbb{N}$)

Dunque, per il Teorema di esistenza del limite per funzioni MONOTONE concludiamo che

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \sup_{\mathbb{N}} (a)$$

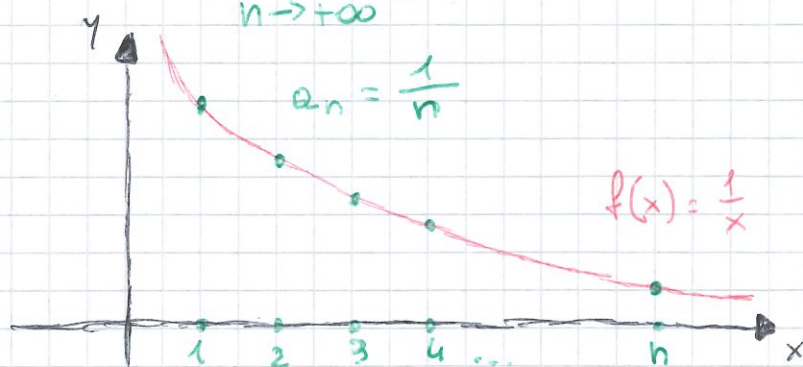
Tale limite si indica con e (Numero di Nepero).

(2) Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\mathbb{N} \subseteq A$. Allora, se $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \hat{\mathbb{R}}$, per il Teorema del Cambio di Variabile si ha

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{f(n)}_{a_n} = l$$

Ad esempio, poiché $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ concludiamo che

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$



(3) Usando il punto precedente ((2)) e la Gerarchia degli Infiniti già vista, si riconosce che (per ogni $a > 1, \alpha > 0$)

$$\log_a n = o(n^\alpha) \text{ per } n \rightarrow +\infty; \quad n^\alpha = o(a^n) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

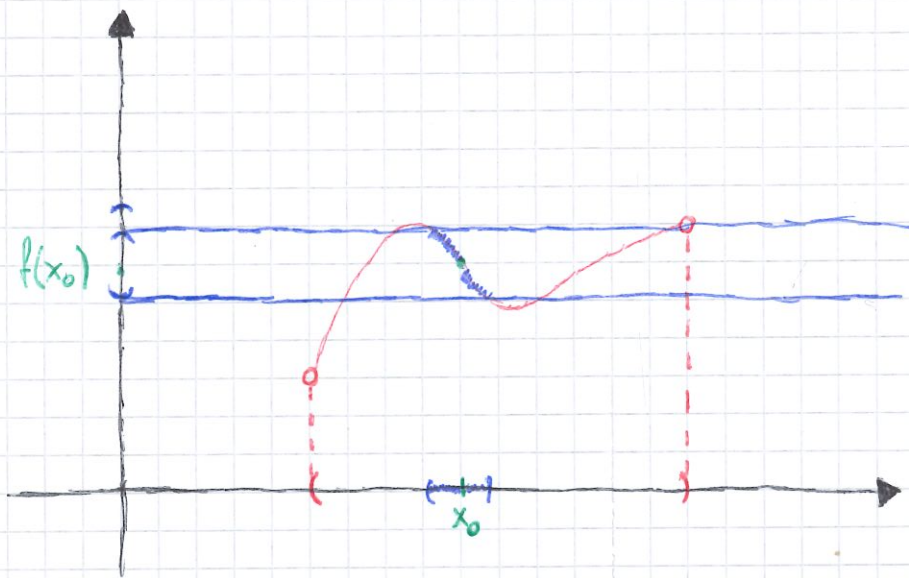
In più, si può provare

$$a^n = o(n!) \text{ per } n \rightarrow +\infty; \quad n! = o(n^n) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

(dove $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)

Funzioni continue

DEF (Funzione continua): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Diciamo che f è continua in x_0 se o $x_0 \notin D(A)$ o $x_0 \in D(A)$ e $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
Diciamo poi che f è continua in A , e scriviamo $f \in C(A)$, se f è continua in tutti i punti di A .



TEOR (Continuità delle funzioni elementari): Tutte le funzioni **ELEMENTARI** sono continue sul loro "dominio" naturale;

- (1) Dato $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n \in C(\mathbb{R})$ e $f(x) = x^{-n} \in C(\mathbb{R} - \{0\})$.
- (2) Dato $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $f(x) = x^\alpha \in C((0, +\infty))$;
- (3) Dato $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) = a^x \in C(\mathbb{R})$ e $f(x) = \log_a x \in C((0, +\infty))$;
- (4) $f(x) = \sin x \in C(\mathbb{R})$ e $f(x) = \cos x \in C(\mathbb{R})$.

TEOR (Algebra delle funzioni continue): Siano $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A$. Supponiamo che f, g siano continue in x_0 . Allora:

- (1) $f + g$ è continua in x_0 ;
- (2) $f \cdot g$ è continua in x_0 ;
- (3) se, in più, $g(x_0) \neq 0$ ($\Rightarrow g(x) \neq 0$ intorno a x_0), $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 .

In particolare, se $f, g \in C(A)$, allora

(1) $f+g \in C(A)$; (2) $fg \in C(A)$; (3) $\frac{f}{g} \in C(A)$ se $g(x) \neq 0 \forall x \in A$

Es. (1): Sia $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ ($\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \neq 0$)

Poiché $f(x) = x^k \in C(\mathbb{R}) \forall k \in \mathbb{N}$, dall'Algebra delle Funzioni Continue segue che $p \in C(\mathbb{R})$ (somma di funzioni continue).

Es. (2): Sia $A = \mathbb{R} - \{(2p+1)\frac{\pi}{2}, p \in \mathbb{Z}\}$, e sia $F: A \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \tan x$.

Poiché, per definizione,

$$F(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

e poiché $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x \in C(\mathbb{R})$ e $g(x) = \cos x \neq 0 \forall x \in A$, ancora dall'Algebra delle Funzioni Continue segue che $F(x) = \tan x \in C(A)$.

Teor. (Continuità della composizione): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Sia poi $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(A) \subseteq B$. Supponiamo che:

(1) f è continua in x_0 ;

(2) g è continua in $t_0 = f(x_0) \in B$

Allora $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 . In particolare, se $f \in C(A)$ e $g \in C(B)$, allora $g \circ f \in C(A)$.

Es.: Sia $F: A = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \sin(e^x)$. Poiché, $F = g \circ f$, con

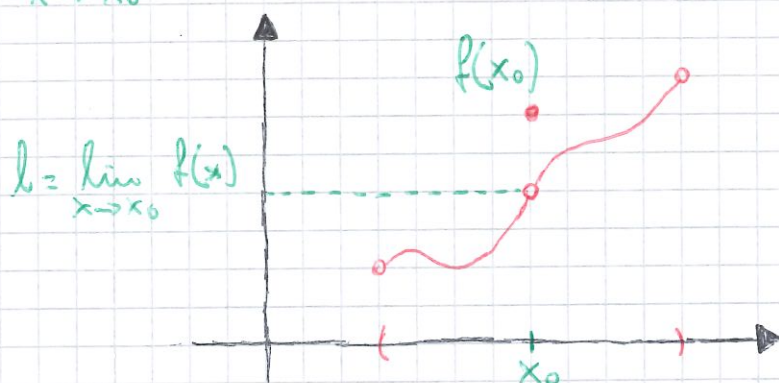
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \sin t$$

e poiché $f \in C(\mathbb{R})$, allora $F(x) = \sin(e^x) \in C(\mathbb{R})$

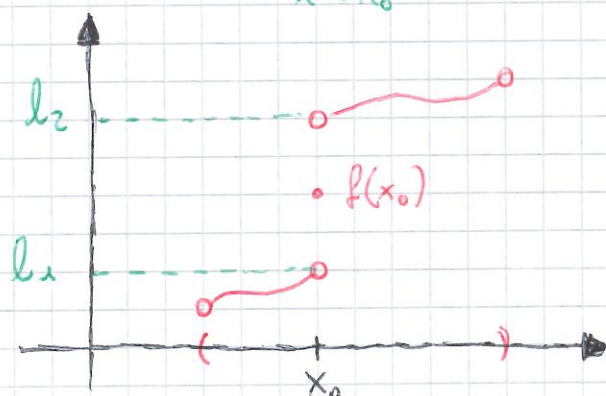
PUNTI DI DISCONTINUITÀ: Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Supponiamo f **NON CONTINUA** in x_0 (dunque $x_0 \in D(A)$). Possono presentarsi Tre casi:

(1) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, MA $l \neq f(x_0)$



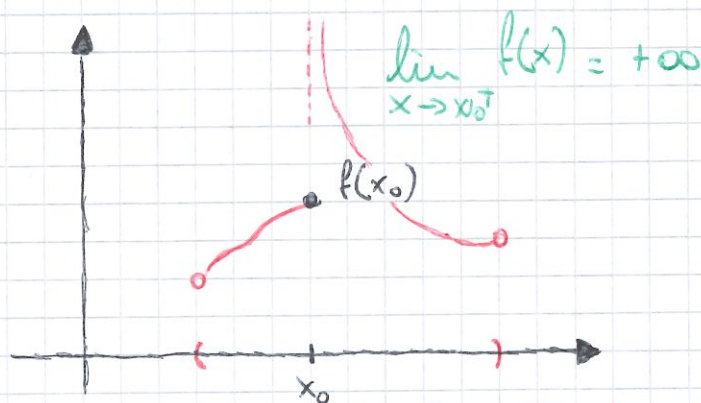
In questo caso, x_0 è un punto di discontinuità **eliminabile**.

(2) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ MA $l_1 \neq l_2$ ($\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$)



In questo caso, x_0 è un punto di discontinuità **A SALTO**.

(3) Non si presenta NESSUNO dei due casi precedenti, almeno uno dei limiti $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ NON ESISTE O È INFINITO.



In questo caso, x_0 è un punto di discontinuità di **2ª SPECIE**.

Oss (!): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Perché $x_0 \notin A$, $x_0 = 0$, tale punto non è un punto di discontinuità per f !

FUNZIONI CONTINUE SU INTERVALLI

TEOR (DEGUZZI): Sia $f \in C([a, b])$ tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Esiste allora (almeno) un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.

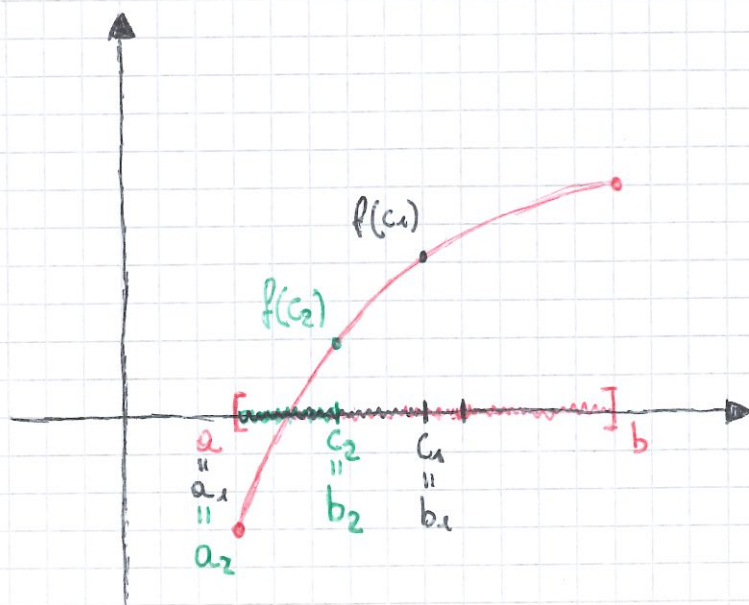


Dim: Consideriamo il punto $c_1 = \frac{1}{2}(a, b)$. Se $f(c_1) = 0$, il teorema è dimostrato (con $x_0 = c_1$); se, invece, $f(c_1) \neq 0$, poiché $f(a) \cdot f(b) < 0$ si presenta necessariamente uno dei due casi seguenti:

- (1) $f(a) \cdot f(c_1) < 0$, e allora poniamo $a_1 = a$, $b_1 = c_1$;
- (2) $f(c_1) \cdot f(b) < 0$, e allora poniamo $a_1 = c_1$, $b_1 = b$.

In ogni caso, si ha:

$$(i) \quad f(a_1) \cdot f(b_1) < 0 \quad (ii) \quad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$$



Ripetiamo allora lo stesso procedimento, cioè consideriamo $c_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$.

Se $f(c_2) = 0$, il Teorema è dimostrato (con $x_0 = c_2$); se, invece, $f(c_2) \neq 0$, poiché $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ si presenta uno dei due casi seguenti:

(1) $f(a_1) \cdot f(c_1) < 0$, e allora poniamo $a_2 = a_1$, $b_2 = c_2$;

(2) $f(c_2) \cdot f(b_1) < 0$, e allora poniamo $a_2 = c_2$, $b_2 = b_1$;

In ogni caso, si ha:

$$(i) f(a_2) \cdot f(b_2) < 0 \quad (ii) b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{4}(b - a)$$

Procedendo in questo modo, si presentano due casi:

• dopo n passi, $f(c_n) = 0$ (e allora il Teorema è dimostrato);

• $f(c_n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

In quest'ultimo caso costruiamo due successioni $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ che soddisfanno le proprietà seguenti:

(P1) $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$, cioè

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \subseteq [a, b]$$

(P2) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(P3) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ora, poiché le successioni $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sono MONOTONE CRESCENTE e DECRESCENTE, rispettivamente, e LIMITATE, dalla proprietà (P1); allora, dal Teorema di Esistenza del Limite per Funzioni Monotone si ha:

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_1 \in [a, b]; \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l_2 \in [a, b].$$

D'altra parte, dalla proprietà (P2) e dall'Algebra dei Limiti segue che (si noti che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$):

$$b_2 - b_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} (b - a) = 0,$$

e dunque $b_1 = b_2 = x_0 \in [a, b]$. Infine, poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ e poiché f è continua in x_0 ($x_0 \in [a, b]$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$), dalla proprietà (P3) e dai Teoremi del Cambio di Variabile e della Permanenza del Segno - (2) concludiamo

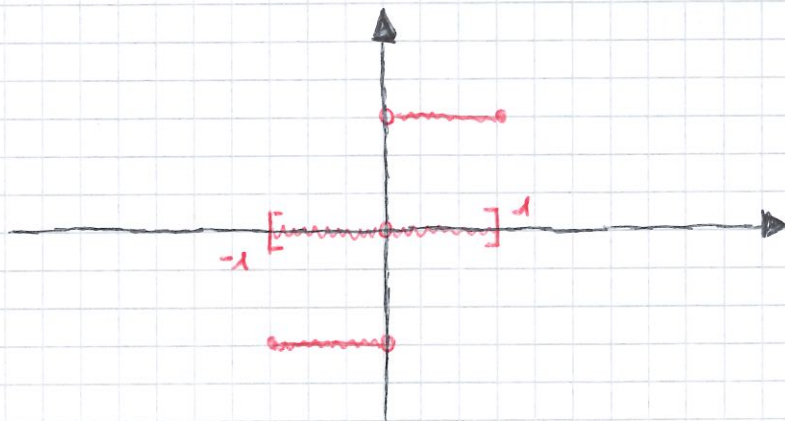
$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n) \cdot f(b_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = (f(x_0))^2 \geq 0 \end{aligned}$$

e dunque $f(x_0) = 0$

Oss: Il Teorema precedente non vale (in generale) se f non è continua in $[a, b]$! Ad esempio, la funzione

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Soddisfa $f(-1) \cdot f(1) = -1 < 0$ MA $\nexists x_0 \in [-1, 1]$ tale che $f(x_0) = 0$.
In effetti f non è continua in $x_0 = 0$ (punto di discontinuità A SALTO).



DEF (Punti di Max/Min. Locali o Globali): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.

Diciamo che x_0 è un punto di MASSIMO (MINIMO) LOCALI se:

$$\exists r > 0 \text{ tale che } f(x_0) \geq f(x) \text{ (} \leq f(x) \text{)} \quad \forall x \in A \cap (x_0 - r, x_0 + r)$$

Diciamo invece che x_0 è un punto di MASSIMO (MINIMO) GLOBALI se:

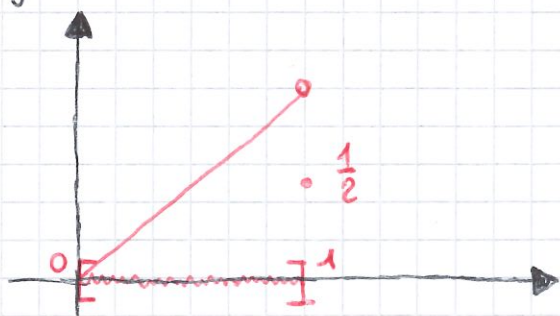
$$f(x_0) \geq f(x) \text{ (} \leq f(x) \text{)} \quad \forall x \in A.$$

TEOR (di WEIERSTRASS): Sia $f \in C([a, b])$. Allora esistono (almeno) un punto di MASSIMO GLOBALI e di MINIMO GLOBALI per f , cioè esistono $x_M, x_m \in [a, b]$ tale che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]$.

Oss: Il precedente Teorema non VALG (in generale) se il dominio di f non è un intervallo chiuso e limitato o se f non è continua in $[a, b]$.

Ad esempio, la funzione

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ non ha né punti di MASSIMO GLOBALI né punti di MINIMO GLOBALI (infatti, \mathbb{R} non è LIMITATO);
- $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ non ha punti di MASSIMO globale (infatti, f non è continua in $x_0 = 1$)



UN PAIO DI CONSEGUENZE:

(1) (TEOREMA DI BOLZANO): Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un INTERVALLO, e sia $f \in C(I)$.

Allora $f(I)$ è un INTERVALLO: cioè, se $x_1, x_2 \in I$ e $f(x_1) < f(x_2)$,

per ogni $f(x_1) < y < f(x_2)$ esiste $z \in I$ tale che $f(z) = y$.

In particolare, se $I = [a, b]$, allora $f(I) = [f(x_m), f(x_M)]$, dove

x_m, x_M sono un punto di minimo e di massimo globale

(2) (CONTINUITÀ dell'INVERSA): Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un INTERVALLO, e sia $f \in C(I)$.

Se f è iniettiva, allora $f^{-1} \in C(\underbrace{f(I)}_{\text{INTERVALLO}})$

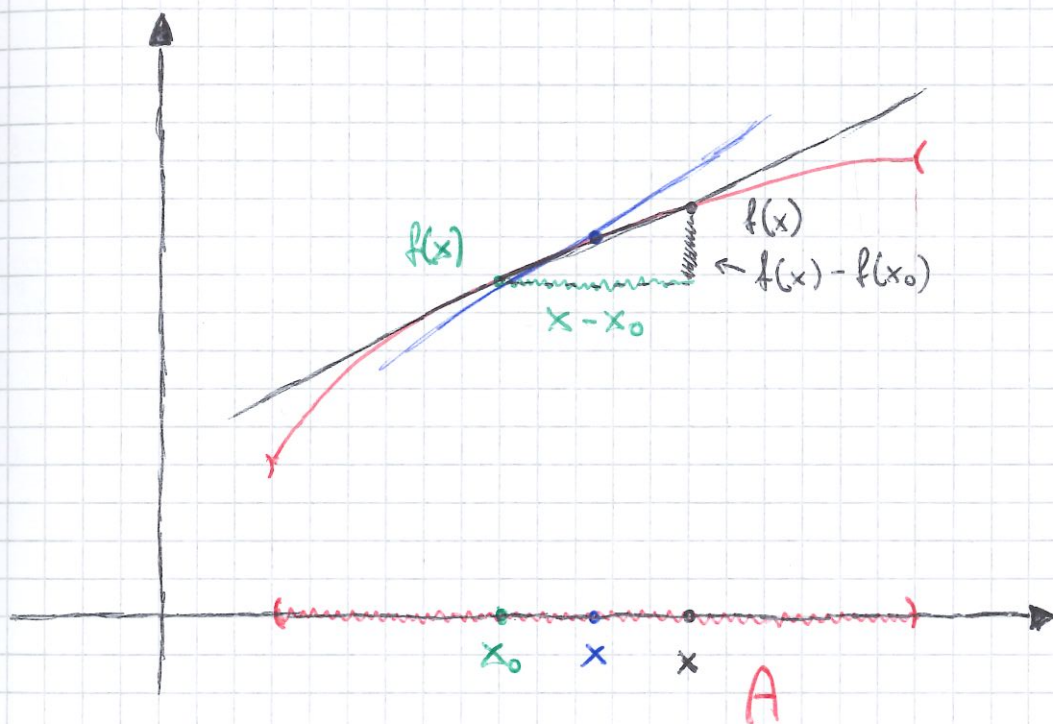
INTERVALLO

CALCOLO DIFFERENZIALE

DEF (DERIVATA): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$. Diciamo che f è **DERIVABILE** in x_0 se **ESISTE** in \mathbb{R} il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$$

In tal caso, il valore (reale) di tale limite si chiama **DERIVATA (PRIMA)** di f in x_0 , e si indica con $f'(x_0)$.



Oss (!): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 , e sia $w(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} - f'(x_0) \right) = 0,$$

e quindi $w(x) = o(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$. Possiamo allora scrivere:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{f(x)} + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Il polinomio di PRIMO GRADO $f(x)$ si chiama **RETTA TANGENTE** ad f in x_0 (oppure **DIFFERENZIALE** di f in x_0).

TEOR (!): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$. Se f è DERIVABILE in x_0 , allora f è CONTINUA in x_0 ($\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$)

Dim: Poiché f è derivabile in x_0 , si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + O(x-x_0) \\ &= f(x_0) + (x-x_0) \left\{ f'(x_0) + \frac{O(x-x_0)}{x-x_0} \right\}; \end{aligned}$$

dunque, perché $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{O(x-x_0)}{x-x_0} = 0$ (per DEFINIZIONE di "0 piccolo"), concludiamo che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x_0) + \underbrace{(x-x_0)}_0 \left\{ f'(x_0) + \underbrace{\frac{O(x-x_0)}{x-x_0}}_0 \right\} \right] = f(x_0)$$

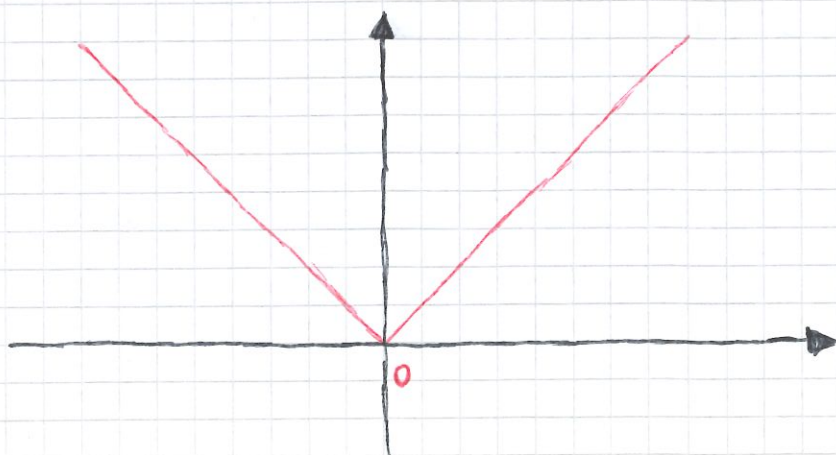
Oss (!): In generale, l'affermazione del teorema precedente **NON** si può **INVERTIRE**! Ad esempio, la funzione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è CONTINUA in \mathbb{R} ma

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

dunque $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ e quindi f NON è DERIVABILE in $x_0 = 0$



TEOR (DERIVATE delle FUNZIONI ELEMENTARI): Si ha:

- (1) se $f(x) = c_0$ (costante) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists f'(x_0) = 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$,
- (2) se $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = x^n \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists f'(x_0) = nx_0^{n-1} \forall x_0 \in \mathbb{R}$,
- (3) se $f(x) = e^x \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists f'(x_0) = e^{x_0} \forall x_0 \in \mathbb{R}$,
- (4) se $f(x) = \ln(x) \forall x > 0$, $\exists f'(x_0) = \frac{1}{x_0} \forall x_0 > 0$,
- (5) se $f(x) = \sin x \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists f'(x_0) = \cos x_0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$,
- (6) se $f(x) = \cos x \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists f'(x_0) = -\sin x_0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$,
- (7) se $f(x) = |x| \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists f'(x_0) \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \geq 0 \\ -1, & \text{se } x_0 < 0 \end{cases} \forall x_0 \neq 0$.

TEOR (ALGEBRA delle DERIVATE): Siano $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A \cap D(A)$.
Supponiamo che f, g siano derivabili in x_0 . Allora:

- (1) $f+g$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- (2) fg è derivabile in x_0 , e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- (3) se, in più, $g(x_0) \neq 0$ ($\Rightarrow \exists I \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $g(x) \neq 0 \forall x \in A \cap I_0$)
allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 , e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

UN PAIO DI ESEMPI

- (1) Sia $F: A = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Poiché le funzioni $f(x) = 1$ ($x \in \mathbb{R}$), $g(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) sono derivabili in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$, e poiché $g(x) \neq 0 \forall x \in A$, allora

$$\begin{aligned} \exists F'(x_0) &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \\ &= \frac{0 \cdot x_0^n - 1(n x_0^{n-1})}{x_0^{2n}} = -n \frac{x_0^{n-1}}{x_0^{2n}} \\ &= -\frac{n}{x_0^{n+1}} = -n x_0^{-n-1} \quad \forall x_0 \in A. \end{aligned}$$

(2) Sia $F: A = \mathbb{R} - \{(2p+1)\frac{\pi}{2} : p \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Perché $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$), $g(x) = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) sono derivabili in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$, e perché $\cos x \neq 0 \forall x \in A$, allora:

$$\begin{aligned} \exists F'(x_0) &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \\ &= \frac{\cos x_0 \cdot \cos x_0 - \sin x_0 (-\sin x_0)}{\cos^2 x_0} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x_0} = 1 + \tan^2(x_0) \quad \forall x_0 \in A \end{aligned}$$

TEOR (REGOLA della CATENA): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$. Sia poi $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(A) \subseteq B$. Supponiamo:

- (1) f derivabile in x_0
- (2) $t_0 = f(x_0) \in D(B)$ e g derivabile in t_0 .

Allora $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 , e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Es: Sia $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, e sia $F: A = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^\alpha$. Per ogni $x > 0$, possiamo scrivere $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = g(f(x))$, dove

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \alpha \ln x; \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = e^t.$$

Perché f è derivabile in ogni punto $x_0 \in (0, +\infty)$ e poiché g è derivabile in ogni punto $t_0 \in \mathbb{R}$, allora (si noti che $f(x_0) \in D(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \forall x_0 > 0$)

$$\begin{aligned} \exists F'(x_0) &= (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ &= (e^{t_0})_{t_0 = \alpha \ln x_0} \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x_0} \cdot \frac{\alpha}{x_0} \\ &= x_0^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x_0} = \alpha x_0^{\alpha-1} \quad \forall x_0 > 0. \end{aligned}$$

Es. (!): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A \cap D(A)$. Sia poi

$$F: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = |f(x)|.$$

Se f è derivabile in x_0 e se $f'(x_0) \neq 0$, allora

$$\exists F'(x_0) = \begin{cases} f'(x_0), & \text{se } f'(x_0) > 0 \\ -f'(x_0), & \text{se } f'(x_0) < 0 \end{cases}$$

TEOR (DERIVATA dell' INVERSA): Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f \in C(I)$. Supponiamo f INIETTIVA, e sia $x_0 \in I (\subseteq D(I))$. Allora, se f è DERIVABILE in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, si ha:

$$\exists (f^{-1})(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Es. (!): Sia $f: I \Rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$. Sappiamo che $f \in C(I)$ e f è INIETTIVA; inoltre, f è derivabile in OGNI punto di I , e

$$f'(x_0) = \underbrace{1 + \tan^2 x_0}_{1} \neq 0 \quad \forall x_0 \in I$$

Allora $f^{-1}(y) = \arctan y$ è derivabile in OGNI punto $y_0 \in F(I) = \mathbb{R}$, e

$$(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0},$$

dove $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è l'unico punto tale che $\tan x_0 = y_0$. Dunque:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{1 + y_0^2} \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}.$$

DEF (DERIVATA DESTRA E SINISTRA): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A^+)$ ($x_0 \in A \cap D(A^-)$). Diciamo che f è derivabile da destra (sinistra) in x_0 se

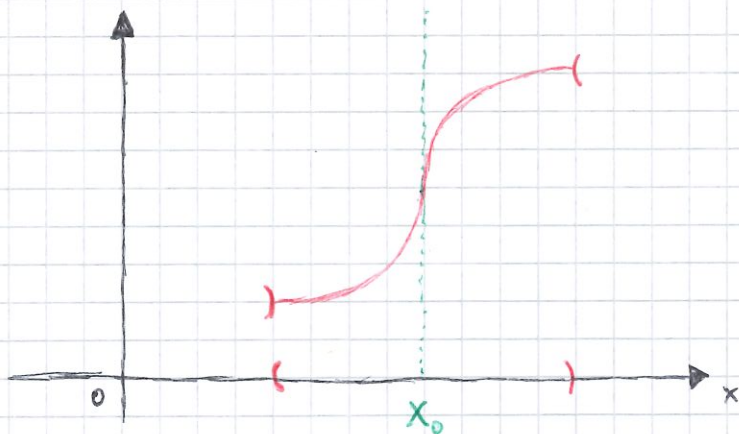
$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = l \in \mathbb{R}$$

In tal caso, l si chiama DERIVATA DESTRA (SINISTRA) di f in x_0 , e si indica con $f'_+(x_0)$ ($f'_-(x_0)$).

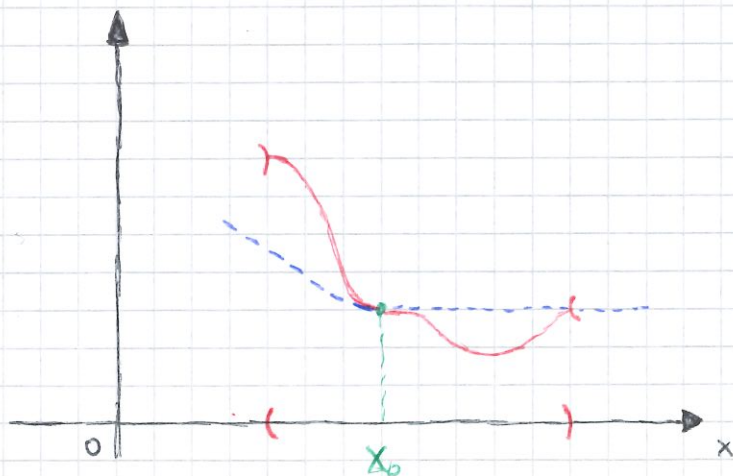
Oss (!): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A^+) \cap D(A^-)$. Allora f è derivabile in x_0 se e solo se $\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.
In tal caso, $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Sia ora $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in A \cap D(A)$. Supponiamo f CONTINUA MA NON DERIVABILE in x_0 . Diciamo allora che x_0 è:

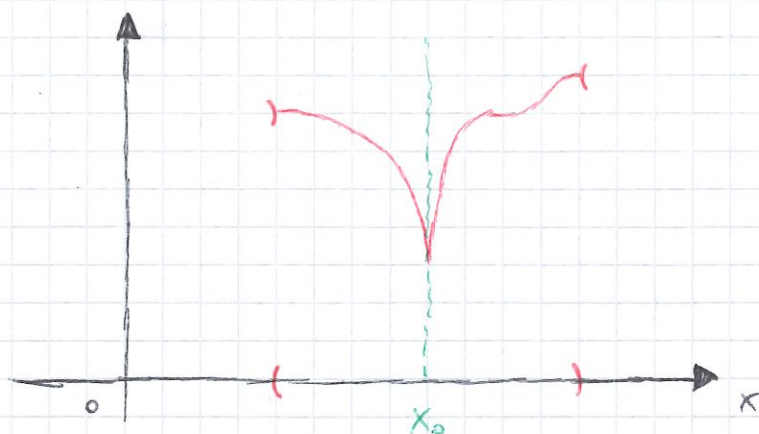
(1) un PUNTO A TANGENTE VERTICALE se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$



(2) un PUNTO ANGOLOSO se $\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ MA $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$



(3) una cuspidè se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty (-\infty)$, $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty (+\infty)$

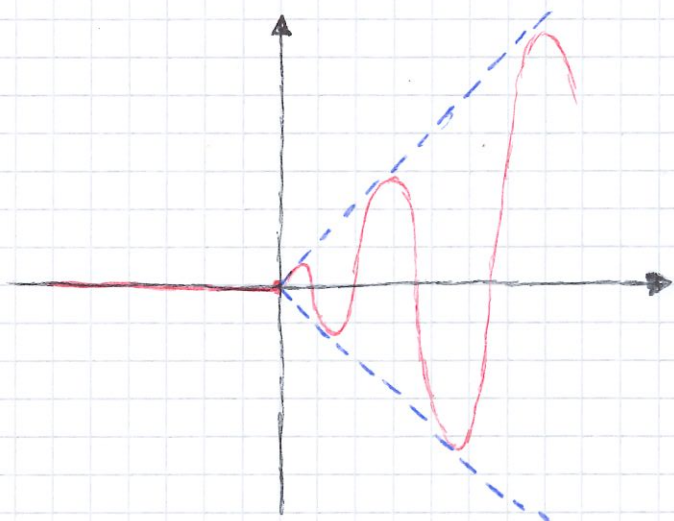


Oss: I tre casi precedenti NON esauriscono tutti i possibili casi di non derivabilità di una funzione. Ad esempio, la funzione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

NON è derivabile in $x_0 = 0$ perché

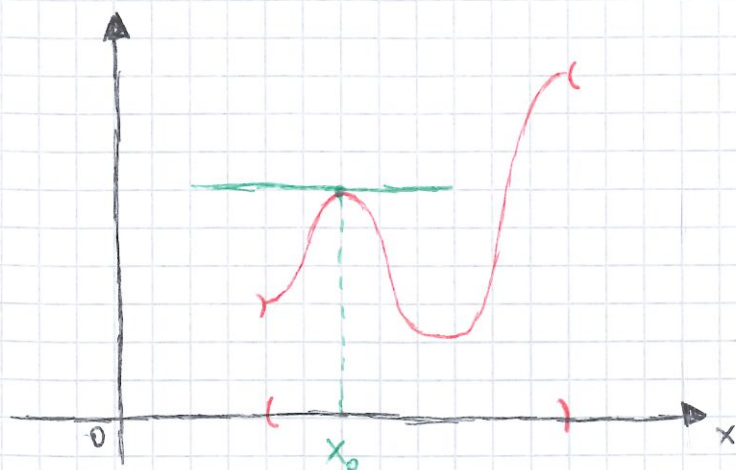
$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x_0 - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$



TEOREMI sulle FUNZIONI DERIVABILI

TEOR (di FERMAT): Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (con $a < b$) e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di MASSIMO o MINIMO LOCALE per f . Se f è DERIVABILE in x_0 ,

allora $f'(x_0) = 0$



DIM (x_0 punto di MAX. LOCALE): Anzitutto, poiché $x_0 \in (a, b)$ è un punto di massimo locale, esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (a, b)$ e

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r). \quad (*)$$

Inoltre, poiché f è derivabile in x_0 (e $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (a, b)$), si ha:

$$\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0) \text{ e } f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

Dunque, usando (*) e il Teorema della Permanenza del Segno - (2), otteniamo quanto segue:

$$\bullet \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), x > x_0 \Rightarrow f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0;$$

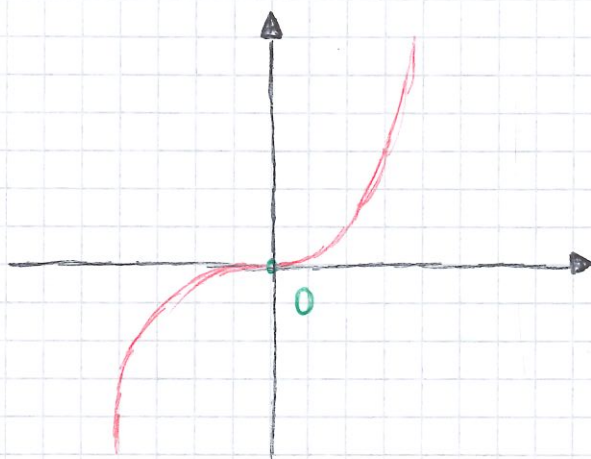
$$\bullet \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x_0 - r < x < x_0 \Rightarrow f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Da qui, poiché $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, concludiamo che $f'(x_0) = 0$. #

Oss (!): In generale, l'enunciato del Teorema precedente NON si può invertire: ad esempio, la funzione

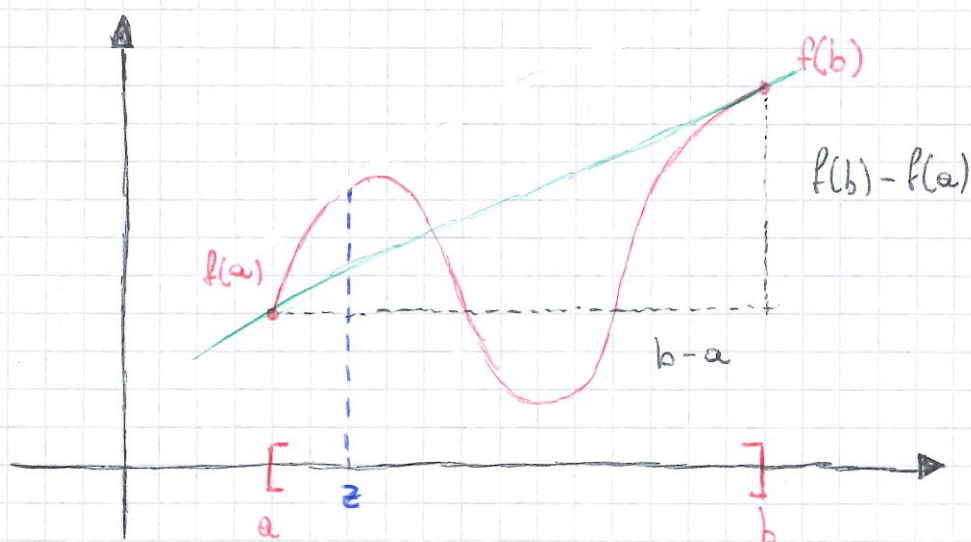
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = (3x^2) = 0$, ma $x_0 = 0$ NON È né un punto di MAX. LOCALE né un punto di MIN. LOCALE!



TEOR (di LAGRANGE): Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione CONTINUA in $[a, b]$ e derivabile in ogni punto di (a, b) . Allora $\exists z \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z)$$



CONSEGUENZE del Teor. di LAGRANGE

(1) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un INTERVALLO, e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Allora:

f è costante in $I \Leftrightarrow \exists f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

(2) TEST DI MONOTONIA: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un INTERVALLO, e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in OGNI punto di I . Allora:

f è MONOTONA CRESCENTE
(DECRESCENTE) in $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in I$.

Dim (\Rightarrow , f CRESCENTE): Sia $x_0 \in I$ fissato. Poiché f è monotona CRESCENTE in I ($f(x) \leq f(y)$ se $x, y \in I$, $x \leq y$), si ha:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in I, x \neq x_0;$$

dunque, dal Teorema della Permanenza del Segno - (2) segue che

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Dim (\Leftarrow , $f' \geq 0$): Siano $x, y \in I$, $x < y$. Applicando il Teorema di Lagrange ad f sull'intervallo $J = [x, y] \subseteq I$ (si noti che f è derivabile, quindi CONTINUA, in $J \subseteq I$), esiste $z \in (x, y)$ tale che

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) \geq 0;$$

dunque, $f(x) \leq f(y)$ e quindi f è MONOTONA CRESCENTE. #

(3) CRITERIO DI DERIVABILITÀ: Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$.

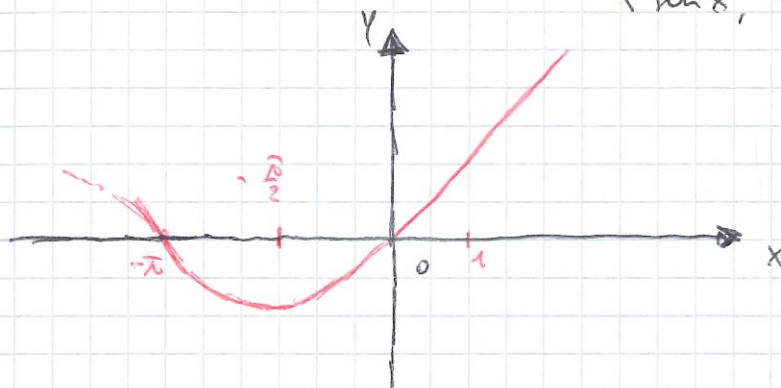
Sia poi $f \in C(I)$ e derivabile in ogni punto di $I - \{x_0\}$.

Allora, SE $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \right) = l \in \hat{\mathbb{R}}$, si ha:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = l.$$

Es: Consideriamo la funzione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ \sin x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Si vede "facilmente" che $f \in C(\mathbb{R})$ ($\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$) e che f è DERIVABILE in OGNI punto di $\mathbb{R} - \{0\}$, dove si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ \cos x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Possiamo allora applicare il criterio precedente:

$$\bullet \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 \Rightarrow f'_+(0) = 1;$$

$$\bullet \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \Rightarrow f'_-(0) = 1.$$

Perché $\exists f'_+(0), f'_-(0)$ e $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$, allora $\exists f'(0) = 1$

Oss (!): Il precedente criterio è INEFFICACE se $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ ($\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$).
In questo caso, la derivabilità di f in x_0 va studiata USANDO la
DEFINIZIONE $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$.

Dim (del Teor. di LAGRANGE): Consideriamo la retta passante per i
punti $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, di equazione

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

e definiamo la funzione $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - r(x)$.
Dalle ipotesi su f segue che:

- (1) $g \in C([a, b])$ (poiché f, r lo sono);
- (2) $g(a) = g(b) = 0$; (poiché $r(a) = f(a)$, $r(b) = f(b)$);
- (3) g è DERIVABILE in OGNI punto di (a, b) , e

$$g'(x) = f'(x) - r'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (*)$$

Dunque, per dimostrare il Teorema occorre provare che ESISTE un punto
 $z \in (a, b)$ tale che $g'(z) = 0$ (grazie a (*)).

Ora, poiché $g \in C([a, b])$, per il Teorema di Weierstrass esistono due
punti $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che

$$g(x_m) \leq g(x) \leq g(x_M) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (o)$$

Se $x_m, x_M \in \{a, b\}$, dalla proprietà (2) e da (o) segue che

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow g'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Se invece, **Almeno uno** Tra x_m, x_n appartiene ad (a, b) , diciamo x_m , dal Teorema di Fermat (si noti che $x_m \in (a, b)$ è un punto di minimo globale per f , e f è DERIVABILE in x_m) segue che

$$g'(m) = 0$$

In ogni caso, quindi, $\exists z \in A(a, b)$ Tale che $g'(z) = 0$. #

DERIVATE di ORDINE SUPERIORE

NOTA: Da qui in poi, supporremo SEMPRE che $A \subseteq D(A)$; Tale proprietà è vera, ad esempio, se A è un INTERVALLO.

DEF (DERIVATE di ORDINE SUPERIORE): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (con $A \subseteq D(A)$), $x_0 \in A$. Diciamo che f è DUE VOLTE DERIVABILE in x_0 se:

- (1) f è derivabile in ogni punto di A ;
- (2) la funzione f' è DERIVABILE in x_0 .

In questo caso, si pone

$$f^{(2)}(x_0) = (f')'(x_0) = f''(x_0)$$

DERIVATA SECONDA
di f in x_0

In modo analogo si dà la definizione di funzione n volte derivabile in x_0 ($n \geq 1$) e di DERIVATA n -ESIMA di f in x_0 ($f^{(n)}(x_0)$).

DEF (SPAZI C^n): Siano $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che f è di classe C^n in A , e scriviamo $f \in C^n(A)$ se:

• $f \in C(A)$;

• $\exists f', f^{(2)}, \dots, f^{(n)} \in C(A)$.

Diciamo poi che f è di classe C^∞ in A , e scriviamo $f \in C^\infty(A)$, se

$$f \in C^n(A) \quad \forall n \geq 1$$

Es: Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Sappiamo che $\exists f'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
allora $\exists f^{(2)}(x) = (f')'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Procedendo così, si trova che

$$\exists f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 1$$

Donque, poiché $f(x) = e^x \in C(\mathbb{R})$, allora $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Es: Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Sappiamo che $\exists f'(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
allora $\exists f^{(2)}(x) = (f')'(x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Procedendo così, si trova

$$\exists f^{(n)} \in C(\mathbb{R}) \quad \forall n \geq 1,$$

e dunque $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Oss (!): Poiché le derivate n -esime SONO DERIVATE (PRIME) di funzioni,
Tutte le regole di derivazione viste si APPLICANO! Ad esempio, se

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin x$$

allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x;$$

$$f^{(2)}(x) = (f')'(x) = \cos x + 1 \cdot \cos x + x(-\sin x) = 2\cos x - x \sin x$$

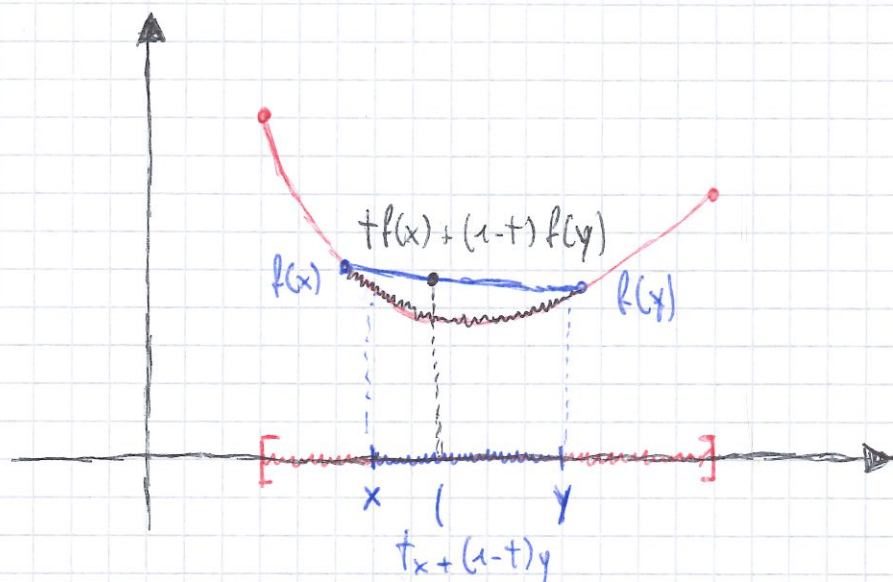
;

In particolare, $\exists f^{(n)} \in C(\mathbb{R}) \quad \forall n \geq 1 \rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R})$

FUNZIONI CONVESSE

DEF (FUNZIONE CONVESSA/CONCAVA): Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un INTERVALLO, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.
Diciamo che f è CONVESSA (CONCAVA) in I se

$$f(tx + (1-t)y) \leq (\geq) tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1].$$



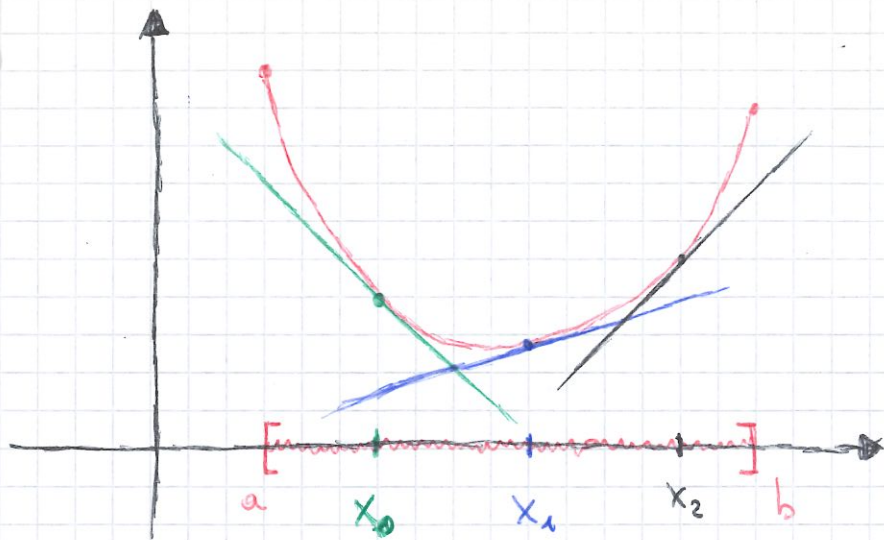
Oss: Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f è CONCAVA in I se e solo se $(-f)$ è CONVESSA in I .

TEOR(!): Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un INTERVALLO, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia DERIVABILE in OGNI punto di I . Sono EQUIVALENTI le affermazioni:

- (1) f è CONVESSA (CONCAVA) in I ;
- (2) la funzione f' è MONOTONA CRESCENTE (DECRESCENTE);
- (3) $f(x) \geq (\leq) f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in I$.

In particolare, se f è DUE VOLTE derivabile in OGNI punto di I , allora

$$\begin{array}{l} f \text{ è CONVESSA} \\ \text{(CONCAVA) in } I \end{array} \iff f''(x) \geq (\leq) 0 \quad \forall x \in I.$$



DEF (Punto di Flessso): Siano I un intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Sia poi $x_0 \in I$. Diciamo che x_0 è un **PUNTO di FLESSO** per f se $\exists r > 0$ tale che

- (1) $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I$;
- (2) f è **CONVESSA (CONCAVA)** in $(x_0 - r, x_0]$ e **CONCAVA (CONVESSA)** in $[x_0, x_0 + r)$.

Es: Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Sappiamo che $\exists f'(x) = 3x^2 \forall x \in \mathbb{R}$, e dunque $\exists f^{(2)}(x) = (f')'(x) = 6x \forall x \in \mathbb{R}$; f è quindi **due volte** derivabile in **ogni punto** di \mathbb{R} , e possiamo applicare il Teorema precedente:

- $f^{(2)}(x) \geq 0 \forall x \geq 0 \Rightarrow f$ è **CONVESSA** in $[0, +\infty)$;
- $f^{(2)}(x) = 6x \leq 0 \forall x \leq 0 \Rightarrow f$ è **CONCAVA** in $(-\infty, 0]$.

In particolare, $x_0 = 0$ è un **punto di FLESSO** per f .

APPLICAZIONE allo STUDIO DI FUNZIONE: Dato $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, grazie a quanto visto finora siamo in grado di tracciare il **grafico** preciso considerando i punti seguenti:

- (1) DOMINIO "NATURALE" di f ;
- (2) INTERSEZIONI con Assi e SEGNO (se possibile);
- (3) LIMITI e **ASINTOTI**;
- (4) MONOTONIA e punti di MAX./MIN. (studio di f')
- (5) CONVESSITÀ e punti di FLESSO (studio di f'').

NOTA: Se $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diciamo che:

- $x_0 \in \mathbb{R}$ è un **ASINTOTO VERTICALE** se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm \infty$
- $y = l$ è un **ASINTOTO ORIZZONTALE** se $l \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = l$
- $y = mx + q$ ($m \neq 0, q \in \mathbb{R}$) è un **ASINTOTO OBLIQUO** se

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - mx).$$

$$(f(x) \sim mx \text{ per } x \rightarrow \pm \infty)$$

Formola di Taylor per Funzioni C^n

DEF (Polinomio di Taylor): Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$. Sia poi $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione DERIVABILE n VOLTE in x_0 ($n \geq 1$).

Chiameremo POLINOMIO di TAYLOR di f (di GRADO n , in x_0) il polinomio

$$T_{n,x_0}(f) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m \quad (\text{con } f^{(0)} = f).$$

UN PAIO DI ESEMPLI:

(1) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, e sia $x_0 = 0$. Sappiamo che f , dato un qualsiasi $n \geq 1$, è DERIVABILE n volte in x_0 ($f \in C^\infty(\mathbb{R})$); inoltre

• "calcolate in $x=0$ "

$$f^{(m)}(0) = (e^x)_{x=0} = 1 \quad \forall 0 \leq m \leq n.$$

Allora $T_{n,0}(f) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!}.$

(2) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, e sia $x_0 = 0$. Dato $n \geq 1$, $n = 2N+1$ (con $N \geq 0$, cioè n È DISPARI), sappiamo che f è derivabile n volte in x_0 ($f \in C^\infty(\mathbb{R})$); inoltre

$$f(0) = \sin 0 = 0;$$

$$f^{(4)}(0) = (\sin x)_{x=0} = 0;$$

$$f'(0) = (\cos x)_{x=0} = 1;$$

$$f^{(5)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(0) = (-\sin x)_{x=0} = 0;$$

$$f^{(3)}(0) = (-\cos x)_{x=0} = -1$$

Allora $T_{n,0}(f) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^N \frac{x^{2N+1}}{(2N+1)!}$

Oss (1): Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$. Sia poi $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile (una volta) in x_0 . Allora:

$$T_{1,x_0}(f) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \text{ (RETTA TANGENTE)}$$

Oss (2): Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$. Sia poi $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione n volte derivabile in x_0 ($n \geq 1$). Allora:

$$T_{n,x_0}(f)(x_0) = f(x_0);$$

$$T'_{n,x_0}(f)(x) = (f'(x_0) + f^{(2)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1})$$

$$\vdots \Rightarrow T'_{n,x_0}(f)(x_0) = f'(x_0)$$

In generale, $T^{(m)}_{n,x_0}(f)(x_0) = f^{(m)}(x_0) \quad \forall 0 \leq m \leq n$.

TEOR (FORMULA DI TAYLOR con RESTO DI PEANO): Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$. Sia poi $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione n volte derivabile nel punto x_0 ($n \geq 1$). Allora:

$$f(x) = T_{n,x_0}(f) + o((x-x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0. \quad (*)$$

Se poi $p(x)$ è un altro polinomio di grado n tale che $f(x) = p(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \rightarrow x_0$, allora $p(x) = T_{n,x_0}(f)$ (cioè $T_{n,x_0}(f)$ è l'unico per cui vale $(*)$).

UN PAIO DI ESEMPLI.

(1) Applicando il teorema precedente alla funzione $f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$, (e scegliendo $x_0 = 0$), possiamo scrivere ($\forall n \geq 1$):

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0$$
$$= o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

(2) Applicando il Teorema precedente alla funzione $f(x) = \sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$ (e scegliendo $x_0 = 0$), possiamo scrivere ($\forall N \geq 0$)

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^N \frac{x^{2N+1}}{(2N+1)!} + O(x^{2N+2})}_{O(x)} \text{ per } x \rightarrow 0$$

Oss (!): Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Poiché tutte le derivate di ORDINE PARI di f si ANNULLANO in $x_0 = 0$, possiamo scrivere

$$\sin x = \underbrace{x}_{T_{1,0}(f)} + O(x^2) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{T_{3,0}(f)} + O(x^4) = \dots = \sum_{m=0}^N (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + O(x^{2N+2})$$

Es (!): Scriviamo $T_{3,0}(f)$, con $f(x) = e^{\sin x} \in C^\infty(\mathbb{R})$. A tale scopo osserviamo che, poiché $t = \sin x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + O(t^3) \\ &= 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + O(\underbrace{\sin^3 x}_{\sim x} \text{ per } x \rightarrow 0) \\ &= 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + O(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Da qui, poiché $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^3)$ per $x \rightarrow 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^3)\right)^3 + O(x^3) \\ &= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{1}{2}(x^2 + O(x^3)) + \frac{1}{6}(\cancel{x^3} + O(x^3)) + O(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Dunque, per l'unicità di $T_{3,0}(f)$, concludiamo che $T_{3,0}(f) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Vogliamo ora dimostrare la formula di Taylor con resto di Peano. Per fare questo, useremo il seguente teorema.

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $x_0 \in D(I)$.
Siano poi $f, g: I - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

- (1) f, g sono derivabili in ogni punto di $I - \{x_0\}$;
- (2) $\exists V_0 \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $g(x), g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \cap V_0 - \{x_0\}$;
- (3) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ oppure $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$.

Allora, se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \hat{\mathbb{R}}$, si ha $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

DIM (FORMULA DI TAYLOR, (*)): Tenuto conto della definizione di "o piccolo", per dimostrare (*) dobbiamo mostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n, x_0}(f)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad (*),$$

Ora, poiché f è derivabile n volte in x_0 , sappiamo che:

- (1) $\exists f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x) \quad \forall x \in I$;
- (2) la funzione $f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0 ;

dunque, per provare (*) usiamo il Teorema di De l'Hôpital. Posto

$$f_1(x) = f(x) - T_{n, x_0}(f), \quad g_1(x) = (x - x_0)^n,$$

valgono i fatti seguenti:

- (1) f_1, g_1 sono derivabili in ogni punto di I
- (2) $g_1(x) = (x - x_0)^n, g_1'(x) = n(x - x_0)^{n-1} \neq 0 \quad \forall x \in I - \{x_0\}$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = f(x_0) - T_{n, x_0}(f)(x_0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = 0$$

di conseguenza, (\circ) VALG SS

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'_{n, x_0}(f)}{n(x-x_0)^{n-1}} = 0 \quad (\circ)_1$$

Per dimostrare $(\circ)_1$ RIUSIAMO il Teorema di De l'Hôpital: posto

$$f_2(x) = f'(x) - T'_{n, x_0}(f), \quad g_2(x) = n(x-x_0)^{n-1}$$

valgono i ltt: seguenti

(1) f_2, g_2 sono derivabili in ogni punto di I ;

(2) $g_2(x) = n(x-x_0)^{n-1}$, $g_2'(x) = n(n-1)(x-x_0)^{n-2} \neq 0 \quad \forall x \in I - \{x_0\}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = f'(x_0) - T'_{n, x_0}(f)(x_0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x) = 0$.

Di conseguenza, $(\circ)_1$ (e quindi (\circ)) VALG SS

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(2)}(x) - T^{(2)}_{n, x_0}(f)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = 0 \quad (\circ)_2$$

Procedendo in questo modo, dopo $n-1$ applicazioni del Teorema di De l'Hôpital, vediamo che (\circ) VALG SS

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}_{n, x_0}(f)}{n! (x-x_0)} = 0$$

Ora, poiché $T^{(n-1)}_{n, x_0}(f) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$ e poiché $f^{(n-1)}$ è DERIVABILE in x_0 , otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_{n,x_0}^{(n-1)}}{n!(x-x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x)(x-x_0)}{x-x_0} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{n!} \left\{ \underbrace{\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}}_{\rightarrow f^{(n)}(x_0)} - f^{(n)}(x_0) \right\} = 0,$$

e dunque, procedendo a ritroso, concludiamo che $(*)$ VALG. $\#$

Teor (Formula di TAYLOR con resto di LAGRANGE): Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f \in C^{n+1}(I)$ ($n \geq 1$). Allora, per ogni $x_0, x \in I$ si ha:

$$f(x) = T_{n,x_0}(f) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1},$$

dove ξ è un punto "opportuno" tra x_0 ed x .

Es: Applicando il Teorema precedente alla funzione $f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$, e scegliendo $x_0 = 0, x = 1$, possiamo scrivere

$$e = f(1) = \underbrace{\sum_{m=0}^n \frac{1}{m!}}_{T_{n,0}(f)(1)} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \quad \forall n \geq 1.$$

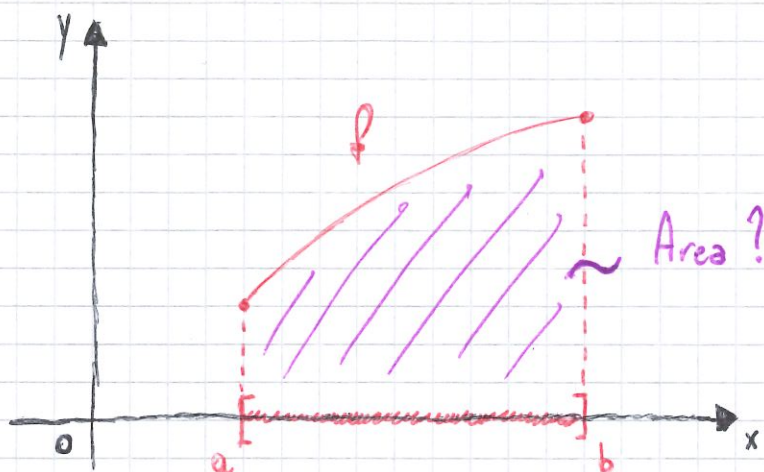
per un "opportuno" $\xi \in (0,1)$. Dunque, poiché $2 < e < 3$ (e quindi si ha $1 < e^\xi < 3$), otteniamo:

$$\left| e - \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} \quad \forall n \geq 1.$$

Di conseguenza, fissata una qualunque "tolleranza" $\varepsilon > 0$, possiamo approssimare e "a meno" di ε se n è abbastanza grande!

INTEGRALE DI RIEMANN

PROBLEMA: Data una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, Vogliamo DEFINIRE e CALCOLARE l'area del sottografico di f .



Sia quindi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione LIMITATA, cioè

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \text{ tale che } m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

(in generale, NON chiediamo che $m, M \in f([a, b])$, cioè non chiediamo che f abbia punti di MAX/MIN globale). Dato $n \geq 1$, scomponiamo $[a, b]$ in n sottointervalli di uguale lunghezza: consideriamo i punti

$$x_m = a + \frac{b-a}{n} \cdot m \quad (m = 0, 1, \dots, n)$$

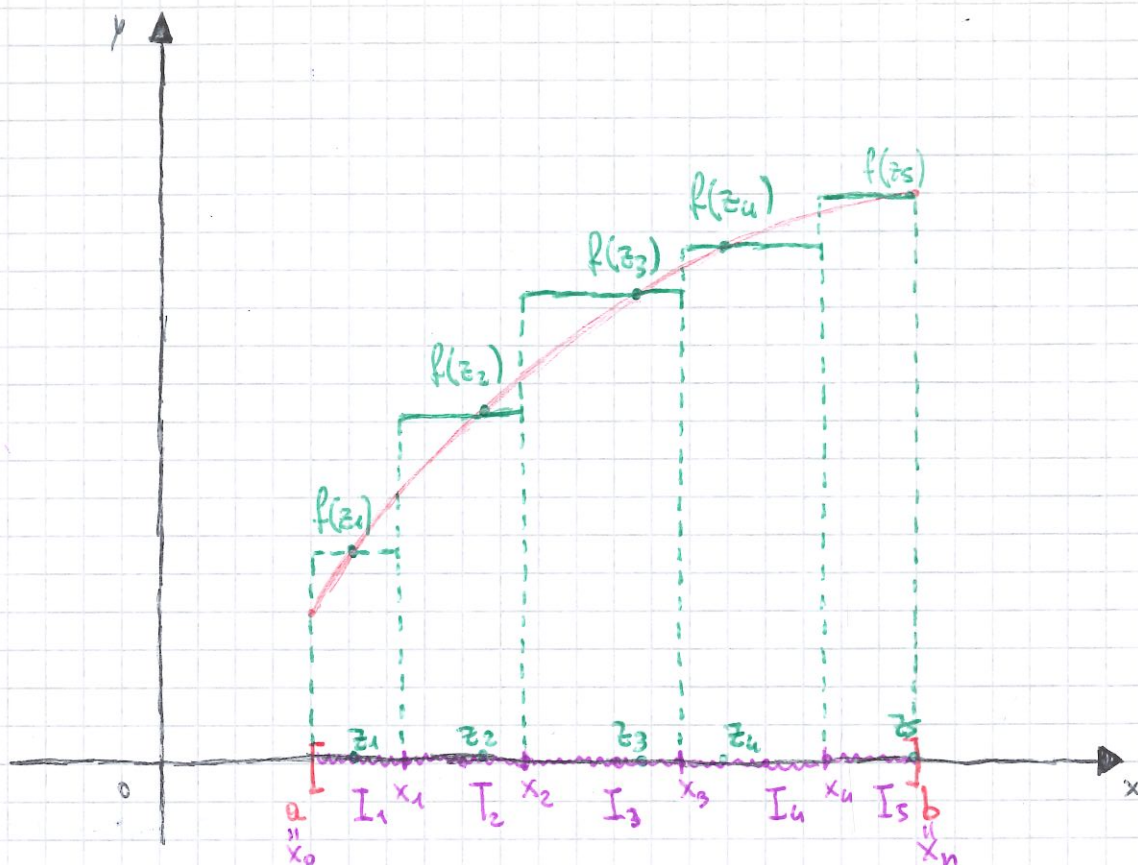
e definiamo $I_m = [x_{m-1}, x_m] \subseteq [a, b]$ ($m = 1, \dots, n$).



(Osserviamo che $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, e $x_m - x_{m-1} = \frac{b-a}{n} \quad \forall m = 1, \dots, n$)

Scegliamo poi AD ARBITRIO n punti z_1, \dots, z_n tale che $z_m \in I_m$ ($m = 1, \dots, n$) e definiamo la n -ESIMA SOMMA DI RIEMANN di f

$$S_n(f, \{z_n\}) = \sum_{m=1}^n f(z_m) (x_m - x_{m-1})$$



(se $f \geq 0$ in $[a, b]$, $S_n(f, \{z_m\})$ rappresenta la somma delle aree degli n rettangoli aventi base I_1, \dots, I_n e altezza $f(z_1), \dots, f(z_n)$).

DEF (INTEGRAL): Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diciamo che f è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$, e scriviamo $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$, se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, \{z_m\}) = l \quad \text{INDIPENDENTEMENTE DALLA} \\ \text{SCELTA dei punti } z_1, \dots, z_m$$

In tal caso, l si chiama integrale di f in $[a, b]$, e si usa la notazione

$$l = \int_a^b f(x) dx.$$

CONDIZIONI SOFF. DI INTEGRABILITÀ.

TEOR: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione LIMITATA e con un NUMERO FINITO di punti di discontinuità. Allora $f \in R_{[a, b]}$. In particolare, se $f \in C([a, b])$ (e dunque LIMITATA, per il Teorema di Weierstrass), allora $f \in R_{[a, b]}$.

TEOR: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione MONOTONA (e dunque LIMITATA, perché $f(x)$ è compreso tra $f(a)$ e $f(b)$). Allora $f \in R_{[a, b]}$.

Es (!): Consideriamo la funzione di Dirichlet

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Allora, f non è integrabile in $[0, 1]$. Infatti, dato $n \geq 1$, scomponiamo $[0, 1]$ in n sotto intervalli di uguale lunghezza, consideriamo i punti

$$x_m = \frac{m}{n} \quad (m = 0, 1, \dots, n)$$

e definiamo $I_m = [x_{m-1}, x_m]$ ($m = 1, \dots, n$). Scegliamo poi n punti z_1, \dots, z_n tale che $z_m \in I_m$ ($m = 1, \dots, n$). Allora:

(1) se $z_m \in \mathbb{Q} \quad \forall m = 1, \dots, n$, si ha:

$$\begin{aligned} S_n(f, \{z_m\}) &= \sum_{m=1}^n f(z_m) \cdot (x_m - x_{m-1}) = \sum_{m=1}^n (x_m - x_{m-1}) \\ &= (\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \dots + (x_n - \cancel{x_{n-1}}) \\ &= x_n - x_0 = 1 \end{aligned}$$

(2) se, invece, $z_m \notin \mathbb{Q} \quad \forall m = 1, \dots, n$ si ha

$$S_n(f, \{z_m\}) = \sum_{m=1}^n f(z_m) (x_m - x_{m-1}) = 0.$$

Quindi in (1) il limite sarà "1" e in (2) sarà "0", pertanto poiché il limite di $S_n(f, \{z_m\})$ ESISTE MA DIPENDE dalla scelta dei punti z_1, \dots, z_n , la funzione f NON È INTEGRABILE in $[0, 1]$.

TEORE (ALGEBRA delle FUNZIONI INTEGRABILI): Siano $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.
Valgono allora i fatti seguenti:

$$(1) \alpha f + \beta g \in \mathcal{R}_{[a,b]} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ e}$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$(2) f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}:$$

$$(3) \text{ se } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b], \text{ allora } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Inoltre, scelto un qualsiasi $\varepsilon \in (a,b)$, si ha:

$$f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}_{[a,\varepsilon]} \text{ e } f \in \mathcal{R}_{[\varepsilon,b]}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^b f(x) dx$$

Calcolo "Esplicito" dell' integrale

DEF (PRIMITIVA): Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Chiamiamo **PRIMITIVA di f in I** una qualsiasi funzione $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\exists F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Ese: Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. La funzione, allora, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{3} x^3$$

È una primitiva di f in \mathbb{R} ($\exists F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

Oss (!): Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Sia poi $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di f in I . Allora, scelto un qualsiasi $c_0 \in \mathbb{R}$, la funzione $G(x) = F(x) + c_0$ ($x \in I$) è una **PRIMITIVA** di f in I .

Viceversa, se $F_1, F_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ sono primitive di f , allora

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I;$$

➤ dunque, poiché I è un intervallo, sappiamo che $\exists c_0 \in \mathbb{R}$ tale che

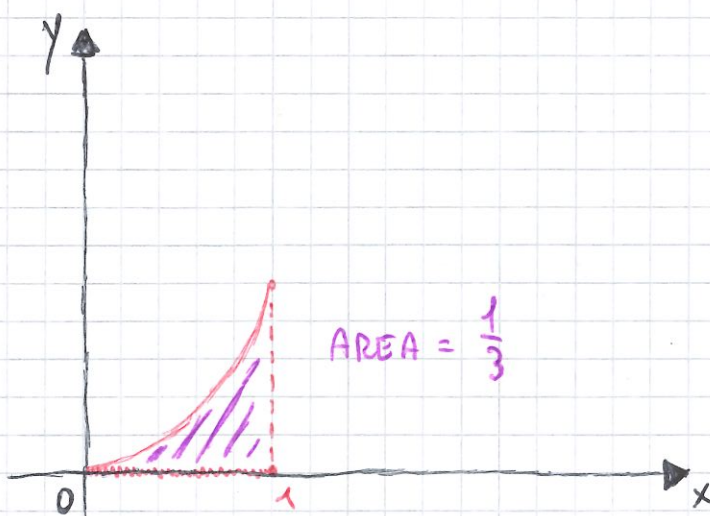
$$F_1(x) - F_2(x) = c_0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) + c_0 \quad \forall x \in I$$

TEOR (FORMULA FONDAMENTALE del CALCOLO INTEGRALE): Sia $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ e supponiamo esista una primitiva $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ di f . Allora:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \underbrace{F(b) - F(a)} \\ &= [F(x)]_{x=a}^{x=b} \end{aligned}$$

Es(!): Sia $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Anzitutto, poiché $f \in \mathcal{C}([0,1])$, sappiamo che $f \in \mathcal{R}_{[0,1]}$; allora, poiché abbiamo visto che la funzione $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ è una primitiva di f , si ha

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} \cdot (1)^3 - \frac{1}{3} \cdot (0)^3 = \frac{1}{3}.$$



Dim: Fissato un qualsiasi $n \geq 1$, scomponiamo l'intervallo $[a, b]$ in n sotto-intervalli aventi stessa lunghezza: consideriamo i punti

$$x_m = a + \frac{b-a}{n} \cdot m \quad (m = 0, 1, \dots, n)$$

e poniamo $I_m = [x_{m-1}, x_m]$ ($m = 1, \dots, n$). Scelti AD ARBITRIO n punti z_1, \dots, z_n con $z_m \in I_m$ ($m = 1, \dots, n$), si ha

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \dots + (F(x_1) - F(x_0)) \\ &= \sum_{m=1}^n (F(x_m) - F(x_{m-1})). \end{aligned}$$

D'altra parte, poiché F è una PRIMITIVA di f ($\exists F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$) possiamo applicare il Teor. di Lagrange ad F in I_m ($m = 1, \dots, n$): dunque, per ogni $m = 1, \dots, n$ ESISTE $z_m \in (x_{m-1}, x_m)$ tale che

$$\frac{F(x_m) - F(x_{m-1})}{x_m - x_{m-1}} = F'(z_m) = f(z_m),$$

e quindi possiamo scrivere

$$F(b) - F(a) = \sum_{m=1}^n f(z_m) \cdot (x_m - x_{m-1}) = S_n(f, \{z_m\})$$

Da qui, poiché $f \in R_{[a,b]}$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, \{z_m\}) = \int_a^b f(x) dx$ INDIPENDENTE-MENTE dalla scelta dei punti z_1, \dots, z_m) concludiamo che

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, \{z_m\}) = \int_a^b f(x) dx \quad \#$$

TEOR (di INTEGRAZIONE per PARTI): Siano $f, g \in C^1([a, b])$. Allora:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) g(x) dx &= \underbrace{(f(b)g(b) - f(a)g(a))}_{\substack{= [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b}}} - \int_a^b f(x) g'(x) dx \\ &= [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} \end{aligned}$$

Oss: L'ipotesi $f, g \in C^1([a, b])$ assicura che le funzioni $f'g$ e fg' SONO CONTINUE (quindi INTEGRABILI) in $[a, b]$.

Es: Calcoliamo l'integrale $I = \int_0^1 x \cdot e^x dx$. A tale scopo usiamo il Teorema di Integrazione per Parti con la scelta

$$f(x) = e^x (\Rightarrow f'(x) = e^x), \quad g(x) = x (\Rightarrow g'(x) = 1).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^x dx &= \int_0^1 f'(x) \cdot g(x) dx = (f(1)g(1) - f(0)g(0)) - \int_0^1 f(x) g'(x) dx \\ &= e - \int_0^1 e^x dx. \end{aligned}$$

(usando la Formula Fondamentale del Calcolo)

$$= e - [e^x]_{x=0}^{x=1} = e - (e - 1) = 1$$

TEOR (del CAMBIO DI VARIABILI): Sia $f \in C([a, b]) (\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{[a, b]})$ e sia $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$, con $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Allora

$$(I) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx \quad (" \varphi(t) = x, \varphi'(t) dt = dx ")$$

Se, in più, φ è BIUNIVOCA da $[\alpha, \beta]$ in $[a, b]$, allora

$$(II) \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)| dt \quad (" x = \varphi(t), dx = \varphi'(t) dt ")$$

Es (1): Calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{e^t}{1 + \underbrace{e^{2t}}_{(e^t)^2}} dt$$

A tale scopo, usiamo il Teorema del Cambio di Variabile - (I) con la scelta $\varphi(t) = e^t (\Rightarrow \varphi'(t) = e^t)$. Dunque si ha:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{1}{1+(e^t)^2} \cdot e^t dt = \int_0^1 \frac{1}{1+(\varphi(t))^2} \cdot \varphi'(t) dt \\
 &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \left[\arctan x \right]_{x=1}^{x=e} = \arctan e - \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Es(2): Calcoliamo l'integrale $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. A tale scopo, usiamo il Teorema del Cambio di Variabile - (I) con la scelta

$$\varphi: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1], \quad \varphi(t) = \sin t = x$$

Perché φ è BIUNIVOCa da $[0, \frac{\pi}{2}]$ in $[0, 1]$ e $\varphi'(t) = \cos t \geq 0 \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, otteniamo la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{f(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{f(\varphi(t))} \cdot \underbrace{\cos t}_{\varphi'(t)} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \quad (\cos t \geq 0 \text{ in } [0, \frac{\pi}{2}]) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) dt \quad (\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt \\
 &= \frac{1}{2} [t]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \sin(2t)}_0 \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

INTEGRALI DI RIEMANN E PRIMITIVO

NOTA: Dato $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, poniamo

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

TEOR. (FONDAMENTALE del CALCOLO INTEGRALE): Sia $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, e sia

$$I_f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \quad I_f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

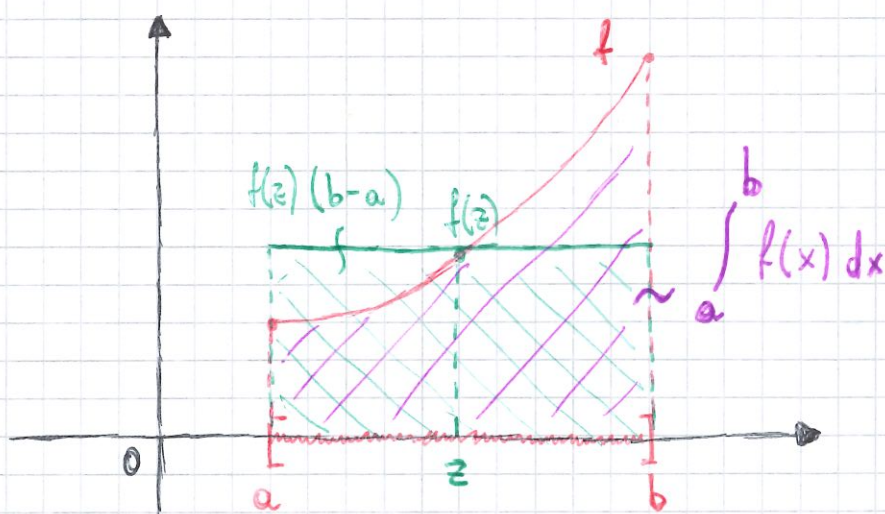
Allora $I_f \in C([a,b])$. Se, di più, $f \in C([a,b]) (\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{[a,b]})$, allora I_f è una PRIMITIVA di f in $[a,b]$, cioè

$$\exists I_f'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Per dimostrare questo teorema, usiamo il seguente

TEOR. (della MEDIA INTEGRALE): Sia $f \in C([a,b]) (\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{[a,b]})$. Allora ESISTE (almeno) un punto $z \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx = f(z).$$



DIM: Anzitutto, poiché $f \in C([a,b])$, per il Teorema di Weierstrass ESISTONO $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a,b].$$

Allora, posto $y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, si ha:

$$\bullet y \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x_m) dx = \frac{1}{b-a} \cdot f(x_m) \cdot (b-a) = f(x_m);$$

$$\bullet y \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x_m) dx = \frac{1}{b-a} \cdot f(x_m) \cdot (b-a) = f(x_m);$$

e dunque $f(x_m) \leq y \leq f(x_m)$. Da qui, poiché sappiamo dal Teorema di Bolzano che $f([a,b])$ è un INTERVALLO, concludiamo che

$$y \in f([a,b]) \Rightarrow \exists z \in [a,b] \text{ tale che } f(z) = y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

DIM (del TEOREMA FONDAM. del CALCOLO): Anzitutto, poiché $f \in R[a,b]$ (e dunque LIMITATA per definizione), ESISTE $M > 0$ tale che

$$-M \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

Allora, FISSATO a piacere $x_0 \in [a,b]$, per ogni $x_0 \leq x \leq b$ si ha:

$$-M(x-x_0) \leq I_f(x) - I_f(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M(x-x_0)$$

$$\Rightarrow |I_f(x) - I_f(x_0)| \leq M|x-x_0| \quad \forall x_0 \leq x \leq b. \quad (1)$$

Analogamente, per ogni $a \leq x \leq x_0$, si ha:

$$-M(x_0-x) \leq I_f(x_0) - I_f(x) = \int_x^{x_0} f(t) dt \leq M(x_0-x)$$

$$\Rightarrow |I_f(x_0) - I_f(x)| \leq M|x-x_0| \quad \forall a \leq x_0 \leq x. \quad (2)$$

Combinando (1)-(2) otteniamo quindi:

$$0 \leq |I_f(x) - I_f(x_0)| \leq M|x-x_0| \quad \forall x \in [a,b].$$

Da qui, poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} M|x - x_0| = 0$, per il Teorema del Confronto concludiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} (I_f(x) - I_f(x_0)) = 0$; dunque

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} I_f(x) = I_f(x_0)$$

e quindi (per la ARBITRARIETÀ di x_0) $I_f \in C([a, b])$

Supponiamo ora $f \in C([a, b])$ e mostriamo che I_f è una PRIMITIVA di f (in $[a, b]$). A tale scopo, FISSAMO a PIACERE $x_0 \in [a, b]$ e usiamo il Teorema della Media Integrale: per ogni $x \in [a, b]$, si ha:

$$\frac{I_f(x) - I_f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(z_x).$$

dove z_x è un punto "opportuno" compreso tra x_0 e x ; in particolare, quindi $z_x \rightarrow x_0$ per $x \rightarrow x_0$. Da qui, poiché $f \in C([a, b])$, segue che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{I_f(x) - I_f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(z_x) = f(x_0),$$

e dunque (per la ARBITRARIETÀ di x_0) $\exists I'_f(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$. #

UN PAIO DI CONSEGUENZE

(1) Sia $f \in C([a, b])$ e sia $x_0 \in [a, b]$ FISSATO a PIACERE. Allora la funzione $I_{f, x_0}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$I_{f, x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

è una PRIMITIVA di f in $[a, b]$

(2) Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un INTERVALLO e $f \in C(I)$. Allora FISSATO a PIACERE un punto $x_0 \in I$, la funzione

$$F: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{è una PRIMITIVA di } f \text{ in } I.$$

In particolare, OGNI FUNZIONE CONTINUA ha (almeno)
UNA PRIMITIVA.

Es(!): Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Poiché $f \in C(\mathbb{R})$, sappiamo dal
punto (2) precedente (con $x_0 = 0$) che la funzione

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x |t| dt$$

è una PRIMITIVA di f in \mathbb{R} ! Esplicitamente, si ha:

$$\cdot \text{ se } x \geq 0, \quad F(x) = \int_0^x t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2} x^2;$$

$$\cdot \text{ se } x < 0, \quad F(x) = - \int_x^0 (-t) dt = \int_x^0 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{t=x}^{t=0} = -\frac{1}{2} x^2.$$

In conclusione, quindi:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} x |x|.$$

GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

Lo SPAZIO \mathbb{R}^3

Usiamo come "modello analitico" dello spazio l'insieme

$$\mathbb{R}^3 = \{ \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

su cui definiamo le seguenti OPERAZIONI:

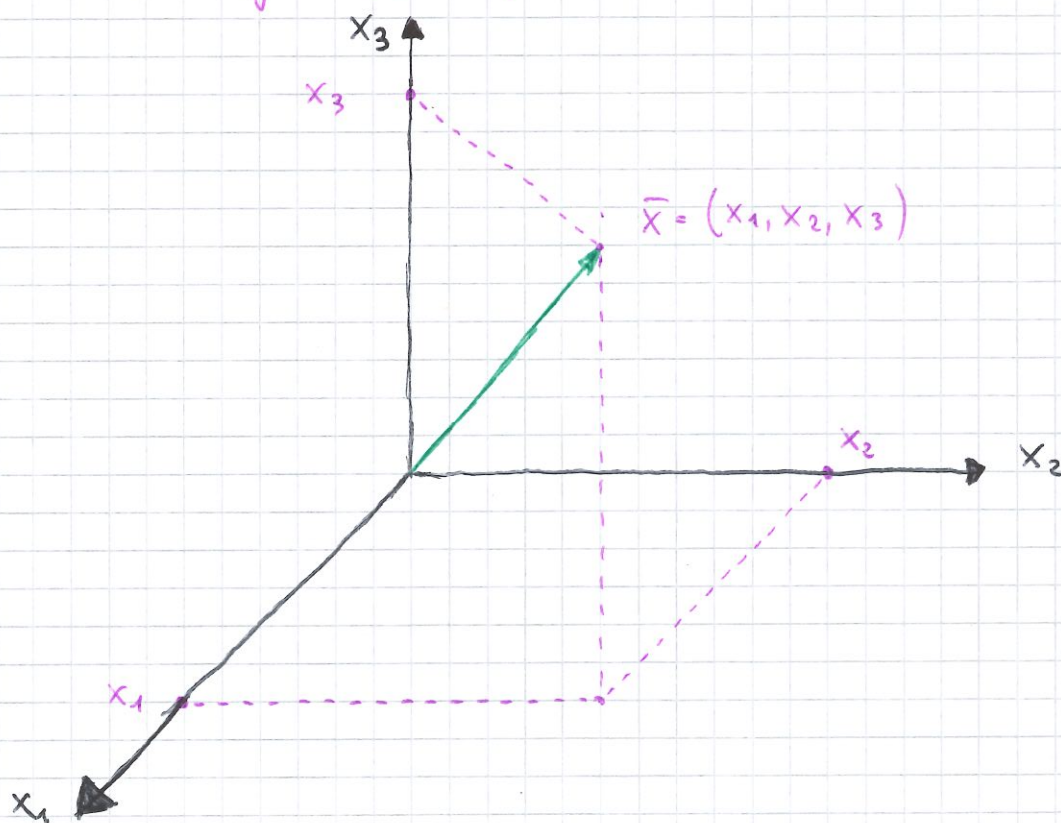
(1) SOMMA, Dati $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$, poniamo

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$$

(2) PRODOTTO PER SCALARE: Dati $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $t \in \mathbb{R}$, poniamo

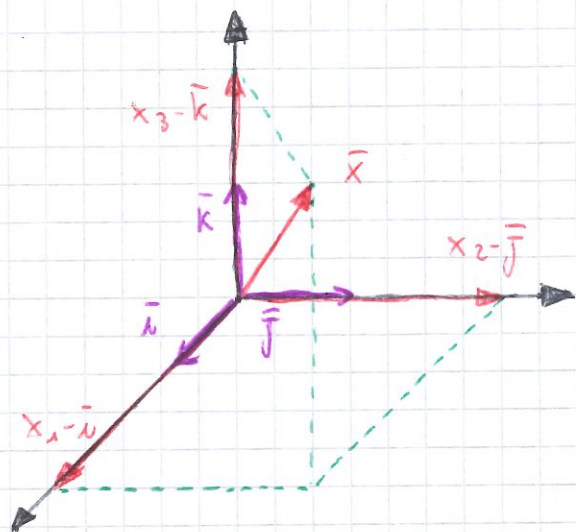
$$t\bar{x} = (tx_1, tx_2, tx_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Gli elementi di \mathbb{R}^3 li penseremo SIA come punti SIA come vettori (applicati nell'origine $(0,0,0)$).



Oss: Posto $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$, $\bar{k} = (0, 0, 1)$, possiamo scrivere ogni vettore $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ come segue

$$\bar{x} = x_1 \bar{i} + x_2 \bar{j} + x_3 \bar{k}.$$



• Prodotto tra Vettori.

(1) **Prodotto scalare**: Dati $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, chiamiamo **prodotto scalare** (di \bar{x} e \bar{y}) il **NUMERO REALE**

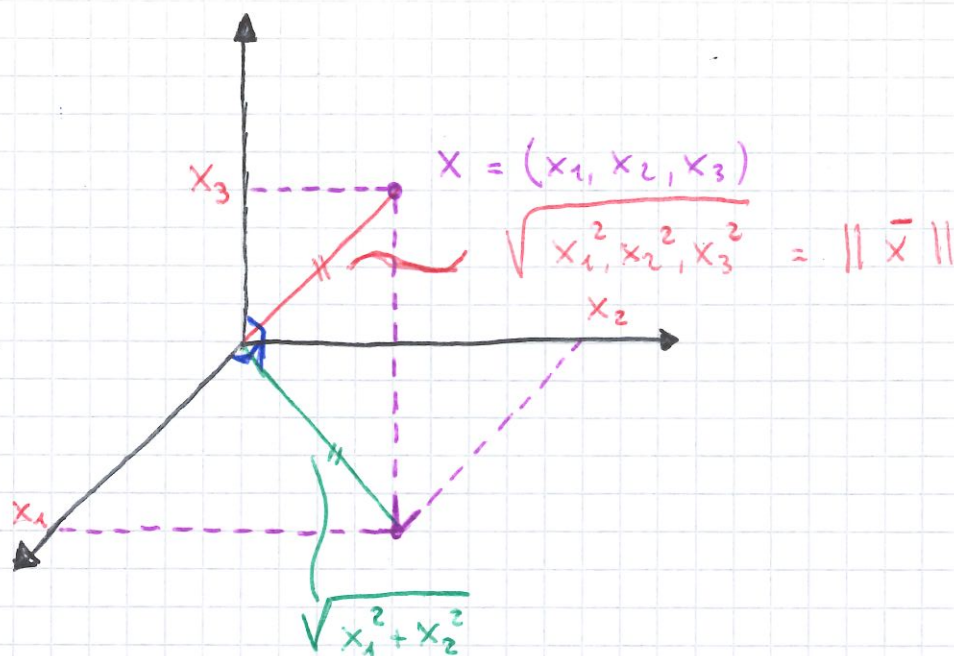
$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

TEOR (Proprietà di $\langle \cdot, \cdot \rangle$): Per ogni $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^3$, si ha:

- (1) $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$;
- (2) $\langle t\bar{x}, \bar{y} \rangle = t \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- (3) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$

DEF (NORMA EUCLIDEA): Dato $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, chiamiamo **NORMA (EUCLIDEA)** di \bar{x} il numero reale

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \geq 0$$



TEOR (PROPRIETÀ di $\|\cdot\|$): Per ogni $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$, si ha:

- (1) $\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}$
- (2) $\|\bar{x}\| \geq 0$ e $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = (0, 0, 0)$;
- (3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$;
- (4) $\|t\bar{x}\| = |t| \cdot \|\bar{x}\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
- (5) $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$ (disuguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ)

"Usando" la proprietà (5) possiamo dare una interpretazione geometrica di \langle, \rangle : infatti, se $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{x}, \bar{y} \neq (0, 0, 0)$, si ha

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \Leftrightarrow \frac{|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} \leq 1;$$

dunque, ESISTE un UNICO $t \in [0, \pi]$ tale che

$$\frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} = \cos(t). \quad (*)$$

Questo UNICO t è l'ANGOLO CONVESSO ($0 \leq t \leq \pi$) tra \bar{x} e \bar{y} , e si denota con $\hat{\bar{x}\bar{y}}$.

Con questa definizione, possiamo scrivere

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \left(\frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} \right) = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \cos(\hat{\bar{x}}\hat{\bar{y}}).$$

L'identità (*) giustifica per la seguente

DEF (VETTORI ORTOGONALI): Dati $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$, diciamo che \bar{x} e \bar{y} sono ORTOGONALI (PERPENDICOLARI) se $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$.

Oss (!): Siano $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{x}, \bar{y} \neq (0,0,0)$. Allora:

$$\bar{x}, \bar{y} \text{ sono ORTOGONALI} \Leftrightarrow \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$$

(*)

$$\Leftrightarrow \cos(\hat{\bar{x}}\hat{\bar{y}}) = 0 \Leftrightarrow \hat{\bar{x}}\hat{\bar{y}} = \frac{\pi}{2}.$$

(2) PRODOTTO VETTORIALE. Dati $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, chiamiamo prodotto vettoriale (di \bar{x} e \bar{y}) il vettore

$$\bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{x} \times \bar{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \in \mathbb{R}^3.$$

TEOR (PROPRIETÀ di \wedge): Per ogni $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^3$, si ha:

$$(1) (\bar{x} + \bar{y}) \wedge \bar{z} = \bar{x} \wedge \bar{z} + \bar{y} \wedge \bar{z};$$

$$(2) (t\bar{x}) \wedge \bar{y} = t(\bar{x} \wedge \bar{y}) \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

$$(3) \bar{x} \wedge \bar{y} = -\bar{y} \wedge \bar{x};$$

$$(4) \langle \bar{x}, \bar{x} \wedge \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \wedge \bar{y} \rangle = 0$$

$$(5) \|\bar{x} \wedge \bar{y}\| = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \sin(\hat{\bar{x}}\hat{\bar{y}}).$$

Oss (!): Dati $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$, il vettore $\bar{x} \wedge \bar{y}$ (così COME LO ABBIAMO DEFINITO) è l'UNICO vettore \bar{v} di \mathbb{R}^3 tale che

$$\cdot \|\bar{v}\| = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \sin(\hat{\bar{x}}\hat{\bar{y}});$$

$$\cdot \bar{v} \text{ sia ORTOGONALE ad } \bar{x} \text{ e ad } \bar{y};$$

$$\cdot (\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}) \text{ sia una "TERNA DESTRA".}$$

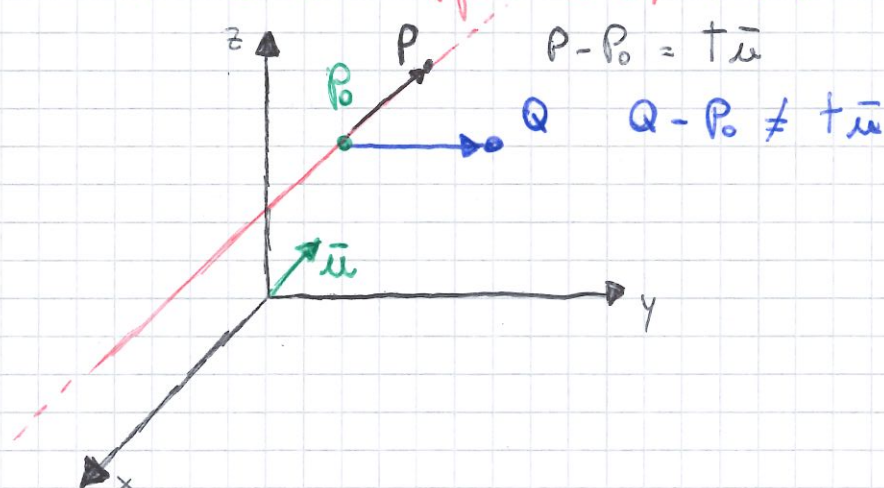
RETTA NELLO SPAZIO

Una retta r nello spazio è UNIVOCAMENTE DETERMINATA da un punto che vi appartiene, diciamo $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, e da un vettore NON Nullo che ne indica la DIREZIONE, diciamo $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. In tal caso, un punto $P = (x, y, z)$ APPARTIENE AD r SS e SOLO SS

$$\exists t \in \mathbb{R} \text{ tale che } (P - P_0) = t\vec{u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = t\alpha \\ y - y_0 = t\beta \\ z - z_0 = t\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$$

Questa è la equazione PARAMETRICA di r : Tutti e soli i punti di r si ottengono AL VARIARE di t (parametro) in \mathbb{R} .



RETTA per DUE PUNTI. Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ DIVERSI tra loro, ESISTE un'UNICA retta r che "passa" per P_1 e P_2 : si tratta della retta passante per P_1 con direzione

$$\vec{u} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \neq (0, 0, 0)$$

Una equazione parametrica di r è quindi

$$r: \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Oss (1): Una stessa retta $r \subseteq \mathbb{R}^3$ può avere più equazioni parametriche "visivamente" diverse tra loro! Consideriamo, ad esempio, la retta r passante per $P_0 = (1, 0, 1)$ con direzione $\bar{u} = (2, 1, 0)$: essa ha la seguente equazione parametrica

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Tale retta, però, passa anche per $P_1 = (-1, -1, 1)$ (che si ottiene per $t = -1$) ed ha la stessa direzione di $\bar{v} = (4, 2, 0) = 2\bar{u}$: allora, un'altra equazione parametrica di r è

$$r: \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

È possibile "passare" da una equazione all'altra con il CAMBIO di PARAMETRO " $t = -1 + 2t$ ".

EQUAZIONE CARTESIANA della RETTA: Data una retta $r \subseteq \mathbb{R}^3$ di equazione parametrica $r: P = P_0 + t\bar{u}$ (con $P_0 \in r$, $\bar{u} \neq (0, 0, 0)$), "eliminando" il parametro t si trova un SISTEMA di 2 EQUAZIONI nelle incognite x, y, z , detto SISTEMA di EQUAZIONI CARTESIANE di r .

Es: Consideriamo la retta $r \subseteq \mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

"Eliminando" il parametro t , si trova

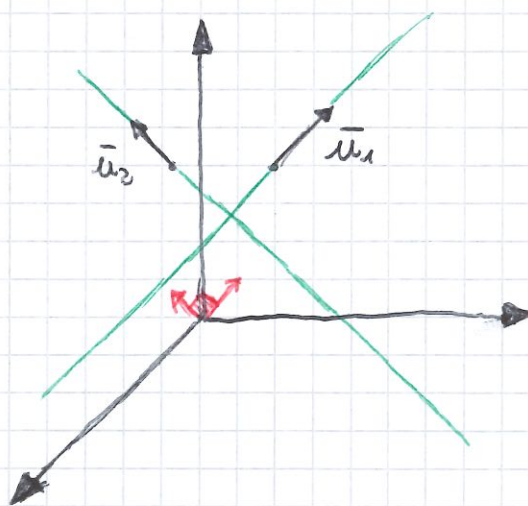
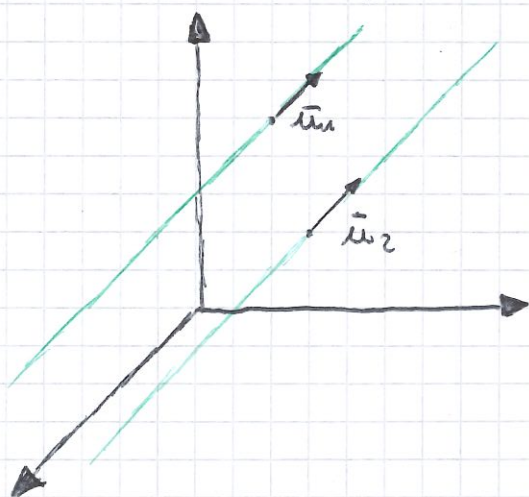
$$r: \begin{cases} x = 1+t \Rightarrow t = x-1 \\ y = 2(x-1) \\ z = 3-(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

che è un sistema di equazioni cartesiane per r . In questa rappresentazione, i punti di r sono tutti e soli i punti di \mathbb{R}^3 le cui coordinate soddisfano il sistema $(*)$.

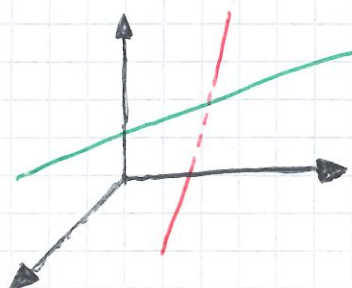
Posizione Reciproca di due rette in \mathbb{R}^3 : Siano $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^3$ due rette (distinte) aventi "vettore-direzione" \vec{u}_1, \vec{u}_2 rispettivamente. Vediamo allora che:

(1) r_1 ed r_2 sono PARALLELE se $\exists t \neq 0$ tale che $\vec{u}_2 = t\vec{u}_1$ (cioè se le due rette hanno la stessa direzione);

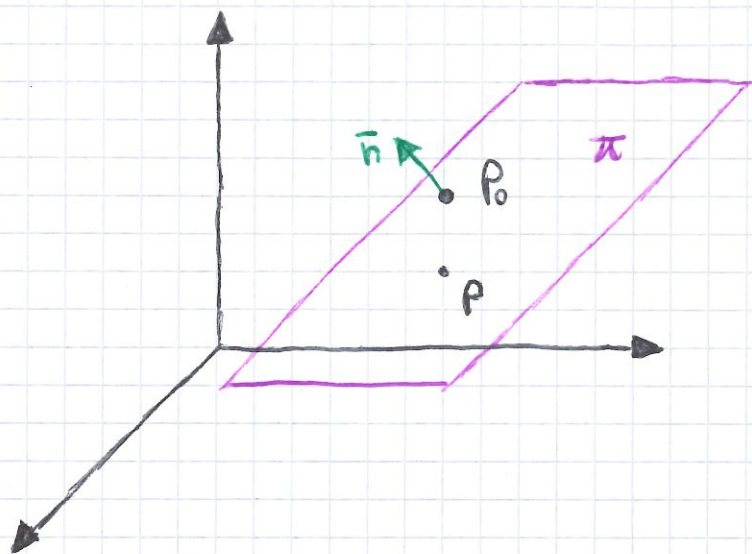
(2) r_1 ed r_2 sono ORTOGONALI se $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$ (cioè se le loro direzioni sono ortogonali).



Oss(!): Al contrario di quanto accade nel piano \mathbb{R}^2 , due rette NON PARALLELE possono NON INTERSECARSI; in tal caso, si parla di RETTE SGHEMBE



PIANI NELLO SPAZIO: Un piano $\pi \in \mathbb{R}^3$ è UNIVOCAMENTE DETERMINATO se conosciamo un punto che vi appartiene, diciamo $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e un vettore AD ESSO ORTOGONALE, diciamo $\vec{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.



In tal caso, un punto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartiene a π se e solo se

$$\langle P - P_0, \vec{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c) \rangle = 0$$

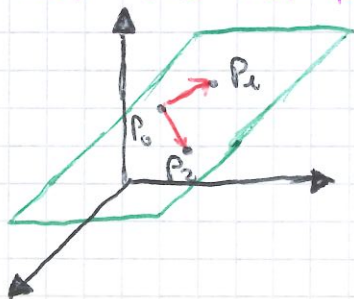
$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad (E)$$

(con $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$). Tale equazione è l'equazione CARTESIANA di π ; i punti di π sono TUTTI e soli i punti di \mathbb{R}^3 le cui coordinate soddisfanno l'equazione (E).

PIANO PER TRE PUNTI: Dati tre punti $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ (distinti e) non ALLINEATI, ESISTE un UNICO piano $\pi \in \mathbb{R}^3$ passante per tali punti; esso è il piano passante per P_0 e ORTOGONALE al vettore

$$\vec{n} = (P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0) \neq (0, 0, 0)$$



Es: Consideriamo i punti $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (1,0,1)$, $P_2 = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$.
 Perché tali punti NON SONO ALLINEATI, ESISTE un UNICO piano $\pi \in \mathbb{R}^3$
 passante per P_0, P_1, P_2 : l'equazione CARTESIANA di π è

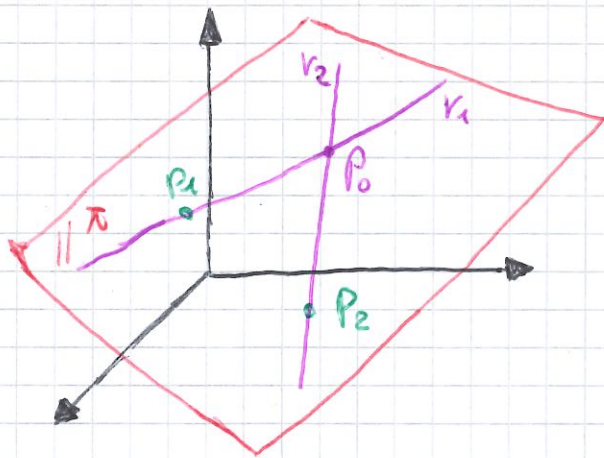
$$\pi: \langle P - P_0, \bar{n} \rangle = 0, \quad \text{dove } \bar{n} = \underbrace{(1,0,1)}_{P_1 - P_0} \wedge \underbrace{(0,1,0)}_{P_2 - P_0}$$

Esplícitamente, poiché $\bar{n} = (-1, 0, 1)$, si ha:

$$\pi: \langle (x, y, z), (-1, 0, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow z - x = 0$$

"PIANO PER DUE RETTE INCIDENTI": Date due rette $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ INCIDENTI
 in un punto P_0 , ESISTE un UNICO PIANO $\pi \in \mathbb{R}^3$ CONTENENTE r_1 ed r_2 ;
 esso è l'unico piano passante per P_0, P_1, P_2 , dove

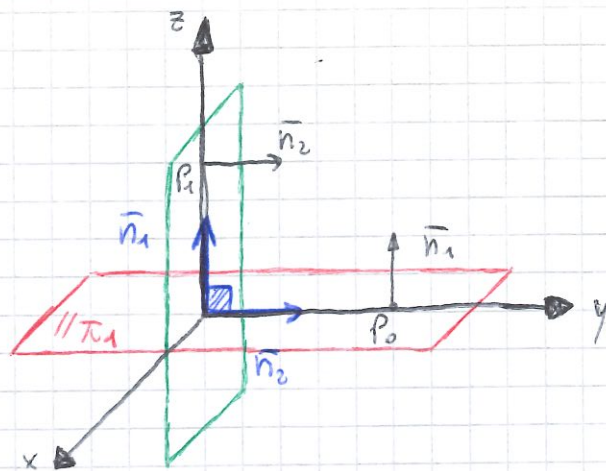
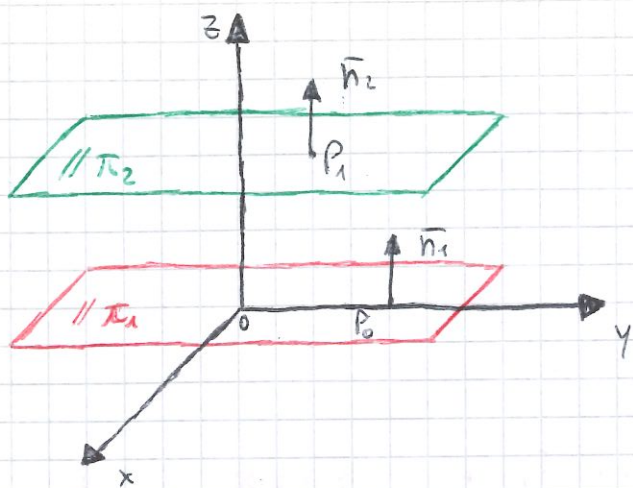
$$P_1 \in r_1, P_1 \notin r_2; \quad P_2 \in r_2, P_2 \notin r_1$$



POSIZIONE RECIPROCA DI DUE PIANI IN \mathbb{R}^3 : Siano $\pi_1, \pi_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ due piani
 (DISTINTI), e siano $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \neq (0,0,0)$ due vettori ORTOGONALI a π_1, π_2
 rispettivamente. Vediamo allora che:

(1) π_1 e π_2 sono PARALLELI se $\exists t \neq 0$ tale che $\bar{n}_2 = t\bar{n}_1$ (cioè se \bar{n}_1
 ed \bar{n}_2 hanno la stessa direzione);

(2) π_1 e π_2 sono ORTOGONALI se $\langle \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle = 0$ (cioè se \bar{n}_1 ed \bar{n}_2
 sono ortogonali tra loro).



Oss(!): Se $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}^3$ sono due piani NON PARALLELI, essi si INTERSECANO NECESSARIAMENTE in una UNICA retta r . In effetti, se

$$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

(con $n_1 = (a_1, b_1, c_1)$ non proporzionale a $n_2 = (a_2, b_2, c_2)$), i due piani si intersecano nella retta r di equazioni CARTESIANE

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

TEORIA DEGLI SPAZI VETTORIALI (REALI)

DEF (R-SPAZIO VETTORIALE): Sia $V \neq \emptyset$. Diciamo che V è un R-SPAZIO VETTORIALE se su V sono definite due operazioni

$$(I) +: V \times V \rightarrow V \quad (\bar{u}, \bar{v}) \rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in V \text{ (SOMMA DI } \bar{u} \text{ E } \bar{v})$$

$$(II) \cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V \quad (t, \bar{u}) \rightarrow t\bar{u} \in V \text{ (PRODOTTO PER SCALARE)}$$

che soddisfanno le seguenti proprietà:

$$(1) (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) \quad \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V;$$

$$(2) \text{ ESISTE un UNICO elemento } 0_V \in V \text{ tale che } \bar{u} + 0_V = 0_V + \bar{u} = \bar{u} \quad \forall \bar{u} \in V;$$

$$(3) \forall \bar{u} \in V \text{ ESISTE un UNICO elemento di } V, \text{ denotato con } -\bar{u}, \text{ tale che}$$
$$\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = 0_V;$$

$$(4) \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V;$$

$$(5) (st)\bar{u} = s(t\bar{u}) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \bar{u} \in V;$$

$$(6) 1 \cdot \bar{u} = \bar{u} \quad \forall \bar{u} \in V;$$

$$(7) (s+t)\bar{u} = s\bar{u} + t\bar{u} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \bar{u} \in V;$$

$$(8) t(\bar{u} + \bar{v}) = t\bar{u} + t\bar{v} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \bar{u}, \bar{v} \in V;$$

Gli elementi di V si chiamano VETTORI (ASTRATTI).

ALCUNI ESEMPLI.

(1) Dato $n \geq 1$, l'insieme

$$V = \mathbb{R}^n = \{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

è un R-sp. vettoriale, con le due operazioni

$$(I) +: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$(II) \cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t\bar{x} = (tx_1, \dots, tx_n).$$

$$\text{Qui, } 0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0) \text{ e } -\bar{x} = (-x_1, \dots, -x_n) \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(2) L'insieme

$$V = \mathbb{R}[x] = \{p(x) : p \text{ è un polinomio a coeff. reali}\}$$

è un \mathbb{R} -sp. vettoriale, con le operazioni

$$(I) + : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], \quad (p+q)(x) = p(x) + q(x);$$

$$(II) \cdot : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}[x], \quad (tp)(x) = tp(x)$$

Qui, $0_{\mathbb{R}[x]}$ è il polinomio nullo, e $(-p)(x) = -p(x) \quad \forall p \in \mathbb{R}[x]$.

(3) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. L'insieme

$$V = C(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è continua in } I\}$$

è un \mathbb{R} -sp. vettoriale, con le due operazioni

$$(I) + : C(I) \times C(I) \rightarrow C(I), \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$(II) \cdot : \mathbb{R} \times C(I) \rightarrow C(I), \quad (tf)(x) = tf(x).$$

Qui $0_{C(I)}$ è la funzione costante 0, e $(-f)(x) = -f(x) \quad \forall f \in C(I)$.

NOTAZIONE: Se V è un \mathbb{R} -sp. vettoriale e $\bar{u}, \bar{v} \in V$, poniamo

$$\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v}).$$

Inoltre, se $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \in V$ e $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ (con $n \geq 1$), il vettore

$$\bar{u} = t_1 \bar{u}_1, \dots, t_n \bar{u}_n = \sum_{m=1}^n t_m \bar{u}_m \in V$$

è detto COMBINAZIONE LINEARE DI $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ (con coeff. t_1, \dots, t_n).

DEF (SOTTOSPAZIO): Sia V un \mathbb{R} -sp. vettoriale, e sia $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$.

Diciamo che W è un SOTTOSPAZIO (VETTORIALE) di V se

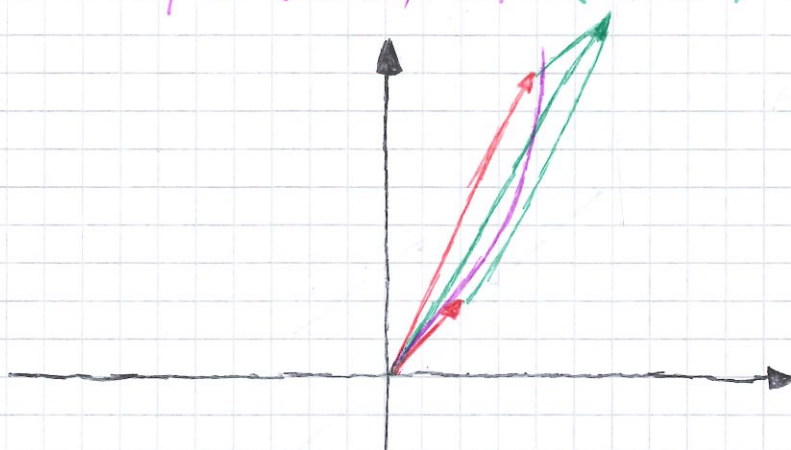
$$s\bar{u} + t\bar{v} \in W \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in W, s, t \in \mathbb{R}.$$

Oss: Sia V un \mathbb{R} -sp. vettoriale. Allora $W_1 = V$ e $W_2 = \{0_V\}$ sono sottospazi di V , detti SOTTOSPAZI BANALI. Inoltre, se $W \subseteq V$ è un sottospazio di V , allora (scegliendo $s=t=0$) $0_V \in W$.

ALCUNI ESEMPLI.

(1) Sia $V = \mathbb{R}^2$, e sia $A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Ebbene, A non è un sottospazio di \mathbb{R}^2 ! Infatti, $\bar{x} = (1,1), \bar{y} = (2,4) \in A$, ma

$$\bar{x} + \bar{y} = (3,5) \notin A! \quad (5 \neq 3^2)$$

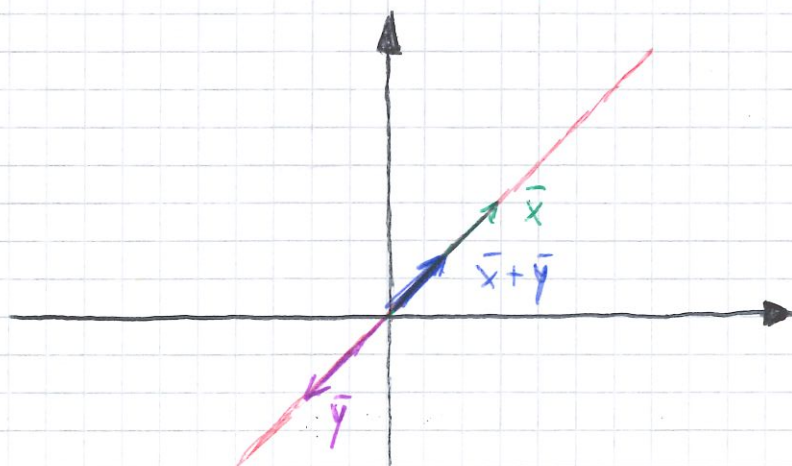


Al contrario, l'insieme $W = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è un SOTTOSPAZIO di \mathbb{R}^2 ! Infatti, per ogni $\bar{x}, \bar{y} \in W$ e per ogni $s, t \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\bar{u} = s\bar{x} + t\bar{y} = (\underbrace{sx_1 + ty_1}_{u_1}, \underbrace{sx_2 + ty_2}_{u_2});$$

Donque, poiché $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ (essendo $\bar{x}, \bar{y} \in W$), otteniamo

$$u_1 = sx_1 + ty_1 = sx_2 + ty_2 = u_2 \Rightarrow \bar{u} = s\bar{x} + t\bar{y} \in W.$$



Si può DIMOSTRARE che TUTTI e SOLI i sottospazi NON BANALI di \mathbb{R}^2 sono della forma $W_{a,b} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 = 0 \}$.

(2) Sia $V = [x]$, e sia $A = \{ p \in \mathbb{R}[x] : p \text{ ha GRADO } 2 \} \subseteq \mathbb{R}[x]$. Ebbene, A NON È un SOTTOSPAZIO di $\mathbb{R}[x]$, poiché $0_{\mathbb{R}[x]} \notin A$!

Al contrario, si può dimostrare che

$$W = \mathbb{R}_n[x] = \{ p \in \mathbb{R}[x] : p \text{ ha GRADO } \leq n \}$$

(con $n \geq 1$) È un SOTTOSPAZIO di $\mathbb{R}[x]$.

DEF (VETTORI LINEARMENTE DIP/INDIP): Sia V un \mathbb{R} -sp. vettoriale, e siano $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \in V$ (con $n \geq 1$). Diciamo che $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI se ESISTONO $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ NON TUTTI NULLI tale che

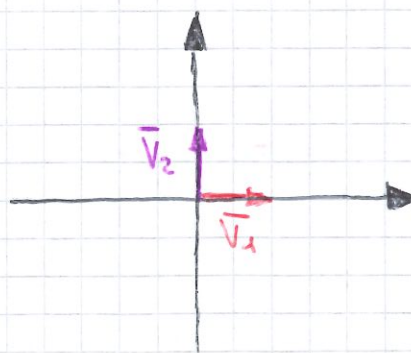
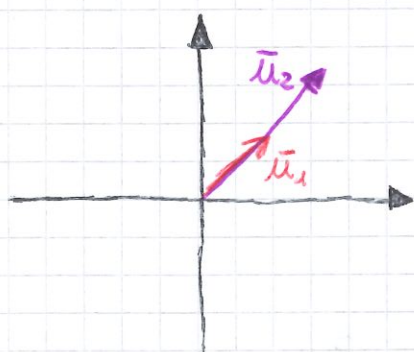
$$t_1 \bar{u}_1 + \dots + t_n \bar{u}_n = 0_V.$$

In caso contrario, diciamo che $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI.

Es: Nello sp. vettoriale $V = \mathbb{R}^2$, i vettori $\bar{u}_1 = (1,1)$, $\bar{u}_2 = (3,3)$ SONO linearmente DIPENDENTI, in effetti, $(-3)\bar{u}_1 + 1\bar{u}_2 = (-3,3) + (3,3) = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$

Al contrario, i vettori $\bar{v}_1 = (1,0)$, $\bar{v}_2 = (0,1)$ sono linearmente INDIPENDENTI: in effetti, se $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $t_1\bar{v}_1 + t_2\bar{v}_2 = (0,0)$, allora

$$(0,0) = t_1(1,0) + t_2(0,1) = (t_1, t_2) \Rightarrow t_1 = t_2 = 0.$$



TEOR (!): Sia V un \mathbb{R} -sp. vettoriale, e siano $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \in V$ (con $n \geq 1$). Allora, $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ sono linearmente dipendenti SE e SOLO SE (almeno) uno di essi può scriversi come COMBINAZIONE LINEARE degli altri.

Oss: Negli sp. vettoriali $V = \mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$, il precedente teorema dice che:

- (1) due vettori sono linearmente dipendenti SE e SOLO SE sono PROPORZIONALI, cioè appartengono alla stessa retta per l'origine;
- (2) Tre vettori sono linearmente dipendenti SE e SOLO SE uno di essi è COMBINAZIONE LINEARE degli altri due, cioè se appartengono allo stesso piano per l'origine.

In particolare, TRE VETTORI in \mathbb{R}^2 sono SEMPRE linearmente dipendenti!

DEF (INSIEME di GENERATORI / BASE): Sia V un sp. vettoriale, e siano $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \in V$ (con $n \geq 1$). Diciamo che:

- $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ GENERANO V (o che $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ è un INSIEME di GENERATORI per V) se per ogni $\bar{u} \in V \exists t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ tale che

$$\bar{u} = t_1 \bar{u}_1 + \dots + t_n \bar{u}_n;$$

- $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ FORMANO una BASE di V (o che $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ è una BASE di V) se $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ generano V e sono linearmente indipendenti.

In generale, NON è detto che un \mathbb{R} -sp. vettoriale abbia generatori o basi; in più, SE generatori o basi ESISTONO, NON SONO UNICI!

Vale però il seguente:

TEOR (!): Sia V un \mathbb{R} -sp. vettoriale, e supponiamo esista una BASE di V , diciamo $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ (con $n \geq 1$). Allora, ogni altra base di V ha ESATTAMENTE n elementi; questo numero n (NUMERO di VETTORI in una

QUALSIASI BASE DI V) si chiama DIMENSIONE DI V , e si indica con
 $n = \dim(V) \geq 1$.

ALCUNI ESEMPLI.

(1) Nello sp. vettoriale $V = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), i vettori

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \bar{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

formano una base, detta **BASE CANONICA** di \mathbb{R}^n . In particolare, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
Osserviamo esplicitamente che, dato $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha:

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n.$$

(2) Lo sp. vettoriale $V = \mathbb{R}[x]$ **NON HA BASE!** Infatti, se $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}[x]$ sono lin. indipendenti (per un certo $n \geq 1$), detto m il **MASSIMO** dei gradi di p_1, \dots, p_n , **OGNI COMB. LINEARE** di p_1, \dots, p_n avrà grado $\leq m$! In altre parole, i polinomi di grado $\geq m+1$ **NON** sono comb. lineare di p_1, \dots, p_n , e dunque p_1, \dots, p_n non formano una base di V !

(3) Nello sp. vettoriale $V = \mathbb{R}_n[x]$ ($n \geq 1$), i "vettori"

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \dots, p_{n+1}(x) = x^n$$

formano una base di V . In particolare, $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$. Osserviamo esplicitamente che, dato $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{R}_n[x]$, si ha

$$p(x) = a_0 p_1 + a_1 p_2 + \dots + a_n p_{n+1}.$$

TEOR(!): Sia V un \mathbb{R} -sp. vettoriale, e supponiamo che esista una BASE di V , diciamo $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ ($\Rightarrow \dim(V) = n \geq 1$). Allora:

(1) se $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \in V$ sono **LINEARMENTE INDIPENDENTI** (con $m \geq 1$)
esiste una **BASE** di V che contiene $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$; e dunque $m \leq n$;

(2) se $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_p \in V$ GENERANO V (con $p \geq 1$), esiste una BASE di V contenuta nell'insieme $g = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_p\}$, e dunque $p \geq n$.

Oss (!): Sia V un \mathbb{R} -sp. vettoriale, e supponiamo ESISTA una base di V (da qui in poi, diremo che V ha DIMENSIONE FINITA). Allora, se $W \subseteq V$ è un SOTTOSPAZIO di V , ANCHE W ha DIM. FINITA, e

$$\dim(W) \leq \dim(V) \text{ e } \dim(W) = \dim(V) \Leftrightarrow W = V$$

Conveniamo poi che $\dim(\{0_V\}) = 0$

APPLICAZIONI LINEARI

DEF (APPLICATIONS LINEARS): Siano V_1, V_2 due \mathbb{R} -sp. vettoriali, e sia

$$L: V_1 \rightarrow V_2, \quad \bar{v} \mapsto L(\bar{v}) \in V_2.$$

Diciamo che L è (un'applicazione) LINEARE se:

$$L(\underbrace{s\bar{u}_1 + t\bar{u}_2}_{\uparrow \text{in } V_1}) = s \underbrace{L(\bar{u}_1)}_{\uparrow \text{in } V_2} + t \underbrace{L(\bar{u}_2)}_{\uparrow \text{in } V_2} \quad \forall \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in V_1, s, t \in \mathbb{R}.$$

In tal caso scriviamo, $L \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

Alcuni Esempi

(1) Sia $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $L(\bar{x}) = x_1 - x_2$. Allora, $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: infatti, per ogni $\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $s, t \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} L(s\bar{x} + t\bar{y}) &= L(\underbrace{sx_1 + ty_1}_{x_1}, \underbrace{sx_2 + ty_2}_{x_2}) = x_1 - x_2 \\ &= (sx_1 + ty_1) - (sx_2 + ty_2) \\ &= s(x_1 - x_2) + t(y_1 - y_2) = sL(\bar{x}) + tL(\bar{y}). \end{aligned}$$

(2) Sia $L: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $L(p) = p'$. Allora, $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x])$: infatti, per ogni $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$ e per ogni $s, t \in \mathbb{R}$, dall'Algebra delle Derivate si ha

$$L(sp_1 + tp_2) = (sp_1 + tp_2)' = sp_1' + tp_2' = sL(p_1) + tL(p_2).$$

(3) Sia $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $L(\bar{x}) = x_1 x_2$. Allora L NON È LINEARE: in effetti, se scegliamo $\bar{x} = (1, 1), \bar{y} = (2, 2) \in \mathbb{R}^2$ e $s = t = 1$, si ha

$$L(s\bar{x} + t\bar{y}) = L(3, 3) = 9 \neq 5 = \underbrace{L(1, 1)}_1 + \underbrace{L(2, 2)}_4$$

Oss (!): Siano V_1, V_2 due \mathbb{R} -sp. vettoriali e sia $L \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Allora, scegliendo $s = t = 0$ e $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in V_1$ qualsiasi, si ha:

$$L(0_{V_1}) = L(0_{V_1} + 0_{V_2}) = 0L(\bar{u}_1) + 0L(\bar{u}_2) = 0_{V_2}$$

DEF (NUCLEO e IMMAGINE): Siano V_1, V_2 due \mathbb{R} -sp. vettoriali e sia $L \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Definiamo allora gli insiemi seguenti

$$(1) \text{Ker}(L) = \{\bar{u} \in V_1 : L(\bar{u}) = 0_{V_2}\} \subseteq V_1 \quad (\text{Nucleo di } L)$$

$$(2) \text{Imm}(L) = \{L(\bar{u}) : \bar{u} \in V_1\} \subseteq V_2 \quad (\text{Immagine di } L)$$

Es: Sia $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $L(\bar{x}) = x_1 - x_2$. Abbiamo dimostrato che $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; allora, per definizione, si ha:

$$\text{Ker}(L) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : L(\bar{x}) = 0\} = \{\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}.$$

$$\text{Imm}(L) = \{L(\bar{x}) : \bar{x} \in \mathbb{R}^2\} = \{x_1 - x_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \quad (\alpha = L(\alpha, 0) \forall \alpha \in \mathbb{R})$$

Oss (!): Siano V_1, V_2 due \mathbb{R} -sp. vettoriali, e sia $L \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Poiché sappiamo che $L(0_{V_1}) = 0_{V_2}$, allora $0_{V_1} \in \text{Ker}(L)$ e $0_{V_2} \in \text{Imm}(L)$.

Di più, si può **DIMOSTRARE** che $\text{Ker}(L)$ e $\text{Imm}(L)$ sono sottospazi di V_1 e V_2 , rispettivamente.

TEOR (della DIMENSIONE): Siano V_1, V_2 due \mathbb{R} -sp. vettoriali, e sia $L \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

Supponiamo che V_1 abbia **DIMENSIONE FINITA**, diciamo $n \geq 1$.

Allora $\text{Imm}(L)$ ha **DIMENSIONE FINITA**, e

$$\dim(\text{Ker}(L)) + \dim(\text{Imm}(L)) = n. \quad (= \dim(V_1)).$$

Dim: Anzitutto, poiché $\text{Ker}(L)$ è un sottospazio di V_1 e $\dim(V_1) = n$, allora $\text{Ker}(L)$ ha **DIMENSIONE FINITA**, e $m = \dim(\text{Ker}(L)) = n \geq 0$. Dimostriamo il Teorema nel caso in cui $1 \leq m \leq n-1$ (cioè $\text{Ker}(L) \neq \{0_{V_1}\}, V_1$).

A tale scopo, fissiamo una qualsiasi base di $\text{Ker}(L)$, diciamo

$$B_1 = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\} \subseteq \text{Ker}(L) \subseteq V_1,$$

e completiamola a una base di V , diciamo

$$B_1 = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-m}\}$$

(ciò è possibile poiché $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ sono, in particolare, LINEARMENTE INDIP. in V_1). Mostriamo ora che gli $n-m$ vettori

$$\bar{w}_1 = L(\bar{v}_1), \dots, \bar{w}_{n-m} = L(\bar{v}_{n-m}) \in \text{Imm}(L)$$

formano una base di $\text{Imm}(L)$ mostrando che

- (1) $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n-m}$ sono lin. INDIPENDENTI;
- (2) $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n-m}$ GENERANO $\text{Imm}(L)$

Dimostrazione di (1). Siano $t_1, \dots, t_{n-m} \in \mathbb{R}$ tale che $t_1 \bar{w}_1 + \dots + t_{n-m} \bar{w}_{n-m} = 0_{V_2}$. Allora, poiché L è LINEARE, si ha:

$$\begin{aligned} 0_{V_2} &= t_1 \bar{w}_1 + \dots + t_{n-m} \bar{w}_{n-m} = t_1 L(\bar{v}_1) + \dots + t_{n-m} L(\bar{v}_{n-m}) \\ &= L(t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_{n-m} \bar{v}_{n-m}) \Rightarrow \bar{v} = \underline{t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_{n-m} \bar{v}_{n-m}} \in \text{Ker}(L) \end{aligned}$$

Da qui, poiché $B_1 = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ è una BASE di $\text{Ker}(L)$, possiamo scrivere (per opportuni scalari $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}$)

$$\bar{v} = s_1 \bar{u}_1 + \dots + s_m \bar{u}_m \Leftrightarrow s_1 \bar{u}_1 + \dots + s_m \bar{u}_m - \underbrace{t_1 \bar{v}_1 - \dots - t_{n-m} \bar{v}_{n-m}}_{= -\bar{v}} = 0_{V_1}$$

dunque, essendo $B_1 = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-m}\}$ una BASE di V_1 (in particolare, i vettori $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-m}$ sono lin. INDIPENDENTI), concludiamo che $s_1 = \dots = s_m = t_1 = \dots = t_{n-m} = 0$,

Dimostrazione di (2). Sia $\bar{w} \in \text{Imm}(L)$, e sia $\bar{v} \in V_1$ tale che $L(\bar{v}) = \bar{w}$ (un tale \bar{v} esiste per def. di $\text{Imm}(L)$). Poiché B_1 è una base di V_1 , possiamo scrivere (per certi scalari $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_{n-m} \in \mathbb{R}$)

$$\bar{v} = s_1 \bar{u}_1 + \dots + s_m \bar{u}_m + t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_{n-m} \bar{v}_{n-m};$$

allora, poiché L è LINEARE e $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m \in \text{Ker}(L)$, otteniamo

$$\begin{aligned}\bar{w} &= L(\bar{v}) = L(s_1 \bar{u}_1 + \dots + s_m \bar{u}_m + t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_{n-m} \bar{v}_{n-m}) \\ &= \underbrace{s_1 L(\bar{u}_1)}_{= 0_{V_2}} + \dots + \underbrace{s_m L(\bar{u}_m)}_{= 0_{V_2}} + \underbrace{t_1 L(\bar{v}_1)}_{\bar{w}_1} + \dots + \underbrace{t_{n-m} L(\bar{v}_{n-m})}_{\bar{w}_{n-m}} \\ &= t_1 \bar{w}_1 + \dots + t_{n-m} \bar{w}_{n-m}.\end{aligned}$$

In conclusione, poiché valgono (1)-(2), i vettori $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n-m}$ formano una base di $\text{Imm}(L)$, e dunque $\dim(\text{Imm}(L)) = n-m = n - \dim(\text{Ker}(L))$. #

Oss(1): Siano V_1, V_2 due \mathbb{R} -sp. vettoriali, e sia $L \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Supponiamo poi che V_1 abbia una base, diciamo $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ (con $n = \dim(V_1) \geq 1$). Ragionando come nella dimostrazione di (2) nella prova del Teorema precedente, si vede che i vettori

$$\bar{w}_1 = L(\bar{u}_1), \dots, \bar{w}_n = L(\bar{u}_n) \in \text{Imm}(L)$$

GENERANO $\text{Imm}(L) \subseteq V_2$; da questi è quindi possibile ottenere una BASE di $\text{Imm}(L)$ "scartandone" alcuni.

TEOR (INIETTIVITÀ/SURIETTIVITÀ di APP. LINEARI): Siano V_1, V_2 due \mathbb{R} -sp. vettoriali, e sia $L \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Allora:

$$(1) \quad L \text{ è SURIETTIVA} \iff \text{Imm}(L) = V_2;$$

$$(2) \quad L \text{ è INIETTIVA} \iff \text{Ker}(L) = \{0_{V_1}\};$$

$$(3) \quad \text{se } V_1, V_2 \text{ hanno dimensione FINITA e } \dim(V_1) = \dim(V_2), \text{ si ha} \\ L \text{ è INIETTIVA} \iff L \text{ è SURIETTIVA}$$

Dim(1): Segue direttamente dalla DEFINIZIONE di $\text{Imm}(L)$, e vale per qualsiasi funzione $f: V_1 \rightarrow V_2$ (non necessariamente lineare).

Dim(2): Supponiamo L iniettiva, e sia $\bar{u} \in V_1$, $\bar{u} \neq 0_{V_1}$. Allora:

$$L \text{ iniettiva} \Rightarrow L(\bar{u}) \neq L(0_{V_1}) = 0_{V_2} \Rightarrow \bar{u} \notin \text{Ker}(L)$$

e dunque $\text{Ker}(L) = \{0_{V_1}\}$. Viceversa, supponiamo $\text{Ker}(L) = \{0_{V_1}\}$, e siano $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in V_1$ tale che $L(\bar{u}_1) = L(\bar{u}_2)$. Poiché L è lineare si ha

$$L(\bar{u}_1) = L(\bar{u}_2) \Rightarrow L(\bar{u}_1) - L(\bar{u}_2) = 0_{V_2}$$

$$\Rightarrow L(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) = 0_{V_2}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \in \text{Ker}(L) = \{0_{V_1}\}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = 0_{V_1} \Rightarrow \bar{u}_1 = \bar{u}_2$$

e dunque L è **INIETTIVA**.

Dim(3): Usando i punti (1)-(2) già dimostrati e il Teorema della Dimensione, otteniamo la seguente "catena" di equivalenze:

$$L \text{ è INIETTIVA} \stackrel{(2)}{\iff} \text{Ker}(L) = \{0_{V_1}\} \iff \dim(\text{Ker}(L)) = 0$$

$$\iff \dim(\text{Imm}(L)) = \dim(V_1) \quad (\text{Teorema della Dimensione})$$

$$\iff \dim(\text{Imm}(L)) = \dim(V_2) \quad (\text{poiché } \dim(V_1) = \dim(V_2))$$

$$\iff \text{Imm}(L) = V_2 \quad (\text{poiché } \text{Imm}(L) \text{ è sottospazio di } V_2)$$

$$\stackrel{(1)}{\iff} L \text{ è SURIETTIVA}$$

Es (1): Siano $n, m \geq 1$, e sia $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Allora:

(1) SE L È INIETTIVA, si ha $\text{Ker}(L) = \{0_{V_1}\}$, e quindi
 $m \geq \dim(\text{Imm}(L)) = n - \dim(\text{Ker}(L)) = n \Rightarrow m \geq n$.

(2) SE L È SURIETTIVA, si ha $\text{Imm}(L) = \mathbb{R}^m$, e quindi
 $0 \leq \dim(\text{Ker}(L)) = n - \dim(\text{Imm}(L)) = n - m \Rightarrow n \geq m$

In particolare, se L è BIUNIVUCA, allora $m = n$.

MATRICI A COEFFICIENTI REALI

Dati $m, n \in \mathbb{N}$ ($m, n \geq 1$) chiamiamo **MATRICE** $m \times n$ (a COEFFICIENTI REALI) ogni tabella di numeri reali con m RIGHE e n COLONNE:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ con } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Indicheremo l'insieme delle matrici $m \times n$ con $M_{m,n}(\mathbb{R})$, e useremo la notazione $A = (a_{ij})_{ij}$ per la matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Nel caso particolare in cui $m = n$ scriveremo $M_n(\mathbb{R})$ al posto di $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

OPERAZIONI TRA MATRICI

(1) **SOMMA**: Date $A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, poniamo

$$A + B = (c_{ij})_{ij}, \text{ dove } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n);$$

(2) **Prodotto per SCALARE**: Dati $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$, poniamo

$$tA = (c_{ij})_{ij}, \text{ dove } c_{ij} = t a_{ij} \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$$

TEOR (!): Siano $m, n \geq 1$. Allora, l'insieme $M_{m,n}(\mathbb{R})$, con le operazioni appena definite, è un \mathbb{R} -sp. vettoriale, e $\dim(M_{m,n}(\mathbb{R})) = mn$.

(3) **Prodotto "RIGA per COLONNA"**: Date $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, poniamo

$$AB = (c_{ij})_{ij}, \text{ dove } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p)$$

Es: Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Perché il **NUMERO di COLONNE** di A è uguale al **NUMERO di RIGHE** di B ($= 2$), possiamo calcolare AB : si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

Oss(!): Siano $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B = (b_{ij})_{ij} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ ($m, n, p \geq 1$).
Nonostante sia possibile calcolare AB , se $p \neq m$ **NON** possiamo calcolare BA ! Inoltre, anche se fosse possibile calcolare sia AB sia BA (ad esempio se $A, B \in M_m(\mathbb{R})$), in generale $AB \neq BA$!

Valgono però le proprietà seguenti:

(1) se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, allora $A(B+C) = AB + AC$;

(2) se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$, allora $t(AB) = (tA)B = A(tB)$;

(3) se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, allora $A(BC) = (AB)C$.

DEF (MATRICE IDENTITÀ): Dato $n \geq 1$, si chiama **MATRICE IDENTITÀ** (di **ORDINE** n) la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

Oss(!): Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, allora $AI_n = I_n A = A$ (" $I_n = 1$ " in $M_n(\mathbb{R})$)

DEF (MATRICE INVERTIBILE): Data $A \in M_n(\mathbb{R})$, diciamo che essa è **INVERTIBILE** se esiste $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $AB = BA = I_n$.

Oss (!): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice **INVERTIBILE**, e sia $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $AB = BA = I_n$; allora B è **UNICA**, si chiama **(MATRICE) INVERSA** di A e si indica con A^{-1} (" A^{-1} " = " $1/A$ " in $M_n(\mathbb{R})$).

DETERMINANTE DI MATRICI QUADRATE

DEF (TRASPOSTA): Siano $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). Chiamiamo **(MATRICE) TRASPOSTA** di A la matrice $A^T \in M_n(\mathbb{R})$ definita come segue:

$$A^T = (b_{ij})_{ij}, \text{ dove } b_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n)$$

DEF (MINORE COMPLEMENTARE): Siano $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$), $1 \leq i, j \leq n$. Chiamiamo **MINORE COMPLEMENTARE** dell'elemento a_{ij} la matrice $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ che si ottiene da A **rimuovendo** la i -esima riga e la j -esima colonna.

DEF (DETERMINANTE): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{ij}$. Definiamo il **DETERMINANTE** di A , denotato con $\det(A)$, come segue:

• se $n=1$ e $A=(a)$, $\det(A)=a$;

• se $n \geq 2$, $\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(\underbrace{A_{11}}_{\in M_{n-1}(\mathbb{R})}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(\underbrace{A_{1n}}_{\in M_{n-1}(\mathbb{R})})$

Es (!): Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Allora:

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(a_{22}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(a_{21})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Es: Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Usando la def. di DETERMINANTE, si ha:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 \cdot 0 - 0 \cdot 2) - 2(0 \cdot 0 - 0 \cdot 2) + (0 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = -2. \end{aligned}$$

TEOR (PROPRIETÀ del DET.): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). Valgono allora le seguenti proprietà:

- (1) se A ha una COLONNA NULLA, $\det(A) = 0$;
- (2) SCAMBIANDO fra loro due colonne, il det. CAMBIA SEGNO;
- (3) se A ha due COLONNE UGUALI, $\det(A) = 0$;
- (4) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ le COLONNE di A sono LINEARMENTE INDIPENDENTI
(come vettori di \mathbb{R}^n);
- (5) se ad una COLONNA di A si aggiunge una COMBINAZIONE LINEARE delle altre, il det. NON CAMBIA;
- (6) $\det(tA) = t^n \det(A) \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
- (7) $\det(A) = \det(A^T)$.

In particolare, da (7) seguono proprietà ANALOGHE a (1)-(5) per le RIGHE.

TEOR (DI LAPLACE): Siano $A \in M_n(\mathbb{R})$ (con $n \geq 2$), $1 \leq i \leq n$. Allora:

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}).$$

Es: Consideriamo ancora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Usando il Teorema di Laplace con $i=2$, otteniamo

$$\det(A) = \underbrace{(-1)^{2+1} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=0} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{(-1)^{2+3} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=0}$$
$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2.$$

TEOR (DI BINET): Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Allora $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

TEOR (DETERMINANTE E INVERSA): Sia $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). Allora A è INVERTIBILE se e solo se $\det(A) \neq 0$. In tal caso, si ha:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}^T, \text{ dove } M_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Es: Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Perché $\det(A) = 2 \neq 0$, tale A è INVERTIBILE; allora, poiché

$$A_{11} = (1) \quad A_{12} = (0) \quad A_{21} = (1) \quad A_{22} = (2)$$

possiamo scrivere

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 1 & (-1)^{1+2} \cdot 0 \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RANGO DI UNA MATRICE

DEF (RANGO): Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (con $m, n \geq 1$). Chiamiamo **RANGO** di A , e lo indichiamo con $\text{rg}(A)$, il **MASSIMO** numero di colonne di A tra loro **LINEARMENTE INDIPENDENTI** (come vettori di \mathbb{R}^m).

Es: Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R})$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \bar{c}_3$

Poiché $\bar{c}_3 = \bar{c}_1 + \bar{c}_2$ e poiché \bar{c}_1 e \bar{c}_2 non sono proporzionali (dunque, sono **linearmente INDIPENDENTI**), per **DEFINIZIONE** si ha $\text{rg}(A) = 2$.

ALCUNE OSSERVAZIONI.

(1) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (con $m, n \geq 1$). Poiché le colonne di A sono n vettori di \mathbb{R}^m (e poiché $\dim(\mathbb{R}^m) = m$), allora $0 \leq \text{rg}(A) \leq \min\{n, m\}$.

(2) $\text{rg}(A) = 0$, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

(3) Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), $\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

DEF (MINORE): Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ($m, n \geq 1$). Sia poi $0 \leq r \leq \min\{n, m\}$. Si chiama **MINORE** di **ORDINE** r **ESTRATTO** da A una qualunque matrice $M \in M_r(\mathbb{R})$ costituita dagli **ELEMENTI** comuni ad r righe ed r colonne di A .

TEOR (DI KRONECKER): Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (con $m, n \geq 1$), e sia $0 \leq r \leq \min\{n, m\}$. Allora $\text{rg}(A) = r$ **SE E SOLO SE**

(1) **ESISTE** un minore di ordine r , " M ", estratto da A con $\det(M) \neq 0$;

(2) **TUTTI** i minori di ordine $r+1$ estratti da A che si ottengono **ORLANDO** M (con una riga e una colonna di A) hanno $\det = 0$.

In tal caso, le r colonne di A che "formano" M sono **lin. indipendenti**.

Es. Calcoliamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R})$$

usando il Teorema di Kronecker. Anzitutto, **ESISTE** un minore M di ordine 2 estratto da A con **$\det(M) \neq 0$** , ad esempio

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con } \det(M) = 2 \neq 0.$$

(formato dalle prime due righe e colonne di A). D'altra parte, M si può **ORLARE** in due soli modi.

(1) "usando" la terza riga e la terza colonna di A , e si trova

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \text{ con } \det(M_1) = 0;$$

(2) "usando" la quarta riga e la terza colonna di A , e si trova

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \text{ con } \det(M_2) = 0.$$

Dunque, poiché **$\det(M_1) = \det(M_2) = 0$** (e questi sono gli unici minori di ordine 3 estratti da A **ottenuti ORLANDO M**), concludiamo che

$$\text{rg}(A) = 2$$

e le prime due colonne di A (che formano M) sono **lin. indipendenti**.

Oss(!): Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, dal Teor. di Kronecker e dalle proprietà del determinante segue che **$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$** ! Dunque, il **massimo numero di colonne o di righe di A lin. indipendenti è uguale!**

APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI

Oss(1). Sia V un \mathbb{R} -sp. vettoriale con DIMENSIONE FINITA, diciamo $n \geq 1$, e sia $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\} \subseteq V$ una base di V . Dato un qualsiasi $\bar{u} \in V$, sappiamo che esistono $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ tale che

$$\bar{u} = t_1 \bar{u}_1 + \dots + t_n \bar{u}_n;$$

ebbene, si può dimostrare che tali t_1, \dots, t_n SONO UNICI (poiché $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ sono lin. INDIPENDENTI), e si chiamano COORDINATE di \bar{u} nella base B . Useremo la notazione

$$(\bar{u})_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}).$$

TEOR (DI RAPPRESENTAZIONE): Siano V_1, V_2 due \mathbb{R} -sp. vettoriali con dimensione finita, diciamo $n = \dim(V_1)$, $m = \dim(V_2)$, e siano $B_1 \subseteq V_1$, $B_2 \subseteq V_2$ basi di V_1 e V_2 , rispettivamente. Sia poi $L \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Allora, ESISTE un'UNICA MATRICE $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tale che

$$\underbrace{(L(\bar{u}))_{B_2}}_{\in M_{m,1}(\mathbb{R})} = A \cdot \underbrace{(\bar{u})_{B_1}}_{\in M_{n,1}(\mathbb{R})} \quad \forall \bar{u} \in V_1. \quad (*)$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $\in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

Tale matrice A si indica con $M_{B_1, B_2}(L)$.

TEOR (1): Siano V_1, V_2 due \mathbb{R} -sp. vettoriali di dimensione finita, diciamo $n = \dim(V_1)$, $m = \dim(V_2) \geq 1$, e siano $B_1 \subseteq V_1$, $B_2 \subseteq V_2$ basi di V_1 e V_2 , rispettivamente. Sia poi $L \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, e sia $A = M_{B_1, B_2}(L) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora si ha:

- (1) se $\bar{u} \in V_1$, $\bar{u} \in \text{Ker}(L) \Leftrightarrow A \cdot (\bar{u})_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$;
- (2) se $\bar{u} \in V_1$ e $\bar{v} \in V_2$, $\bar{v} = L(\bar{u}) \Leftrightarrow (\bar{v})_{B_2} = A \cdot (\bar{u})_{B_1}$;
- (3) $\dim(\text{Im}(L)) = \text{rg}(A)$ e $\dim(\text{Ker}(L)) = n - \text{rg}(A)$.

Dim (del Teor. di RAPPRESENTAZIONE - ESISTENZA): Siano $B_1 = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ e $B_2 = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$. Poiché $L(\bar{u}_1), \dots, L(\bar{u}_n) \in V_2$ e poiché B_2 è una base di V_2 , per ogni $j = 1, \dots, n$ esistono $a_{1j}, \dots, a_{mj} \in \mathbb{R}$ tale che

$$L(\bar{u}_j) = a_{1j}\bar{v}_1 + \dots + a_{mj}\bar{v}_m \Leftrightarrow (L(\bar{u}_j))_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Consideriamo allora la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} = \left[(L(\bar{u}_1))_{B_2} \dots (L(\bar{u}_n))_{B_2} \right] \in M_{mn}(\mathbb{R})$$

e mostriamo che vale (*). Sia quindi $\bar{u} \in V_1$, $\bar{u} = x_1\bar{u}_1 + \dots + x_n\bar{u}_n$, e sia $\bar{v} = L(\bar{u}) \in V_2$, $\bar{v} = y_1\bar{v}_1 + \dots + y_m\bar{v}_m$. Poiché L è LINEARE, si ha:

$$\begin{aligned} \bar{v} = L(\bar{u}) &= L(x_1\bar{u}_1 + \dots + x_n\bar{u}_n) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot (L(\bar{u}_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{v}_i \right) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right)}_{t_i \in \mathbb{R}} \bar{v}_i. \end{aligned}$$

Da qui, poiché le COORDINATE di un vettore rispetto a una base sono UNICHE, concludiamo che $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, cioè

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{(L(\bar{u}))_{B_2}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{(\bar{u})_{B_1}} \Leftrightarrow (L(\bar{u}))_{B_2} = A \cdot (\bar{u})_{B_1} \quad \#$$

Oss (!): Nelle ipotesi e notazioni del Teorema di Rappresentazione, segue dalla dim. appena fatta che le colonne di $A = M_{B_2 B_1}(L)$ sono le COORDINATE delle immagini dei vettori di B_1 rispetto alla base B_2 ! Dunque, se $B_1 = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$, $B_2 = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$, allora

$$M_{B_2 B_1}(L) = \left[(L(\bar{u}_1))_{B_2} \dots (L(\bar{u}_n))_{B_2} \right]$$

Es: Sia $L: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, $L(p) = p'$. Abbiamo già visto che L è LINEARE; scriviamo allora la matrice $A = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(L)$, dove

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathbb{R}_2[x], \quad \mathcal{B}_2 = \{1, x\} \subseteq \mathbb{R}_1[x].$$

Perché si ha:

- $L(1) = (1)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x; \Leftrightarrow (L(1))_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$
- $L(x) = (x)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x; \Leftrightarrow (L(x))_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$
- $L(x^2) = (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x \Leftrightarrow (L(x^2))_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix};$

possiamo scrivere $A = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. Tale A rappresenta L nel senso seguente: se $p \in \mathbb{R}_2[x]$ e

$$p = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \Leftrightarrow (p)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

allora si ha

$$(p')_{\mathcal{B}_2} = (L(p))_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow p' = a_1 \cdot 1 + 2a_2 \cdot x.$$

Usando questa matrice possiamo dire che:

- $\dim(\text{Im}(L)) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 (= \dim(\mathbb{R}_1[x])) \Rightarrow L$ è suriettiva;
- $\dim(\text{Ker}(L)) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow L$ non è iniettiva;
- dato $p \in \mathbb{R}_2[x]$, $(p)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$p \in \text{Ker}(L) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

e dunque $\ker(L) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = a_0, a_0 \in \mathbb{R}\}$.

NOTAZIONE: Sia V un \mathbb{R} -sp. vettoriale di **dimensione finita**, diciamo $n \geq 1$, e sia $B \subseteq V$ una base di V . Sia poi $L \in \mathcal{L}(V, V)$. Si pone

$$M_B(L) = M_{B,B}(L) \in M_n(\mathbb{R})$$

TEOR (Matrice della Composizione): Siano V_1, V_2, V_3 tre \mathbb{R} -sp. vettoriali con **dimensione finita**, diciamo $n = \dim(V_1)$, $m = \dim(V_2)$, $p = \dim(V_3) \geq 1$, e siano $B_1 \subseteq V_1$, $B_2 \subseteq V_2$, $B_3 \subseteq V_3$ basi di V_1, V_2, V_3 , rispettivamente. Siano poi $L_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, $L_2 \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. Allora:

$$L = L_2 \circ L_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_3) \text{ e } M_{B_3, B_1}(L) = M_{B_3, B_2}(L_2) \cdot M_{B_2, B_1}(L_1).$$

UN PAIO DI OSSERVAZIONI

(1) Sia $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (con $n, m \geq 1$), e siano $\mathcal{E}_n \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}_m \subseteq \mathbb{R}^m$ le **BASI CANONICHE** di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , rispettivamente. Poiché le **COORDINATE** di un vettore di $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^m$ rispetto a $\mathcal{E}_n / \mathcal{E}_m$ sono le sue **COMPONENTI**, possiamo scrivere

$$L(\bar{x}) = (L(\bar{x}))_{\mathcal{E}_m} = M_{\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n}(L) \cdot (\bar{x})_{\mathcal{E}_n} = M_{\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n}(L) \bar{x}.$$

Dunque, le app. lineari da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m sono della forma

$$L(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}, \text{ per una qualche } A \in M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \right), \text{ con } A = (a_{ij})_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

(2) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (con $m, n \geq 1$). Allora la funzione

$$L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$$

è l'unica app. lineare da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m tale che $M_{\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n}(L) = A$.

SISTEMI LINEARI

NOTA: Da qui in poi, penseremo i vettori di \mathbb{R}^n come vettori colonna (cioè come MATRICI $n \times 1$).

Dati $m, n \geq 1$ e $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, vogliamo studiare la RISOLUBILITÀ (ESISTENZA e NUMERO DI SOLUZIONI) del SISTEMA LINEARE

$$A\bar{x} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

al vettore di $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$. La matrice A si chiama MATRICE dei COEFFICIENTI (del sistema), mentre \bar{b} si chiama TERMINE NOTO.

TEOR (DI ROUCHÉ - CAPELLI): Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (con $m, n \geq 1$) e sia $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$. Allora il sistema lineare $A\bar{x} = \bar{b}$ ha (ALMENO) una soluzione se e solo se succede che

$$\begin{array}{ccc} \text{rg}(A) & = & \text{rg}(A | \bar{b}). \\ \uparrow & & \uparrow \\ M_{m,n}(\mathbb{R}) & & M_{m,n+1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

DIM: Per definizione, il sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ ha soluzione se e solo se esiste un vettore $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + \dots + a_{1n}t_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}t_1 + \dots + a_{mn}t_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow t_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + t_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

cioè se e solo se il vettore \bar{b} è COMB. LINEARE delle colonne $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ di A ! Da qui, otteniamo:

$$\begin{aligned} A\bar{x} = \bar{b} \text{ ha sol.} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{max. num. di vettori} \\ \text{lin. indep. tra } \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{max. num. di vettori} \\ \text{lin. indep. tra } \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n, \bar{b} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A | \bar{b}). \end{aligned}$$

ESEMPI "NOTEVOLI"

(1) Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ($m, n \geq 1$). Poiché $\text{rg}(A|\bar{0}) = \text{rg}(A)$, il sistema omogeneo $A\bar{x} = \bar{0}$ ha SEMPRE soluzione.

(2) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$) tale che $\text{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$. Poiché

$$\text{rg}(A|\bar{b}) = \text{rg}(A) = n \quad \forall b \in \mathbb{R}^n$$

il sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ ha soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^n$.

"STRUTTURA" delle SOLUZIONI.

TEOR (CASO OMOGENEO): Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ($m, n \geq 1$) e sia S_0 l'insieme delle soluzioni del sistema $A\bar{x} = \bar{0}$, cioè

$$S_0 = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0}\} \neq \emptyset.$$

Allora S_0 è un sottospazio di \mathbb{R}^n , e $\dim(S_0) = n - \text{rg}(A)$.

TEOR (CASO NON OMOGENEO): Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ($m, n \geq 1$) e sia $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ tale che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\bar{b}) \iff$ il sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ ha soluzione. Sia poi $S_{\bar{b}}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, cioè

$$S_{\bar{b}} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{b}\} \neq \emptyset.$$

Allora, si ha:

$$S_{\bar{b}} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} = \bar{x}_p + \bar{x}_0 \text{ con } \bar{x}_0 \in S_0\},$$

dove $\bar{x}_p \in \mathbb{R}^n$ è una PARTICOLARE soluzione di $A\bar{x} = \bar{b}$ (e $S_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ è lo spazio delle soluzioni di $A\bar{x} = \bar{0}$). In particolare:

(1) se $\text{rg}(A) = n \implies \dim(S_0) = 0 \implies S_0 = \{\bar{0}\}$, il sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ ha un'unica soluzione;

(2) Se $\text{rg}(A) < n$ ($\Rightarrow \dim(S_0) \geq 1$), il sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ ha INFINITE soluzioni, dipendenti da $p = n - \text{rg}(A)$ parametri liberi.

Es (!): Consideriamo il sistema

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{b},$$

dove $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{matrix}$

Anzitutto, poiché \bar{c}_1, \bar{c}_2 NON sono proporzionali e $\bar{c}_3 = \bar{c}_1 + \bar{c}_2$, per definizione si ha $\text{rg}(A) = 2$; d'altra parte, poiché $\bar{b} = \bar{c}_1$, ancora per definizione si ha:

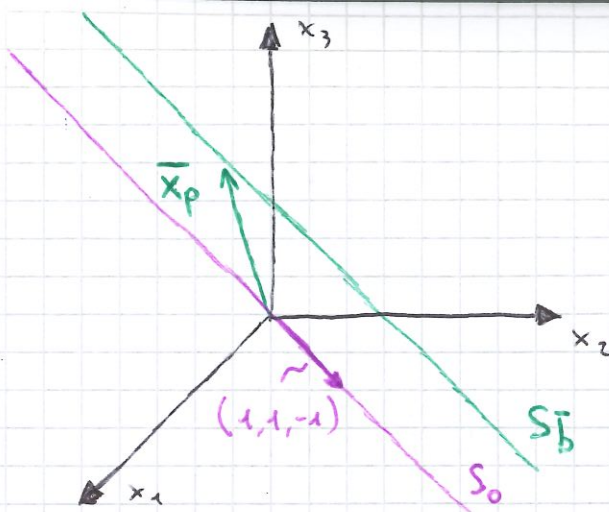
$$\text{rg}(A|\bar{b}) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = 2 = \text{rg}(A)$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ \bar{b} \end{matrix}$

e dunque il sistema (S) ha INFINITE soluzioni ($\text{rg}(A) = 2 < 3 = n$), dipendenti da $p = 3 - 2 = 1$ parametro libero.

Procedendo (ad esempio) per sostituzioni (con $x_1 = t$), si trova

$$\begin{aligned} S_{\bar{b}} &= \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \bar{x} = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ 1-t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \bar{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{x}_p} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\bar{x}_0 \in S_0}, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$



TEOR (DI CRAMER): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$) tale che $\det(A) \neq 0$ (cioè A è NON SINGOLARE). Allora, per ogni $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ il sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ ha un'unica soluzione, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, data da $\bar{x}_0 = A^{-1}\bar{b}$.

Inoltre, se $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $A = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$, si ha

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(\bar{c}_1 \dots \bar{c}_{k-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{k-esima colonna}}}{\bar{b}} \bar{c}_{k+1} \dots \bar{c}_n)$$

DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI QUADRATE

PREMESSA: Sia V un \mathbb{R} -sp. vettoriale di dimensione FINITA, diciamo $n \geq 1$, e sia $L \in \mathcal{L}(V, V)$. Si può DIMOSTRARE che, se B_1, B_2 sono due basi (diverse) di V , ESISTE una MATRICE INVERTIBILE $P \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$M_{B_2}(L) = P^{-1} M_{B_1}(L) P.$$

È possibile scegliere una base di V chiamata B in modo che " $M_B(L)$ sia il più semplice possibile" (cioè DIAGONALE)?

DEF (MATRICE DIAGONALIZZABILE): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). Diciamo che A è DIAGONALIZZABILE se ESISTONO

(1) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R};$

(2) $P \in M_n(\mathbb{R})$ INVERTIBILE

tale che
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

DEF (AUTOVALORE/AUTOVETORE): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$) e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Diciamo che λ è un AUTOVALORE di A se ESISTE $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \neq \bar{0}$ tale che

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

In tal caso, \bar{x} è detto AUTOVETORE di A (di autovalore λ).

TEOR (!): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). Allora A è diagonalizzabile SE E SOLO SE ESISTE una base $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ di \mathbb{R}^n formata da AUTOVETORI di A . In questo caso, si ha

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

dove $P = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice che ha per colonne i vettori

della base \mathcal{B} e, per ogni $1 \leq i \leq n$, λ_i è l'autovalore "associato" a \bar{u}_i (cioè $A\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i$).

RICERCA DI AUTOVALORI e AUTOVETTORI

NOTAZIONE: Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), l'insieme di tutti gli autovalori di A si chiama **SPETTRO** di A , e si indica con $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Se poi $\sigma(A) \neq \emptyset$ e $\lambda_0 \in \sigma(A)$, l'insieme

$$V_{\lambda_0} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \lambda_0 \bar{x}\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_0 I_n)\bar{x} = \bar{0}\}$$

si chiama **AUTOSPAZIO RELATIVO** a λ_0 . I suoi elementi sono tutti gli autovettori di A di autovalore λ più il vettore $\bar{0}$ (non è, per definizione, un autovettore).

TEOR (!): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), e sia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Allora:

(1) $\lambda_0 \in \sigma(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda_0 I_n) = 0$;

(2) se $\lambda_0 \in \sigma(A)$, l'insieme $V_{\lambda_0} \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio di \mathbb{R}^n , e

$$\dim(V_{\lambda_0}) = n - \underbrace{\text{rg}(A - \lambda_0 I_n)}_{\leq n-1} \geq 1$$

(3) autovettori relativi ad autovalori **DISTINTI** sono **lin. INDIPENDENTI**.

Oss (!): Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), la funzione

$$p_A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

è un polinomio di grado $\leq n$ (a coeff. REALI), detto **POLINOMIO**

CARATTERISTICO di A . Dal punto (1) del teorema precedente segue allora che $\lambda_0 \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda_0$ è una RADICE di $p_A(\lambda)$ ($p_A(\lambda_0) = 0$), e dunque A ha al più n autovalori!

Es (1): Calcoliamo gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Anzitutto, poiché gli autovalori di A sono esattamente le radici di $p_A(\lambda)$, e poiché (usando il teor. di Laplace con $i=2$)

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) ((1-\lambda)^2 - 1)$$
$$= -\lambda(2-\lambda)^2,$$

possiamo concludere che $\sigma(A) = \{0, 2\}$. Possiamo ora determinare i due autospazi V_0 e V_2 .

(V_0): Per definizione, si ha:

$$\bar{x} \in V_0 \iff A\bar{x} = \bar{0} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
$$(A - \bar{0}I_3)$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1 \end{cases}$$

Dunque, posto $x_1 = t$, otteniamo

$$V_0 = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \bar{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \bar{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

In particolare, $\dim(V_0) = 1 (= 3 - \text{rg}(A))$ e

$B_1 = \{ \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ è una BASE di V_0 .

(V_2) : Per definizione, si ha:

$$\bar{x} \in V_2 \Leftrightarrow (A - 2I_3) \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = x_1 - 2x_2$$

Dunque, posto $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, otteniamo

$$V_2 = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \bar{x} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1 - 2t_2 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \bar{x} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

In particolare, $\dim(V_2) = 2$ ($= 3 - \text{rg}(A - 2I_3)$), e

$B_2 = \{ \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \}$ è una BASE di V_2 .

Osserviamo che, poiché \bar{u}_2, \bar{u}_3 sono lin. INDIPENDENTI (formano una base di V_2) e poiché $\bar{u}_1 \in V_0$ (e $0 \neq 2$), i 3 vettori

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sono LIN. INDIPENDENTI, e formano quindi una BASE di \mathbb{R}^3 ! La matrice A è allora DIAGONALIZZABILE, e risulta

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

$\uparrow \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{\in V_2}$
 V_0

DEF (MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA/GEOMETRICA): Siano $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), e $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Chiamiamo:

(1) **MULTIPlicità ALGEBRAICA** di λ_0 , indicata con $m(\lambda_0)$, la molteplicità di λ_0 come radice di $p_A(\lambda)$, cioè

$$m(\lambda_0) = k \Leftrightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda), \quad q(\lambda_0) \neq 0,$$

(2) **MULTIPlicità GEOMETRICA** di λ_0 , indicata con $d(\lambda_0)$, la DIMENSIONE di V_{λ_0} , cioè $d(\lambda_0) = n - \text{rg}(A - \lambda_0 I_n) \geq 1$.

TEOR (!): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\lambda_0 \in \sigma(A)$ allora

$$1 \leq d(\lambda_0) \leq m(\lambda_0)$$

Oss/Es (!):

$$d(\lambda_0) < m(\lambda_0)$$

Ad esempio, se consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ha:

$$\bullet p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \sigma(A) = \{1\} \text{ e } m(1) = 2;$$

$$\bullet d(1) = 2 - \text{rg}(A - 1I_2) = 2 - \underbrace{\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=1} = 1 < 2.$$

In particolare, A NON È DIAGONALIZZABILE: infatti, se lo fosse, dovrebbe esistere una BASE $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ di \mathbb{R}^2 formata da autovettori di A ; poiché però $\sigma(A) = \{1\}$, avremmo $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in V_1 (\Rightarrow \dim(V_1) \geq 2)$, MA

$$d(1) = \dim(V_1) = 1!$$

TEOR (FONDAMENTALE della DIAGONALIZZABILITÀ): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$).

Allora A è diagonalizzabile SE E SOLO SE valgono le proprietà seguenti:

(1) $p_A(\lambda)$ ha TUTTE RADICI REALI;

(2) se $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sono gli AUTVALORI DISTINTI di A , allora

$$m(\lambda_i) = d(\lambda_i) \quad \forall 1 \leq i \leq p.$$

In tal caso, se $B_i \in V_{\lambda_i}$ è una (qualsiasi) base di V_{λ_i} ($1 \leq i \leq p$), allora $B = B_1 \cup \dots \cup B_p$ è una BASE di \mathbb{R}^n formata da autovettori di A .

COROLLARIO (!): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). Se A ha n autovalori distinti, allora A è DIAGONALIZZABILE.

Oss (!): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), e sia $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Se $m(\lambda_0) = 1$, allora NECESSARIAMENTE $d(\lambda_0) = 1 = m(\lambda_0)$. Dunque, la proprietà (2) del teorema precedente "è significativa" solo se $m(\lambda_i) \geq 2$.

Es: Consideriamo ancora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Abbiamo già visto che:

- $p_A(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2 \Rightarrow \sigma(A) = \{0, 2\}$, e $m(0) = 1$, $m(2) = 2$;
- $d(0) = \dim(V_0) = 1$ e $d(2) = \dim(V_2) = 2$.

Allora, poiché $p_A(\lambda)$ ha TUTTE RADICI REALI e poiché $m(0) = d(0) (=1)$, $m(2) = d(2) (=2)$, possiamo DIRETTAMENTE concludere che A è DIAGONALIZZABILE! Inoltre, poiché abbiamo già visto che

- $B_1 = \{\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ è una base di V_0 ;

- $B_2 = \{\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ è una base di V_2 ;

possiamo allora concludere che $B = B_1 \cup B_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ è una BASE di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di A !

TEOREMA SPETTRALE (REALE)

PREMESSA: "STRUTTURA EUCLIDEA" di \mathbb{R}^n . In TOTALE ANALOGIA con il caso dello spazio \mathbb{R}^3 , diamo in \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) le seguenti definizioni:

(1) **Prodotto SCALARE:** Dati $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, poniamo
 $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$ (Prodotto SCALARE di \bar{x} e \bar{y});

(2) **NORMA EUCLIDEA:** Dato $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, poniamo

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \geq 0 \quad (\text{NORMA EUCLIDEA di } \bar{x});$$

(3) **VETTORI ORTOGONALI:** Dati $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, diciamo che \bar{x}, \bar{y} sono ORTOGONALI (PERPENDICOLARI) se $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$

Oss(!): Siano $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x}, \bar{y} \neq \bar{0}$. Se $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ (cioè se \bar{x}, \bar{y} sono ORTOGONALI), allora \bar{x}, \bar{y} sono lin. INDIPENDENTI.

DEF (BASE ORTOGONALE/ ORTONORMALE): Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un SOTTOSPAZIO, e sia $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\} \subseteq V$ una base di V (con $1 \leq m = \dim(V) \leq n$). Diciamo che B è (una base) ORTOGONALE di V se

$$\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Se, in più, si ha $\|\bar{u}_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m$, diciamo che B è (una base) ORTONORMALE di V .

Es(!): Per ogni $n \geq 1$, la BASE CANONICA di \mathbb{R}^n , cioè

$$E_n = \left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una BASE ORTONORMALE di \mathbb{R}^n .

DEF (MATRICI SIMMETRICA/ORTOGONALE): Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), diciamo che A è **SIMMETRICA**, e scriviamo $A \in S_n(\mathbb{R})$, se

$$A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j.$$

Diciamo invece che A è **ORTOGONALE**, e scriviamo $A \in O_n(\mathbb{R})$, se

$$A^T A = A A^T = I_n \Leftrightarrow \exists A^{-1} = A^T.$$

Es (!): Se $n=2$, si può **DIMOSTRARE** che $A \in O_2(\mathbb{R})$ sè e solo sè

$$A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \text{ oppure } A = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$$

per un qualche $t \in [0, 2\pi)$. L'applicazione lineare $L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L_A(x) = A\bar{x}$ rappresenta una **ROTAZIONE** o una **ROTO-RIFLESSIONE** di angolo t .

TEOR (!): Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). Sono allora **EQUIVALENTI** le seguenti affermazioni:

- (1) $A \in O_n(\mathbb{R})$ (cioè $\exists A^{-1} = A^T$);
- (2) le righe o le colonne di A formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n ;
- (3) $\langle A\bar{x}, A\bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$;
- (4) $\|A\bar{x}\| = \|\bar{x}\| \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Inoltre valgono le seguenti proprietà:

- (i) sè $A \in O_n(\mathbb{R})$, allora $|\det(A)| = 1$;
- (ii) sè $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, allora $AB \in O_n(\mathbb{R})$.

Oss (!): Le proprietà (3)-(4) nel teorema precedente mostrano che $A \in O_n(\mathbb{R})$ sè e solo sè l'applicazione lineare $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L_A(x) = A\bar{x}$ **CONSERVA GLI ANGOLI** tra vettori oppure le **LUNGHEZZE** (dunque entrambi).

(PROD. SCALARE) (NORMA)

TEOR (SPETTRALE REALE): Sia $A \in S_n(\mathbb{R})$ (n.a.), cioè $A^T = A$. Allora
ESISTE una BASE ORTONORMALE di \mathbb{R}^n , diciamo $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$,
formata da AUTOVETTORI di A . In particolare, A È DIAGONALIZZABILE,
ed ESISTE una matrice $M \in O_n(\mathbb{R})$ tale che

$$M^T A M = M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sono gli AUTOVALORI di A "associati" a $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$
(cioè $A\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i \quad \forall i = 1, \dots, n$). Tale M è la matrice che ha per
COLONNE i vettori $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ che formano B .