Funzioni di più variabili reali a valori reali

In Analisi 1 il dominio in un intervallo era interno, tipo $A: [0,1]$, mentre in questo corso subentrano più variabili. Possiamo constatare:

- $A = [0,1]$
- $A = [0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$ (quadrato)
- $A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] = [0,1]^3$ (cubo)
- $A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1] = [0,1]^4$ (ipercubo)

Analogamente $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n-volte, con $n \in \mathbb{N}$ dove all'aumentare del valore naturale aumenterá lo spazio del dominio.

Generalizzazione

Riguardo alle funzioni possiamo dire: sia $\underline{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $n, m \in \mathbb{N}^+$ e $\underline{x} \longmapsto \underline{F}(\underline{x})$ e

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \text{n-upla}$$

$$\underline{F}(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), F_2(\underline{x}), \dots, F_m(\underline{x})) \quad \text{m-upla}$$

Oppure con la notazione in sommatoria:

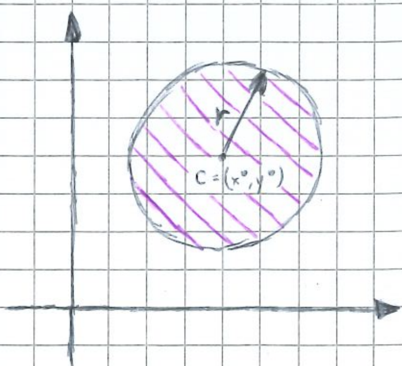
$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{u}_k \quad \text{con} \quad \underline{u}_k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$\underline{F}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{m} F_j(\underline{x}) \bar{\varepsilon}_j$$

Tipologia in $\mathbb{R}^n$

Trattiamo il complicato argomento degli intorni; consideriamo il più semplice di tutti e prendiamo un disco di raggio $r > 0$ e centro in $C = (x^\circ, y^\circ)$. Il suo possibile intorno:

$$B_r(x^\circ, y^\circ) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x^\circ)^2 + (y - y^\circ)^2 < r^2\}$$



Quindi, generalizzando, dato il punto $\underline{x}^0 = (x_1^0; x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ si definisce la palla aperta di centro $\underline{x}^0$ e raggio $r > 0$

$$B_r(\underline{x}^0) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 < r^2 \right\}$$

Oss (!): è detta DISTANZA EUCLIDEA tra punto $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{x}^0 \in \mathbb{R}^n$

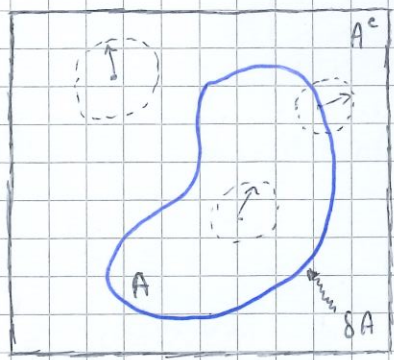
$$d(\underline{x}, \underline{x}^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2} = |\underline{x} - \underline{x}^0| = \| \underline{x} - \underline{x}^0 \|$$

e se $n = 2$ allora avremo il Teor. di Pitagora

DEF (INTORNO): Sia $\underline{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\underline{x}^0 \in I$. Si dice intorno di $\underline{x}^0$ se contiene ALMENO UNA palla aperta di centro $\underline{x}^0$

DEF: Un punto $\underline{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ si dice:

- INTERNO ad A se $\exists \ B_r(\underline{x}^0) \subseteq A$
- ESTERNO ad A se $\exists \ B_r(\underline{x}^0) \subseteq A^c$
- appartenente alla FRONTIERA di A se non è né interno né esterno



Si avrà che: Frontiera di A = δA

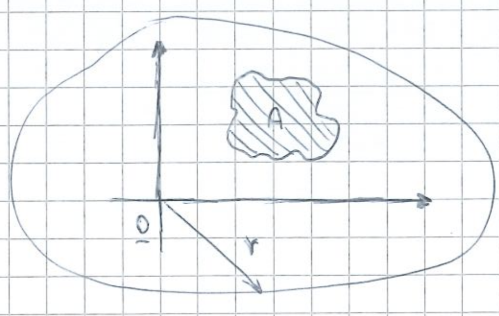
DEF: Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si può dire:

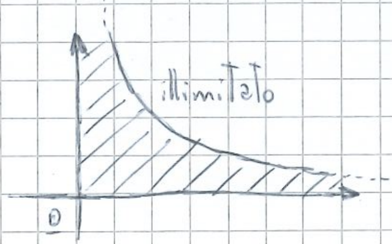
- APERTO se costituito solo da punti interni
- CHIUSO se il suo complementare (A^c) è aperto

Inoltre si dice $\bar{A} = A \cup \delta A$: "chiusura di A"

DEF: Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se $\exists \ r > 0$ t.c.

$$A \subset B_r(\underline{0})$$





DEF: Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice connesso se $\forall$ coppia di punti in A $\exists$ una curva continua interamente contenuta in A che li congiunga

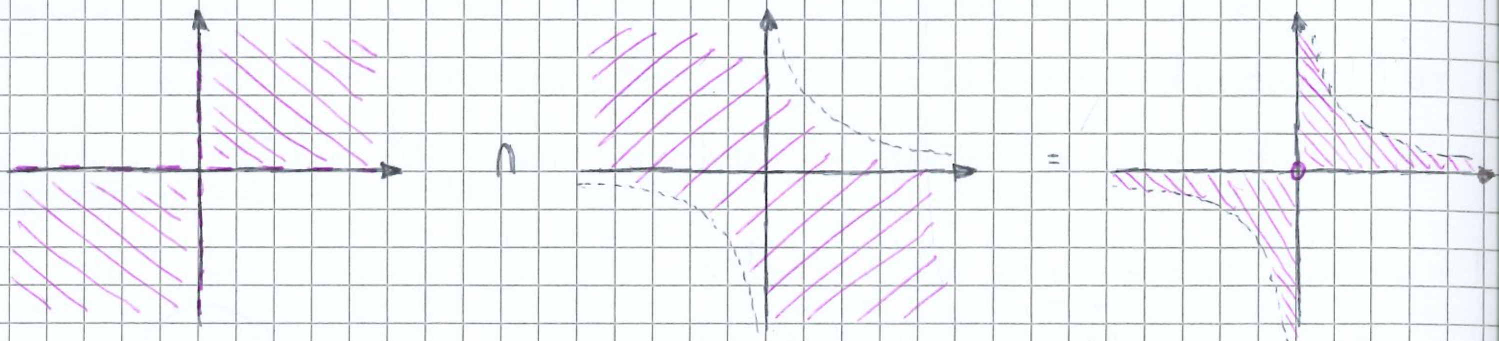
Es (!): Data $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}\sqrt{1-xy}}$ Trovare il dominio A classificandolo

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$A = \begin{cases} xy > 0 & ① \\ 1-xy > 0 & ② \end{cases} \Rightarrow$

① $xy > 0$

② $1-xy > 0 \to xy < 1 \to \Gamma: y = \frac{1}{x}, x \neq 0$



facendo quindi ① $\cap$ ② $= A$ $\rightarrow$ aperto, illimitato, non connesso

DEF: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diremo che $\underline{x}_M \in A$ é punto di massimo relativo per f se

$$\exists\ r>0 : \quad f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_M) \quad \forall \underline{x} \in B_r(\underline{x}_M) \cap A$$

e diremo che $\underline{x}_M \in A$ é punto di massimo assoluto per f se

$$f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_M) \quad \forall\ \underline{x} \in A$$

e viceversa per il minimo

LIMITI DI FUNZIONI IN N-VARIABILI

DEF: Sia $l \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita almeno in $B_r(\underline{x}^\circ) - \{\underline{x}^\circ\}$ si dice che

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^\circ} f(\underline{x}) = l$$

se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $\underline{x} \in B_\delta(\underline{x}^\circ) - \{\underline{x}^\circ\} \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$ dove

$$B_\delta(\underline{x}^\circ) - \{\underline{x}^\circ\} = \left\{ (\underline{x}) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^\circ)^2 < \delta^2 \right\} - \{\underline{x}^\circ\}.$$

Analogamentre avremo che

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^\circ} f(\underline{x}) = \pm \infty$$

se $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $\underline{x} \in B_\delta(\underline{x}^\circ) - \{\underline{x}^\circ\} \Rightarrow f(\underline{x}) > M$ oppure minore

Es (!): Proviamo il metodo delle RESTRIZIONI sulla funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ trovando il limite nell'origine

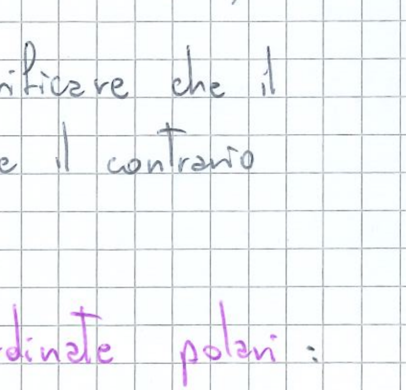
- $y = mx$: $f(x, mx) = \dfrac{x^2 m x}{x^4 + m^2 x^2} = \dfrac{x m}{x^2 + m^2} \longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x, mx) = 0$
- $x = 0$: $f(0,y) = \dfrac{0^2 y}{0^4 + y^2} = 0 \longrightarrow \lim_{y \to 0} f(0,y) = 0$
- $y = x^2$: $f(x, x^2) = \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \dfrac{1}{2} \longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \dfrac{1}{2}$

$\Big\} \nexists$

Le RESTRIZIONI vengono spesso utilizzate per verificare che il limite NON esiste, se si vuole invece osservare il contrario bisogna provarlo mediante definizione.

Spesso si semplifica il calcolo passando in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = x^\circ + \rho \cos\theta \\ y = y^\circ + \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \rho = \sqrt{(x - x^\circ)^2 + (y - y^\circ)^2} > 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$



Es (1): Troviamo il limite nell'origine di $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$. Se procediamo con le restrizioni e notiamo che il limite è "0".
A questo punto per verificare si passa in polari:

$$\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)} f(x,y) \rightsquigarrow \lim_{\rho\to 0^+} f(x+\rho\cos\theta,\ y+\rho\operatorname{sen}\theta)$$

e per ESISTERE questo limite NON deve dipendere da θ. Per dimostrare che $f(x,y)\to l$ per $(x,y)\to(x^0,y^0)$ è sufficiente provare che

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \left| f(x^0+\rho\cos\theta,\ y^0+\rho\operatorname{sen}\theta) - l \right| = 0$$

oppure che sia valida la seguente

$$\left| f(x^0+\rho\cos\theta,\ y^0+\rho\operatorname{sen}\theta) - l \right| \le g(\rho) \to 0 \quad \text{per } \rho\to 0^+$$

Ora riconsideriamo la funzione di partenza:

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(0+\rho\cos\theta,\ 0+\rho\operatorname{sen}\theta) = \frac{2\rho^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\,\rho}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}_{1}} = 2\rho\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta$$

$$\left| f(\rho\cos\theta,\ \rho\operatorname{sen}\theta) - l \right| = \left| 2\rho\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - 0 \right| = \left| 2\rho\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta \right|$$

$$\to = 2\rho\cos^2\theta\,|\operatorname{sen}\theta| \le \underbrace{2\rho\cdot 1\cdot 1}_{\text{MAGGIORAZIONE (sup)}} = 2\rho \to g(\rho)$$

Quindi si avrà che
$g(\rho)\to 0$ perché $2\rho\to 0$ per $\rho\to 0^+$ e quindi $\exists\ l = 0$.

FUNZIONI CONTINUE

DEF: Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^0 \in A$ diremo che f è continua in $\underline{x}^0$ SE E SOLO SE

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)$$

DEF: f è CONTINUA SU $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se è continua in ogni punto di Ω, diremo che $f \in C^0(\Omega)$

Oss (!): Si estendono i teoremi noti per $n=1$ riguardo limiti, continuità di somme, prodotti, quozienti, composizioni....

TEOR (PERMANENZA DEL SEGNO): Se f continua in $\underline{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ e $f(\underline{x}^0) > 0$:

$$\Rightarrow \exists\ \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad f(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \in B_r(\underline{x}^0)$$

TEOR (DI WEIERSTRASS): Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato con $f: A \to \mathbb{R}$ continua su A, allora diciamo

$$\Rightarrow \exists\ \underline{x}^m, \underline{x}^M \in A \quad \text{t.c.} \quad f(\underline{x}^m) \leq f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}^M) \quad \forall \underline{x} \in A$$

TEOR (DEGLI ZERI): Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, connesso se $f \in C^0(A)$ ed

$$\exists\ \underline{x}^1, \underline{x}^0 \in A \quad \text{t.c.} \quad [f(\underline{x}^0) f(\underline{x}^1)] < 0 \Rightarrow \exists\ \tilde{\underline{x}} \in A \quad \text{t.c.} \quad f(\tilde{\underline{x}}) = 0$$

Oss (!): Consideriamo, per capire il perché della connessione, la seguente $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{su } A_1 \\ -1 & \text{su } A_2 \end{cases}$, $A = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; difatti la funzione è continua ma dato il "salto" non incrocia l'asse delle "x" e pertanto il Teorema degli zeri necessita della condizione di connessione

CONSEGUENZA

Se f è continua, su A dominio connesso, l'insieme degli zeri di f spezza il dominio in un certo numero di insiemi connessi, su ciascuno dei quali il segno di f è costante.

DERIVATE PARZIALI

DEF: Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, si dice derivabile in $(x^\circ, y^\circ) \in A$ se $\exists$ finiti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^\circ, y^\circ) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^\circ + h, y^\circ) - f(x^\circ, y^\circ)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^\circ, y^\circ) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x^\circ, y^\circ + k) - f(x^\circ, y^\circ)}{k}$$

e diciamo che le seguenti sono le derivate parziali di f in (x°, y°)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^\circ, y^\circ) = f_x(x^\circ, y^\circ) = \partial_x f(x^\circ, y^\circ)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^\circ, y^\circ) = f_y(x^\circ, y^\circ) = \partial_y f(x^\circ, y^\circ)$$

GRADIENTE DI f

È il vettore che ha come componenti le derivate parziali e si scrive come:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

DEF (CASO GENERALE): Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, si dice derivabile in $\underline{x}^\circ \in A$ se $\exists$ finite <u>TUTTE</u> le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^\circ) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_i^\circ + h, \dots, x_n^\circ) - f(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)}{h}$$

con $i = 1, 2, \dots, n$; mentre il GRADIENTE di f sarà:

$$\nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}) \right)$$

Oss (!): Derivabilità NON IMPLICA la continuità

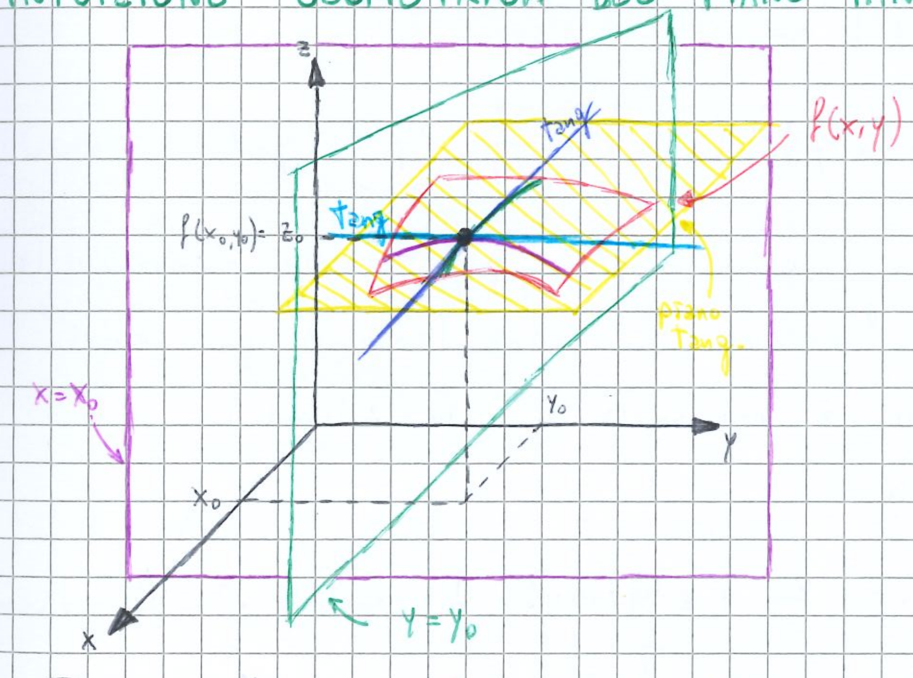
DEF (DERIVATE DIREZIONALI): Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $(x^0, y^0) \in A$, $\underline{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ chiamiamo derivata direzionale di f in (x^0, y^0) nella direzione $\underline{v}$ se $\exists$ finito:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x^0, y^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + t\cos\theta,\ y^0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x^0, y^0)}{t}$$

DEF (DER. DIR. IN $\mathbb{R}^n$): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{x}^0 \in A$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ chiamiamo derivata direzionale di f in $\underline{x}^0$ nella direzione $\underline{v}$ se $\exists$ finito il seguente limite:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}^0)}{t}$$

INTUIZIONE GEOMETRICA DEL PIANO TANGENTE



Per ricavare il piano tangente svolgiamo due procedimenti opposti e troviamo le due tangenti alle curve in (x^0, y^0) prima in $x = x^0$, poi in $y = y^0$. Con diversi calcoli veloci si ricava che il candidato piano tangente è il seguente, scritto in viola, e contiene entrambe le rette tangenti al punto (x^0, y^0)

$$Z = f(x^0, y^0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) \cdot (x - x^0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) \cdot (y - y^0)$$

Per capire se sia effettivamente il piano tangente introduciamo il concetto di DIFFERENZIABILITÀ.

DEF (DIFFERENZIABILITÁ): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $(x^\circ, y^\circ) \in A$ diremo che f é **differenziabile** in (x°, y°) se $\exists\, \underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$f(x^\circ + h, y^\circ + k) - f(x^\circ, y^\circ) = (a_1, a_2) \cdot (h, k) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

per valori di $(h, k) \to (0,0)$, ossia é equivalente a

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x^\circ + h, y^\circ + k) - f(x^\circ, y^\circ) - (a_1, a_2) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

PROP: Se f é differenziabile in $(x^\circ, y^\circ) \in A \Rightarrow$ allora f é continua e derivabile in (x°, y°); inoltre $\underline{a} = \nabla f(x^\circ, y^\circ)$

PROP: Se f é differenziabile in $(x^\circ, y^\circ) \in A \Rightarrow$ allora ammette un piano tangente in (x°, y°) e

$$z = f(x^\circ, y^\circ) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^\circ, y^\circ) \cdot (x - x^\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^\circ, y^\circ) \cdot (y - y_\circ)$$

Che in parole povere, con $(x, y) \to (x^\circ, y^\circ)$, può e deve essere vista come approssimazione della funzione al piano tangente per valori tendenti al punto considerato, é una sorta di parallelismo a due dimensioni di Taylor

DEF (CASO GENERALE): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{x}^\circ \in A$, diremo che f é **differenziabile** in $\underline{x}^\circ$ se $\exists\, \underline{a} \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$f(\underline{x}^\circ + \underline{h}) - f(\underline{x}^\circ) = \underline{a} \cdot \underline{h} + o(|\underline{h}|)$$

con $\underline{h} \to 0$, $\underline{x}^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$, $\underline{h} = (h_1, \dots, h_n)$ e l'IPERPIANO TANGENTE sarà

$$z = f(\underline{x}^\circ) + \nabla f(\underline{x}^\circ) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^\circ) \equiv z = f(\underline{x}^\circ) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}^\circ) \cdot (x_k - x_k^\circ)$$

DEF: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in C^1(A)$ se $\exists$ e sono continue tutte le derivate parziali prime in ogni punto di A.

Oss (!): Se f è derivabile NON è detto che $f \in C^1$

Teor: Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{x}^0 \in A$, se $\exists$ tutte le derivate parziali di f in $\underline{x}^0$ e sono continue in un intorno di $\underline{x}^0$ allora f è DIFFERENZIABILE in $\underline{x}^0$. In particolare se $f \in C^1(A)$ $\Rightarrow$ f è differenziabile $\forall$ punto di A.

Prop: Se f è differenziabile in $(x^0, y^0) \in A$ allora $\exists$ tutte le derivate direzionali in (x^0, y^0) ($\forall \theta \in [0, 2\pi]$) e vale la regola del gradiente dove, con $\underline{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x^0, y^0) = \nabla f(x^0, y^0) \cdot \underline{v}$$

Oss (!): Se non vale questa regola $\Rightarrow$ f NON è differenziabile in (x^0, y^0)

Conclusione

Se $f \in C^1(A)$ $\Rightarrow$ f differenziabile in A quindi:

- f è CONTINUA in A
- f è DERIVABILE in A
- $\exists$ l'IPERPIANO TANGENTE in ogni punto di A
- $\exists$ tutte le DERIVATE DIREZIONALI $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}$
- vale la REGOLA DEL GRADIENTE $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^0) = \nabla f(\underline{x}^0) \cdot \underline{v}$

Osservazioni geometriche

Se f è differenziabile allora la regola del gradiente può riscriversi

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \nabla f \cdot \underline{v} = |\nabla f| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \cdot \cos\alpha$$

poiché prodotto scalare; allora possiamo dire

- $\alpha = 0$ allora $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}$ assume valore massimo
- $\alpha = \pi$ allora $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}$ assume valore minimo
- $\alpha = \frac{\pi}{2}$ allora $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = 0 \Leftrightarrow \nabla f \cdot \underline{v} = 0$

Derivate di ordine superiore

Suppongo che $f(x,y)$ possieda $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ su A, A aperto e $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ci chiediamo se $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ è a sua volta derivabile. In tal caso potrò calcolare le seguenti:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

per questioni di notazione si possono scrivere anche $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$

Def (Matrice Hessiana): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{x}^0 \in A$. Se $\exists$ tutte le derivate seconde di f in $\underline{x}^0$, la matrice sarà

$$\mathbb{H}_f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\underline{x}^0) & f_{x_1x_2}(\underline{x}^0) & \cdots & f_{x_1x_n}(\underline{x}^0) \\ f_{x_2x_1}(\underline{x}^0) & f_{x_2x_2}(\underline{x}^0) & \cdots & f_{x_2x_n}(\underline{x}^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\underline{x}^0) & f_{x_nx_2}(\underline{x}^0) & \cdots & f_{x_nx_n}(\underline{x}^0) \end{bmatrix}$$

Teor (di Schwarz): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{x}^0 \in A$ allora supponiamo che per indici $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ le derivate seconde miste $f_{x_ix_j}$, $f_{x_jx_i}$ ESISTONO in un intorno di $\underline{x}^0$ e sono continue

$$\Longrightarrow \quad f_{x_ix_j}(\underline{x}^0) = f_{x_jx_i}(\underline{x}^0)$$

Def: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in C^2(A)$ se $\exists$ e sono continue tutte le derivate seconde di f in A

Def: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in C^k(A)$ se $\exists$ e sono continue tutte le derivate di f in A fino all'ordine "k"

Oss (!): "$f \in C^2(A) \Rightarrow f \in C^1(A) \Rightarrow f$ è DIFFERENZIABILE" e inoltre tutte le derivate seconde miste sono uguali e vale Schwarz

DEF: La TRACCIA della matrice hessiana è detta laplaciano di f

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \quad ; \quad \Delta f = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i x_i}$$

Oss (!): Vale la generalizzazione del Teorema di Schwarz per $f \in C^k(A)$.

FORMULA DI TAYLOR

TEOR (n = 2, CON RESTO DI PEANO): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in C^2(A)$. Per ogni $(x^\circ, y^\circ) \in A$ vale la formula

$$f(x,y) = f(x^\circ, y^\circ) + \nabla f(x^\circ, y^\circ) \cdot \begin{pmatrix} x - x^\circ \\ y - y^\circ \end{pmatrix}^T + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} x - x^\circ \\ y - y^\circ \end{pmatrix}^T \cdot \mathbb{H}_f(x^\circ, y^\circ) \cdot \begin{pmatrix} x - x^\circ \\ y - y^\circ \end{pmatrix}\right] + o(\ldots)$$

dove il resto, ovvero l'o-piccolo, sarà $o((x-x^\circ)^2 + (y-y^\circ)^2)$ per $(x,y) \to (x^\circ, y^\circ)$.

Prima però di continuare con queste cose facciamo un accenno all'OTTIMIZZAZIONE LIBERA, ovvero al calcolo di massimi e minimi in qualsiasi tipologia di problema, quindi:

DEF: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{x}^\circ \in A$, f differenziabile in $\underline{x}^\circ$ allora $\underline{x}^\circ$ si dice punto stazionario (o critico) per f se

$$\nabla f(\underline{x}^\circ) = 0$$

TEOR (DI FERMAT): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto e f differenziabile in $\underline{x}^\circ$, $\underline{x}^\circ \in A$ è punto di estremo relativo (max/min relativo)

$$\Longrightarrow \quad \underline{x}^\circ \text{ è punto stazionario}$$

Oss (!): non vale il viceversa causa flesso a tangente orizzontale!

DEF: Un punto $\underline{x}^\circ \in A$ stazionario che NON è di estremo relativo viene definito punto di sella

Forme Quadratiche

Le forme quadratiche sono in sostanza gli sviluppi del secondo ordine nella formula di Taylor. Se (x°, y°) è punto stazionario si ha

$$f(x,y) - f(x^\circ, y^\circ) \sim \frac{1}{2}\left[(x-x^\circ, y-y^\circ) \cdot \mathbb{H}_f(x^\circ,y^\circ) \cdot \begin{pmatrix} x-x^\circ \\ y-y^\circ \end{pmatrix}\right]$$

e questo deriva dall'annullamento del gradiente di f $(\nabla f = 0)$ e dal cambio/approssimazione con "$\sim$" dovuto all'eliminazione dell'errore, equivalente all'o-piccolo; il tutto inserito nella classica formula di Taylor.

In n-dimensioni si ha $Q(\underline{h}) = \underline{h} \cdot \mathbb{H} \cdot \underline{h}^T$, $\underline{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

DEF: Una forma quadratica $Q(\underline{h})$ con $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ si dice

- definita positiva (negativa) se $\forall\, \underline{h} \neq \underline{0}$ $\quad Q(\underline{h}) > 0 \quad (< 0)$
- semidefinita positiva (negativa) se $\forall\, \underline{h} \neq \underline{0}$ $\quad Q(\underline{h}) \geq 0 \quad (\leq 0)$ ed esiste almeno un $\underline{h} \neq \underline{0}$ t.c. $Q(\underline{h}) = 0$
- indefinita se $\exists\ \underline{h}_1, \underline{h}_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Q(\underline{h}_1) > 0$ e $Q(\underline{h}_2) < 0$

DEF (Test Hessiana): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $(x^\circ, y^\circ) \in A$ è punto stazionario per f. Suppongo $\exists$ intorno I di (x°, y°) dove $f \in C^2(I)$. Sia $\mathbb{H}_f$ la matrice hessiana, allora:

- se $\det \mathbb{H}_f(x^\circ, y^\circ) > 0 \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(x^\circ,y^\circ) > 0 \Rightarrow (x^\circ,y^\circ) \text{ MINIMO} \\ f_{xx}(x^\circ,y^\circ) < 0 \Rightarrow (x^\circ,y^\circ) \text{ MASSIMO} \end{cases}$
- se $\det \mathbb{H}_f(x^\circ, y^\circ) < 0 \Rightarrow (x^\circ, y^\circ)$ PUNTO DI SELLA
- se $\det \mathbb{H}_f(x^\circ, y^\circ) = 0 \Rightarrow$ TEST INEFFICACE

Ora torniamo invece alla formula di Taylor generalizzata

FORME QUADRATICHE

1) $Q(x,y) = 2x^2 + \overset{b=2}{4xy} + 3y^2$

$D_1 = 2$, $D_2 = 6 - 4 = +2$

> 0 $\qquad > 0$

ne risulta essere definita positiva

2) $Q(x,y) = x^2 - \overset{b=-1}{2xy} + y^2$

$D_1 = 1 > 0$, $D_2 = 1 - 1 = +0 \leq 0$

ne risulta essere semidefinita positiva

3) $Q(x,y,z) = x^2 + \overset{b=1}{2xy} + \overset{c=1}{2xz} + y^2 + \overset{e=1}{2yz} + z^2$

$D_1 = 1 > 0$, $D_2 = 1 - 1 = -0 = 0$

$D_3 = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 1+1+1-1-1-1 = 0 = 0$

ne risulta essere indefinita

4) $Q(x,y,z) = -x^2 + \overset{b=1}{2xy} - \overset{c=-1}{2xz} + y^2 + \overset{e=1}{2yz} - z^2$

$D_1 = -1 < 0$, $D_2 = -1 - 1 = -2 < 0$

$D_3 = \left|\begin{matrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 1 - 1 - 1 - (1 - 1 - 1) = 0.$

definita negativa

5) $Q(x,y,z) = 3x^2 + \overset{b=1}{2xy} + \overset{c=1}{2xz} + y^2 + \overset{e=1}{2yz} + 4z^2$

$D_1 = 3 > 0$, $D_2 = 3 - 1 = 2 > 0$

$D_3 = \left|\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 12 + 1 + 1 - (1 + 3 + 4) = 6 > 0$

ne risulta essere definita positiva

$Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$D_1 = a$

$D_2 = ac - b^2$

$Q(x,y,z) = ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2$

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

$D_1 = a$

$D_2 = \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2$

$D_3 = \det(A)$

- In $\mathbb{R}^2$ abbiamo

DEF. POSITIVA: $D_1 > 0$, $D_2 > 0$

SEMIDEF. POSIT.: $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$

DEF. NEG.: $D_1 < 0$, $D_2 > 0$

SEMIDEF. NEG.: $D_1 \leq 0$, $D_2 > 0$

INDEFINITA: $D_2 < 0$

- In $\mathbb{R}^3$ abbiamo

DEF. POSIT.: $D_1, D_2, D_3 > 0$

DEF. NEGAT.: $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$

SEMIDEF. POS.: $D_1, D_2, D_3 \geq 0$

SEMIDEF. NEG.: $D_1 \leq 0$, $D_2 \geq 0$, $D_3 \leq 0$

INDEFINITA: $D_3 < 0$

TEOR (TAYLOR GENERALE): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, A aperto, $\forall \underline{x}^\circ \in A$ vale

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^\circ) + \nabla f(\underline{x}^\circ) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^\circ) + \frac{1}{2}\left[(\underline{x}-\underline{x}^\circ) \cdot \mathbb{H}_f(\underline{x}^\circ) \cdot (\underline{x}-\underline{x}^\circ)^T\right] + o(|\underline{x}-\underline{x}^\circ|^2)$$

e analogamente, se consideriamo $\underline{h} = \underline{x} - \underline{x}^\circ$, $\underline{h} \to \underline{0}$ se $\underline{x} \to \underline{x}^\circ$:

$$f(\underline{x}^\circ + \underline{h}) = f(\underline{x}^\circ) + \nabla f(\underline{x}^\circ) \cdot \underline{h} + \frac{1}{2}\left[\underline{h} \cdot \mathbb{H}_f(\underline{x}^\circ) \cdot \underline{h}^T\right] + o(|\underline{h}|^2)$$

se $\underline{x}^\circ$ punto stazionario $\Rightarrow \nabla f(\underline{x}^\circ) = \underline{0}$: (n-dimensioni)

$$f(\underline{x}^\circ + \underline{h}) - f(\underline{x}^\circ) = \frac{1}{2}\left[\underline{h} \cdot \mathbb{H}_f(\underline{x}^\circ) \cdot \underline{h}^T\right] + o(|\underline{h}|^2)$$

pertanto grazie alla forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ si ritrovano max/min.
Nel caso n-dimensionale faremo così:

LEGAME CON AUTOVALORI

Sia $\mathbb{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, I la matrice identità $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, gli autovalori di $\mathbb{H}$ risolvono

$$\det(\mathbb{H} - I\lambda) = 0$$

se $\mathbb{H}$ è SIMMETRICO gli autovalori sono reali.

TEOR (1): la forma quadratica $Q(\underline{h}) = \underline{h} \cdot \mathbb{H} \cdot \underline{h}^T$ è:

- definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori di $\mathbb{H}$ sono >0 (<0)
- semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori di $\mathbb{H}$ sono ≥ 0 (≤ 0), minimo 1 nullo
- indefinita se $\mathbb{H}$ ha almeno un autovalore positivo e uno negativo

TEOR (2): Sia $Q(\underline{h}) = \underline{h} \cdot \mathbb{H} \cdot \underline{h}^T$ forma quadratica in $\mathbb{R}^n$, allora

- se $Q(\underline{h})$ è definita positiva $\Rightarrow Q(\underline{h}) \geq \lambda^{\oplus}_{min} \cdot |\underline{h}|^2$ $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$
- se $Q(\underline{h})$ è definita negativa $\Rightarrow Q(\underline{h}) \leq \lambda^{\ominus}_{max} \cdot |\underline{h}|^2$ $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$

TEOR (TEST HESSIANA): Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in C^2(A)$, $\underline{x}^\circ \in A$ punto stazionario per f. Se la forma quadratica $Q(\underline{h}) = \underline{h} \cdot \mathbb{H}_f(\underline{x}^\circ) \cdot \underline{h}^T$ è:

- definita positiva (negativa) $\Rightarrow \underline{x}^\circ$ punto di minimo (massimo) locale
- indefinita $\Rightarrow \underline{x}^\circ$ punto di sella

Studiamo ora l'OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA con i seguenti:

DEF: Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si dice che $(x^\circ, y^\circ) \in A$ è un punto di *estremo vincolato* di f a $g(x,y) = 0$ se (x°, y°) è punto di estremo per la restrizione di f a $g(x,y) = 0$

Oss (!): Se (x°, y°) è punto di estremo libero e $g(x^\circ, y^\circ) = 0$ allora è anche punto di estremo vincolato.

DEF (LAGRANGIANA): Essa è una funzione di questo tipo

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

da ottimizzare (in modo LIBERO) ossia

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \underline{0} \iff \begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ -g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

TEOR (MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE): Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $f, g \in C^1(A)$. Sia $(x^\circ, y^\circ) \in A$ un punto di estremo vincolato di f a $g(x,y) = 0$, si supponga $\nabla g(x^\circ, y^\circ) \neq 0$.
Allora $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, detto *moltiplicatore di Lagrange* t.c.

$$\nabla f(x^\circ, y^\circ) = \lambda_0 \nabla g(x^\circ, y^\circ)$$

CURVE

Una curva in forma parametrica $\underline{r} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ in "t"

$$t \longmapsto \underline{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, \underline{e}_i$$

DEF (NOZIONE DI LIMITE): Si dice che

$$\lim_{t \to t_0} \underline{r}(t) = \underline{\ell} \iff \lim_{t \to t_0} |\underline{r}(t) - \underline{\ell}| = 0$$

con $|\dots|$ = "distanza euclidea" = $\sqrt{(r_1(t) - \ell_1)^2 + \dots + (r_n(t) - \ell_n)^2}$. Siano $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ allora se $t \to t_0$

$$\underline{r}(t) \to \underline{\ell} \iff r_i(t) \to \ell_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Es (!): per $\underline{r}(t) = (t, 1+t^2, e^{-t})$, $t \in [0, 2]$

$$\lim_{t \to 1} \underline{r}(t) = (1, 2, e^{-1})$$

Oss (!): Le principali caratteristiche di regolarità (limite, continuità, derivabilità) vanno studiate componenti per componenti. Quindi per esempio, diremo $\underline{r}(t)$ CONTINUA in t_0 se

$$\lim_{t \to t_0} \underline{r}(t) = r(t_0)$$

ossia $\underline{r}(t)$ continua SE E SOLO SE lo sono tutte le sue componenti scalari

DEF: Vediamo ora alcune definizioni:

- Si dice ARCO DI CURVA CONTINUA in $\mathbb{R}^n$ una funzione $\underline{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua
- Si dice SOSTEGNO della curva l'insieme immagine $\underline{r}([a, b])$, ossia l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ percorsi dal punto mobile
- Una curva si dice CHIUSA se $\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$
- Una curva si dice semplice se $t_1 \neq t_2$ e NON si autointerseca

$$\Longrightarrow \underline{r}(t_1) \neq \underline{r}(t_2) \quad \forall\, t_1, t_2 \in [a, b]$$

Oss (!): Il sostegno di una curva può essere percorso in infiniti modi e, inoltre, esistono PARAMETRIZZAZIONI EQUIVALENTI di una stessa curva.

DEF (PARAM. EQUIV.): Siano $\underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\underline{q} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$; sono rappresentazioni equivalenti della stessa curva se $\exists\, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ con $\psi \in C^1([c,d])$ e $\psi' \neq 0$ t.c.

$$\underline{q}(\tau) = \underline{r}(\psi(\tau)) \quad \text{con} \quad \tau \in [c,d]$$

DEF (DERIVABILITÀ): Sia $\underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, essa si dice DERIVABILE in $t_0 \in [a,b]$ se $\exists$ finito

$$\underline{r}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\underline{r}(t_0+h) - \underline{r}(t_0)}{h}$$

ossia $\exists$ finito:

$$r_1'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{r_1'(t_0+h) - r_1'(t_0)}{h}, \ldots, r_n'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{r_n'(t_0+h) - r_n'(t_0)}{h}$$

DEF: $\underline{r} \in C^1([a,b])$ se è DERIVABILE $\forall t \in (a,b)$ e $\underline{r}'(t)$ CONTINUA su (a,b).

DEF: Sia $\underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, essa è REGOLARE se:

- $\underline{r} \in C^1([a,b])$
- $\underline{r}'(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in (a,b) \longrightarrow$ EQUIVALE a $|\underline{r}'(t)| \neq 0$

ossia per essere regolare NON possono essere nulle contemporaneamente tutte le componenti di $\underline{r}'(t)$.

Riesco a definire il VERSORE TANGENTE alla curva se ho una direzione, ossia se $\underline{r}'(t) \neq \underline{0}$ (ovvero se è regolare).

DEF (VERSORE TANGENTE): Data una curva regolare, il versore tangente, risulta ben definito

$$\underline{T}(t) = \frac{\underline{r}'(t)}{|\underline{r}'(t)|}$$

Es (!): Data $\underline{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$ dire se é regolare

. $\underline{r} \in C^1([0,2\pi])$ poiché $\cos t, \operatorname{sen} t \in C^\infty(\mathbb{R})$

. $\underline{r}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ e

$\underline{r}'(t) \neq \underline{0} \longleftrightarrow |\underline{r}'(t)| \neq 0 \rightarrow \sqrt{r_1'(t)^2 + r_2'(t)^2} = \sqrt{1} \neq 0$

Quindi $\underline{r}(t)$ é REGOLARE e $\underline{T}(t) = \dots = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$

DEF: $r: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice regolare a tratti se $\exists$ almeno una soddivisione di $[a,b]$ t.c. la curva sia regolare nei sottointervalli di $[a,b]$

TRIEDRO FONDAMENTALE

$\underline{r}(t): [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é curva regolare in t_0 e $\underline{r} \in C^2([a,b])$ con versore tangente $\underline{T}(t_0) = \dfrac{\underline{r}'(t_0)}{|\underline{r}'(t_0)|}$ in $\underline{r}(t_0)$.

Se $\underline{T}(t_0) \neq \underline{0}$ allora posso introdurre un versore NORMALE

$$\underline{N}(t_0) = \frac{\underline{T}'(t_0)}{|\underline{T}'(t_0)|}$$

e $\underline{T}, \underline{N}$ giacciono sul piano osculatore.

Troviamo infine il versore BINORMALE in $\underline{r}(t_0)$:

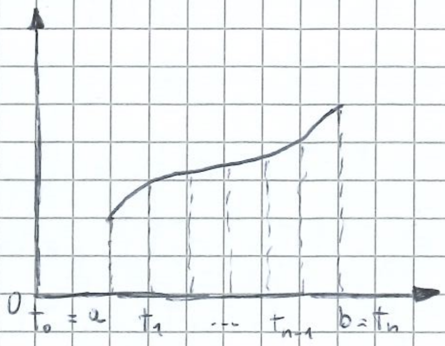
$$\underline{B}(t_0) = \underline{T}(t_0) \times \underline{N}(t_0)$$

MAX / MIN VINCOLATI

Se $g(x,y) = 0$ é riscrivibile come $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$ allora pongo nella funzione $f(x(t), y(t)) = F(t)$, $t \in [a,b]$.

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Data $\underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ la parametrizzazione di una curva Γ cosa si intende per lunghezza? Definiamo ora la partizione di $[a,b]$:



$$P = \{ t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b \}$$

come sottodivisione QUALSIASI dell'intervallo.

Se $\underline{r}$ è CONTINUA associo a ogni P una poligonale inscritta in Γ costituita da segmenti lunghi

$$|\underline{r}(t_j) - \underline{r}(t_{j-1})| \quad \text{con } j = 1, \dots, n$$

e calcolo le lunghezze spezzate $l(P) = \sum_{j=1}^{n} |\underline{r}(t_j) - \underline{r}(t_{j-1})|$ e perciò $l(P)$ dipende dalla scelta di P e approssima per difetto a Γ.

DEF: Si dice rettificabile se

$$\sup_P l(P) = l(\Gamma) < +\infty$$

dove estremo superiore è calcolato al variare delle possibili partizioni P di $[a,b]$. $l(\Gamma)$ è per definizione la lunghezza di Γ

Oss (!): Ci sono curve dove estremo superiore dà $+\infty$ come ad esempio $\underline{r}(t) = (t, F(t))$ con $F(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{1}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$; in $t \in [0,1]$

TEOR: Sia $\underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ la parametrizz. di una curva Γ regolare, allora è RETTIFICABILE e

$$l(\Gamma) = \int_\Gamma ds = \int_a^b |\underline{r}'(t)| \, dt$$

Oss (!): Il Teorema si estende anche a curve regolari a tratti a patto di suddividere $[a,b]$ nei sottointervalli dove la curva è regolare

COROLLARIO: Sia $f \in C^1([a,b])$ allora la sua lunghezza del grafico è e sarà

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

DIM: $\Gamma: \underline{r}(t) = (t, f(t)) \quad t \in [a,b]$

- $\underline{r} \in C^1([a,b])$ da ipotesi "H_p" ovvero $f \in C^1([a,b])$
- $\underline{r}'(t) = (1, f'(t))$

Ne deriva che è REGOLARE e dato $|\underline{r}'(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2} \neq 0, \ \forall t \in (a,b)$
e perciò $\ell(\Gamma) = \int_a^b |\underline{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$

INTEGRALI CURVILINEI DI 1^a SPECIE

DEF: Sia Γ definita come $\underline{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, arco di curva regolare e sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, contenente Γ, f CONTINUA, allora si dice integrale curvilineo di 1^a specie di f lungo Γ

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(\underline{r}(t)) \cdot |\underline{r}'(t)|\, dt$$

Oss(!): $\int_\Gamma f\, ds$ NON dipende né dalla parametrizzazione di Γ né dal verso di percorrenza di Γ

Es(!): Prendiamo una funzione e una curva come $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\Gamma: \underline{r}(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t, \rho t)$ con $t \in [0, \pi]$ e $R, \rho > 0$.
Calcolare $\int_\Gamma f\, ds$:

- $\underline{r} \in C^1([0,\pi])$ sì
- $\underline{r}'(t) = (-R\operatorname{sen} t, R\cos t, \rho)$ e $|\underline{r}'(t)| = \sqrt{R^2\operatorname{sen}^2 t + R^2\cos^2 t + \rho^2} = \sqrt{R^2 + \rho^2} > 0$

Quindi Γ è REGOLARE; $f \in C^0(\mathbb{R}^3)$ e $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_0^\pi f(\underline{r}(t)) \cdot |\underline{r}'(t)|\, dt = \int_0^\pi (R^2\cos^2 t + R^2\operatorname{sen}^2 t - \rho t) \cdot \sqrt{R^2 + \rho^2}\, dt$$

$$= \sqrt{R^2 + \rho^2} \int_0^\pi R^2 - \rho t\, dt = \sqrt{R^2 + \rho^2} \left[R^2 t - \rho \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \sqrt{R^2 + \rho^2} \left(R^2 \pi - \rho \frac{\pi^2}{2} \right)$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

DEF: Si dice eq. differenziale ordinaria di n-ordine un'eq. del tipo:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad t \in I \subset \mathbb{R} \qquad \odot$$

e si può scrivere che $F: \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$

DEF: La funzione $\varphi(t)$ è soluzione (o integrale) di $\odot$ nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ se $\varphi(t): I \to \mathbb{R}$ è "n" volte derivabile in I e
$F(t, \varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}) = 0 \quad \forall t \in I$

OSS (!): Un'equazione può NON ammettere soluzioni come ad esempio "$1 + (y')^2 = 0$". Quando un'equazione ammette soluzioni ne ha infinite dipendenti da "n" costanti arbitrarie

Troviamo ora la forma normale dell'equazione differenziale se è possibile esplicitandola alla derivata di ordine maggiore

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad t \in I \qquad \text{(EQ)}$$

Associamo ora all'equazione "n" condizioni del tipo

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \qquad \# \qquad \text{(CI)}$$

dove t_0 è l'istante iniziale e $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ descrivono lo stato nel suddetto istante.

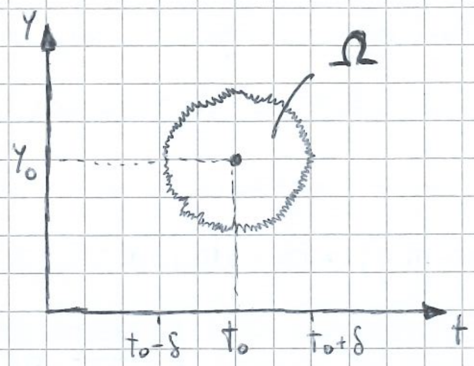
DEF (INTEGRALE GENERALE): È l'insieme delle infinite soluzioni dell'equazione

DEF (INTEGRALE PARTICOLARE): È una soluzione dell'equazione che soddisfa particolari condizioni e proprietà, come in #

Chiamiamo problema di Cauchy la nostra equazione differenziale alle sue condizioni iniziali

ESISTENZA E UNICITÀ EQ. DEL 1° ORDINE

Il problema di Cauchy (PC) sarà:



$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \qquad (t_0, y_0 \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

da (CI) $y(t)$ passa (t_0, y_0). Trovare soluzione (locale) vuol dire trovare $\delta > 0$, con $y \in C^1(t_0-\delta, t_0+\delta)$ t.c. $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ $\forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$.

TEOR (DI PEANO): Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aperto, $(t_0, y_0) \in \Omega$ allora se $f \in C^0(\Omega) \Rightarrow \exists$ una soluzione del problema di Cauchy

TEOR (DI CAUCHY): Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aperto, $(t_0, y_0) \in \Omega$ avremo che se $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C^0(\Omega) \Rightarrow \exists$ una unica soluzione del problema

Oss (!): L'ipotesi $\frac{\partial f}{\partial y} \in C^0(\Omega)$ può essere attenuata richiedendo al suo posto che f sia LIPSCHITZIANA rispetto a y, ossia:

$$\exists\, L > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

$\forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Sono equazioni del tipo $\begin{cases} y' = h(t)\cdot g(y) = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \quad \odot \end{cases}$, consideriamo ora:

COROLLARIO: Siano $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $h \in C^0(\Omega)$ con Ω intorno di t_0

- se "g" è CONTINUA in un intorno di $y_0 \Rightarrow \odot$ ammette soluzioni (locali)
- se "g" è di classe C^1 in un intorno di $y_0 \Rightarrow \odot$ ammette un'unica soluzione (locale)

Vediamo ora la tecnica risolutiva

Tecnica risolutiva

- Studio esistenza ed unicità locale "$\exists!$"
- Cerco soluzioni stazionarie, ossia soluz. t.c. $g(y) = 0$ da cui $y(t) \equiv y$ è soluz. costante se $y(t_0) = y$ (ossia $y_0 = y$)
- Se $g(y) \neq 0$ divido (EQ) per $g(y)$ e procedo in uno dei due modi:

$$\int \frac{y'}{g(y)}\, dt = \int h(t)\, dt \quad / \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)\, dt$$

Trovo una soluzione a meno di una costante e la trovo imponendo $y(t_0) = y_0$

Condizione sufficiente alla prolungabilità

Avendo $\exists!$ locale è difficile a priori stabilire l'intervallo massimale di esistenza di una soluzione di equazione differenziale

Teor: Sia $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C^0((a,b) \times \mathbb{R})$ e supponiamo che $\exists\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$$|f(t,y)| \leq k_1 + k_2|y| \qquad \forall (t,y) \in [(a,b) \times \mathbb{R}]$$

Allora $\forall (t_0, y_0) \in [(a,b) \times \mathbb{R}]$, l'unica soluzione del (PC) è prolungabile su tutto (a,b)

Equazioni lineari del 1° ordine

Sono equazioni del tipo $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \odot$, consideriamo ora:

Corollario: Siano $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e a, b funzioni $\in C^0$ nell'intorno di t_0 allora $\odot$ ammette una unica soluzione (locale)

Tecnica risolutiva

- Metodo 1 - Derivata prodotto

Sia $A(t) = \int a(t)\, dt$ una primitiva di $a(t)$ e $y' - a(t)y = b(t)$, moltiplicando per "$e^{-A(t)}$" si ottiene la derivata del prodotto sulla sinistra

$$y'e^{-A(t)} - a(t)e^{-A(t)}y = b(t)e^{-A(t)} \xrightarrow[\text{(integro)}]{\int \ldots} y(t) = e^{A(t)}\left[\int b(\tau)e^{-A(\tau)}\, d\tau + c\right]$$

Metodo 2 - Sovrapposizione effetti e variaz. costanti

1) Risolvo l'equazione omogenea associata:

$$y'_{om} - a(t)\, y_{om} = 0 \longrightarrow y'_{om} = a(t)\, y_{om}$$

Chiedere quando $y_{om} = 0$ e poi quando $y_{om} \neq 0$ quindi passiamo a

$$\frac{y'_{om}}{y_{om}} = a(t) \xrightarrow[\text{(integro)}]{\int \dots} \ln\left(|y_{om}(t)|\right) = A(t) + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

proseguo con $|y_{om}(t)| = e^{A(t)} \cdot \underbrace{e^{C}}_{k} = k\, e^{A(t)}$ con $k > 0$ e

pertanto $y_{om}(t) = k\, e^{A(t)}$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

Facciamo finta di avere due soluzioni dell'equazione di partenza

$\begin{cases} y'_1 = a(t) y_1 + b(t) \\ y'_2 = a(t) y_2 + b(t) \end{cases}$ e le sottraggo $\longrightarrow (y_1 - y_2)' = a(t) \cdot (y_1 - y_2)$ e

chiamo $\bar{y} = y_1 - y_2$ t.c. risolve con $\bar{y}' = a(t)\bar{y}$

e come vediamo risolve l'OMOGENEA associata poiché simile $y'_{om} = a(t)\, y_{om}$

Quindi tornando alla prima parte avremo $y_1 - y_2 = y_{om} \longrightarrow y_1 = y_2 + k e^{A(t)}$

Ora però dobbiamo trovare $y_2(t)$ sapendo che è soluzione particolare del problema. Poniamo $y_2 = k(t)\, e^{A(t)}$ facendo variare la costante e troviamola partendo da $y'_2 - a(t)\, y_2 = b(t) \longrightarrow y'_2 = k'(t)\, e^{A(t)} + k(t) a(t) e^{A(t)}$

e sostituendo otteniamo $k'(t) = b(t)\, e^{-A(t)} \xrightarrow[\text{(integro)}]{\int \dots} k(t) = \int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt$

e concludo con $y_2(t) = \left(\int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt \right) e^{A(t)}$.

Risostituendo si ottiene la stessa precedente: $y_1(t) = e^{A(t)} \left[\int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt \right] + k e^{A(t)}$

EQUAZIONE DI BERNOULLI

Sono equazioni del tipo $\begin{cases} y' = a(t)\, y + b(t)\, y^{\alpha} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ tranne nei casi dove $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$ perché ci riallacciamo a casistiche già note.

Se $\alpha < 0$ deve essere $y \neq 0$ mentre se α irrazionale o razionale con denominatore pari allora deve essere $y \geq 0$ (es. $\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{y}$)

COROLLARIO: Sia $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \geq 0$ e $a, b \in C^0$ nell'intorno allora la precedente ammette una unica soluzione (locale) nei seguenti casi:

- se $\alpha > 1$ quando $y_0 \geq 0$, se $0 < \alpha < 1$ quando $y_0 > 0$ e se $\alpha < 0$ quando $y_0 > 0$

TECNICA RISOLUTIVA

Posso dividere l'equazione per y^{α}: $y^{-\alpha} y' = a(t)\, y^{1-\alpha} + b(t)$ e pongo $z(t) = y^{1-\alpha}(t)$ t.c. $z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} y'$ quindi $y^{-\alpha} y' = \frac{z'}{1-\alpha}$ dove il tutto diventerà, dopo un ulteriore passaggio, $z' = a(t)(1-\alpha) z + b(t)(1-\alpha)$

SERIE NUMERICHE

DEF: Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali e chiamiamo SERIE di a_n

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

e ciò è il limite della successione $\{S_K\}$ definita da

$$S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n \quad , \quad \text{ossia} \quad \lim_{K\to\infty} S_K = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Se tale limite $\exists$ finito viene detto somma della SERIE mentre $\{S_K\}$ è detto somma parziale della serie ($K \in \mathbb{N}$, finito)

DEF: Diremo che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, divergente e indeterminata se la successione S_K è conv., div., indet.

Es (!): consideriamo $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e osserviamo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = 1+1+1+1\dots = \lim_{K\to+\infty} S_K = \lim_{K\to+\infty} K+1 = +\infty \quad \text{diverge}$$

poiché avremo $S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n = 1+1+1+1\dots = K+1$

Es (!): se invece $a_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ si avrà $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \dots = 1-1+1-1\dots$ che risulta essere indeterminata

SUCCESSIONE E SERIE GEOMETRICA

Partiamo da $a_n = q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e avremo $\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q|<1 \\ 1 & q=1 \\ +\infty & q>1 \\ \nexists & q\le -1 \end{cases}$,

per la nostra serie avremo $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$

e quanto darà il $\lim_{K\to+\infty} \sum_{n=0}^{K} q^n = ?$ Troviamo i vari casi di studio

- $q=1$: $\lim_{K\to+\infty} \sum_{n=0}^{K} 1^n = +\infty$ e diverge

- $q \neq 1$: Trovo $S_K = \sum_{n=0}^{K} q^n = 1+q+q^2+q^3\dots$ e $qS_K = \dots = q+q^2+q^3\dots$ quindi calcolo $S_K - qS_K = 1-q^{K+1}$ t.c. $S_K = \dfrac{1-q^{K+1}}{1-q}$ e perciò

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{K\to+\infty} S_K = \lim_{K\to+\infty} \frac{1-q^{K+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q|<1 & \text{converge} \\ +\infty & q\ge 1 & \text{diverge} \\ \nexists & q\le -1 & \text{indeterminata} \end{cases}$$

Serie telescopica

È tale che $a_n = b_n - b_{n+1}$ e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è TELESCOPICA e inoltre $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} a_k = b_0 - \lim_{k\to+\infty} b_k$ (es. serie di Mengoli)

Trattiamo ora la condizione necessaria (CN) alla convergenza di serie

Teor: La (CN) affinché una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converga è che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Serie armonica

La serie parte da $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e studiamo la (CN) precedente notando che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ quindi, da ciò, si deduce che È POSSIBILE MA NON È DETTO che converga.

Questa serie è nota perché diverge a $+\infty$ (usando la telescopica)

Inoltre si può dimostrare che $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \log k + \gamma + O(1)$ con $\gamma = 0{,}57721$ detta costante di Eulero-Mascheroni

Criteri per serie a termini non negativi

Def: La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice a termini non negativi se $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 0$ mentre si dice che la serie è a termini DEFINITIVAMENTE non negativi se $a_n \geq 0 \ \forall n \geq N$ con $N \in \mathbb{N}$.

Elenchiamo i criteri risolutivi:

- Criterio del confronto: Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni t.c. $a_n \geq b_n \geq 0$ definitivamente $(\forall n \geq N)$ allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$$

- Criterio del confronto asintotico: Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini definitivamente non negativi tali che $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$$

- Criterio del rapporto: Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini definitivamente non negativi, se esiste

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$$

allora avremo che

$$0 \le l \le 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \quad \text{converge}$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \quad \text{diverge}$$

- Criterio della radice: Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini definitivamente non negativi, se esiste

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$$

allora avremo che

$$0 \le l \le 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \quad \text{converge}$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \quad \text{diverge}$$

SERIE A TERMINI DI SEGNO NON DEFINITO

DEF: Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

TEOR: Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge

DIM: $0 \le \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ per teorema del confronto

Serie a termini di segno alterno

- **Criterio di Leibniz**: Sia data $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ con le seguenti ipotesi:

$$\begin{cases} a_n \geq 0 \quad \forall n \\ \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \\ a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \end{cases} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad \text{converge}$$

Inoltre possiamo dire che:

- la successione delle somme parziali pari $\{S_{2k}\}$ fornisce una stima per eccesso
- la successione delle somme parziali dispari $\{S_{2k+1}\}$ fornisce una stima per difetto
- detta $\bar{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ e $S_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$ possiamo dire

$$|\text{errore}| = |\bar{S} - S_k| \leq a_{k+1}$$

Oss (!): In generale basta chiedere le ipotesi $\forall n \geq N$ (definitivamente)

Schema risolutivo

1. Verifico la condizione necessaria (CN)
   - se non è verificata diverge o è indeterminata
   - se è verificata procedo coi seguenti

2. Controllo i termini della serie:
   - se positivi possiamo utilizzare i 4 criteri
   - se non definiti controllo la convergenza assoluta con $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ e nel caso converga l'esercizio è finito altrimenti provo a verificare il criterio di Leibniz

Le serie notevoli saranno invece

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \ \forall \beta \ ; \ \text{se } \alpha = 1 \text{ per } \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha < 1 \ \forall \beta \ ; \ \text{se } \alpha = 1 \text{ per } \beta \leq 1 \end{cases}$$

Integrali impropri

DEF: Supponiamo che $f \in C^0(a,b]$, $a > -\infty$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$. Se $\exists$ il limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx = I$$

esso è l'integrale IMPROPRIO di f su (a,b). Se I esiste ed é finito diremo che $\int_a^b f(x)\, dx$ CONVERGE

Se invece abbiamo $f \in C^0[a,+\infty)$, $a > -\infty$ $\odot$ vale $f \in \mathbb{R}[a,b]$, $b < +\infty$

DEF: Supponiamo valga $\odot$. Se $\exists$ il limite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx = I$$

esso è l'integrale improprio di f su $(a,+\infty)$ e se esiste I finito diremo che $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ CONVERGE

Concetto: I_α CONVERGE $\iff$ $\alpha > 1$

$$I_\alpha = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \text{diverge} & \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Oss (!): Se vale $\odot$, $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty$ allora $l = 0$

Gli integrali impropri notevoli sono:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \alpha \leq 1 \end{cases} \quad ; \quad \int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \text{converge} & \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Criteri per integrali impropri

Valgono per funzioni positive

- *Criterio del confronto:* Sia I intervallo (anche illimitato) $f, g \in C^0(I)$ con $f(x) \geq g(x) \geq 0$ $\forall x \in I$. Allora se

$$\int_I g(x)\, dx = +\infty \implies \int_I f(x)\, dx = +\infty$$

$$\int_I f(x)\, dx < +\infty \implies \int_I g(x)\, dx < +\infty$$

. Criterio dell'asintotico: Sia $(a, b]$ intervallo, $a \geq -\infty$, $f, g \in C^0(a, b]$, $f(x), g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$. Se $f \sim g$ per $x \to a^+$ allora

$$\int_a^b f(x)\, dx < +\infty \iff \int_a^b g(x)\, dx < +\infty$$

Se ho una funzione che oscilla come $\int_0^1 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\, dx$ posso dire sempre che CONVERGE $(< +\infty)$

SERIE DI FUNZIONI

DEF: Sia $I \subset \mathbb{R}$ e $f_n : I \to \mathbb{R}$ per $n = 1, 2, 3 \dots$ e $\forall x \in I$ posso considerare la successione $\{ f_n(x) \}_{n=1}^{+\infty}$ e la SERIE DI FUNZIONI

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

che per ciascun $x \in I$ può convergere, divergere, essere indeterminata.

Se la serie di funzioni converge $\forall x \in I^* \subseteq I$ la somma della serie sarà una funzione definita su I^*.
Si dirà che la serie CONVERGE PUNTUALMENTE in I^*

Es (!): osserviamo la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{x^n}_{f_n(x)} = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{f(x)} \qquad \text{con } x \in (-1, 1) = I^*$$

Trovato l'insieme di convergenza puntuale la somma della serie sarà

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \qquad \forall x \in I^*$$

DEF: Diremo che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge UNIFORMEMENTE a $f(x)$ su I se

$$\lim_{k \to +\infty} \sup_{x \in I} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| = 0$$

Oss (!): La convergenza uniforme implica quella puntuale ma non viceversa

DEF: Diremo che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge TOTALMENTE in I se $\exists$ $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ di reali positivi t.c.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \ |f_n(x)| \leq a_n \qquad \forall x \in I, \ n \in \mathbb{N} \\ \cdot \ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \end{array}\right\} \text{criterio di Weierstrass}$$

Oss (!): La convergenza Totale implica le due precedenti ma non viceversa

DEF (SERIE DI POTENZE): Sia $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ successione di numeri complessi, $z_0 \in \mathbb{C}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \odot$$

si dice serie di potenze centrata in z_0.

Introduciamo il RAGGIO DI CONVERGENZA: se $\exists \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ allora:

- se $|z - z_0| < R$ la serie $\odot$ converge (assolutamente)
- se $|z - z_0| > R$ la serie $\odot$ <u>non</u> converge

Oss (!): Se $|z - z_0| = R$ non posso concludere nulla dal Teorema ma devo studiare tutto caso per caso.

Oss (!): Se:
- $R = +\infty$ il disco coincide con $\mathbb{C}$
- $R = 0$ il disco degenera nel punto z_0
- $R \in (0, +\infty)$ si ha il vero e proprio disco di raggio R

Una proposizione alternativa potrebbe essere che se $\exists$ il seguente limite allora valgono le precedenti conseguenza

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

TEOR: Innanzitutto mi metto con $x_0 = 0$. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tali che la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge $\forall x$, $|x| < R$, $R > 0$. Allora la serie ottenuta DERIVANDO e INTEGRANDO termine a termine

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

sono la derivata e una primitiva di f. Inoltre hanno raggio di convergenza pari a R

COROLLARIO: La serie iniziale converge PUNTUALMENTE $\forall x \in (-R, R)$ e non converge per $x < -R \vee x > R$ mentre convergerà UNIFORMEMENTE $\forall x \in [-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, R)$

CRITERIO DI ABEL

Consideriamo sempre la serie iniziale, se questa:

- converge in $x = R \Rightarrow$ conv. uniformemente $\forall x \in [-R+\varepsilon, R]$
- converge in $x = -R \Rightarrow$ conv. uniformemente $\forall x \in [-R, R-\varepsilon]$
- converge in $x = \pm R \Rightarrow$ conv. uniformemente $\forall x \in [-R, R]$

TEOR: se la serie iniziale converge uniformemente a $f(x)$ su $[c,d]$ allora

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_c^d x^n\,dx$$

DEF (SERIE DI TAYLOR): Sono i limiti dei polinomi di Taylor. Data $f \in C^\infty$ in un intorno di x_0 posso scrivere finalmente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Introduciamo ora le serie di Fourier:

DEF (POLINOMI TRIGONOMETRICI): Si dice polinomio trigonometrico di grado k il seguente

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx), \qquad a_n, b_n \neq 0$$

con a_n, b_n coefficienti reali opportuni

Oss (!): Sono funzioni periodiche di periodo 2π (o anche sottomultipli)

DEF (SERIE TRIGONOMETRICA): Si dice serie trigonometrica una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \qquad \odot$$

dove la successione delle somme parziali è il polinomio trigonometrico

CRITERIO DI DIRICHLET

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni con le seguenti caratteristiche:

- non negative (≥ 0)
- infinitesime $(a_n \to 0,\ b_n \to 0)$
- decrescenti

allora $\odot$ CONVERGE $\forall x \in \mathbb{R}$ eccetto in $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

TEOR (WEIERSTRASS - STONE): Data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$ allora $\exists$ successione $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ di polinomi che conv. uniformemente a f.

DEF (FUNZIONE PERIODICA): Una funzione si dice periodica di un periodo $T>0$ se $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in$ Dominio di f.

LEMMA

Per ogni $n, m = 1, 2, 3, \dots$ risulta

- $\int_0^{2\pi} \text{sen}(nx)\, dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx = 0$
- $\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(nx)\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\, dx = \pi$
- $\int_0^{2\pi} \text{sen}(mx)\cos(nx)\, dx = 0 \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$
- $\int_0^{2\pi} \text{sen}(mx)\,\text{sen}(nx)\, dx = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, dx = 0 \quad \text{se} \quad m \neq n$

Oss (!): $g(x+T) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^T g(x)\, dx = \int_a^{a+T} g(x)\, dx$

Ora considero una funzione e ci associo una serie di Fourier, poi il teorema

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \,\text{sen}(nx) \qquad \odot$$

TEOR: Se f è 2π periodica e si può scrivere come sopra, allora

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \text{sen}(nx)\, dx$$

dove a_n, b_n sono i coefficienti di Fourier e $\odot$ è la serie associata

NOTA BENE: Per associare una serie di Fourier, $f(x)$ deve avere un minimo di regolarità: il seguente prodotto deve essere integrabile

$$f \cdot \begin{cases} \text{sen}(nx) \\ \cos(nx) \end{cases}$$

Quando posso mettere l' "=" al posto del "~" in $\odot$?

DEF (CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA): Diremo che $\odot$ converge in media quadratica a $f(x)$ se

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \,\text{sen}(nx) \right|^2 dx = 0$$

Per verificare ciò abbiamo bisogno del seguente

TEOR: Sia f 2π periodica, se $\int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx < +\infty$ allora la sua serie di Fourier ⊙ converge in media quadratica

TEOR (IDENTITÀ DI PARSEVAL): Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π periodica, integrabile sul periodo, allora

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$$

Da tale identità ne deriva un...

COROLLARIO (RIEMANN - LEBESGUE): Con le stesse premesse precedenti, si ha

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx = 0 \end{array}\right\} \equiv \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \pi a_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \pi b_n = 0 \end{array}\right.$$

NOTE SU CONVERGENZA

- Conv. totale è la "più forte" e $\Rightarrow$ conv. in media quadratica
- Conv. uniforme $\Rightarrow$ conv. in media quadratica
- Conv. totale $\Rightarrow$ uniforme $\Rightarrow$ puntuale
- Conv. in media quadratica $\Rightarrow$ conv. puntuale in QUASI TUTTI i punti come ad esempio le discontinuità "non lette" dall'integrale (punti eliminabili...)

DEF (FUNZIONE REGOLARE A TRATTI): Sia $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, è regolare a tratti se

- è limitata su $[0, 2\pi]$
- $[0, 2\pi]$ si può suddividere in un numero finito di sottointervalli dove su ciascuno di essi f è $\begin{cases} \text{CONTINUA} \\ \text{DERIVABILE} \end{cases}$ e agli estremi dei sottointervalli $\exists$ finiti i limiti di f e f'

Quindi su $[0, 2\pi]$ sono ammessi punti di salto, di discontinuità eliminabile e punti angolosi.

Oss (!): se f è regolare a tratti $\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx < +\infty$

NOTAZIONE: Dato $x_0 \in [0,2\pi]$ con i determinati limiti

$$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad , \quad f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x_0)$$

per la periodicità si avrà che $f(0^\pm) = f(2\pi^\pm)$

Oss (!): Se $f(x)$ CONTINUA in $x_0 \Rightarrow f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$

TEOR: Sia $f: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, regolare a tratti. Allora la sua serie di Fourier converge in $x_0 \in [0,2\pi]$ alla media dei limiti $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$ e quindi

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx_0) + b_n \operatorname{sen}(nx_0)$$

Tuttavia, con le premesse e osservazioni precedenti, i due limiti sono entrambi uguali a $f(x_0)$ e pertanto la serie di Fourier convergerà proprio a questo valore

FUNZIONI PARI E DISPARI: Sull'intervallo di periodicità:

Se f è PARI su $[0,2\pi]$

- $f(x) \cdot \cos(nx)$: pari $\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$
- $f(x) \cdot \operatorname{sen}(nx)$: dispari $\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\,dx = 0$

Se f è DISPARI su $[0,2\pi]$

- $f(x) \cdot \cos(nx)$: dispari $\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\,dx = 0$
- $f(x) \cdot \operatorname{sen}(nx)$: pari $\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\,dx$

FUNZIONI PERIODICHE $T \neq 2\pi$, $T > 0$

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periodica, si può associare una serie di Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)$$

con $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$ e con $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$

Oss (!): Si estendono tutte le proprietà viste fino ad ora anche a queste

INTEGRALI DOPPI

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ limitata, se $f \geq 0$ l'integrale volumetrico del solido che si proietta su Ω di "base" Ω e "altezza" $f(x,y)$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \quad \odot$$

DEF: Diremo che f è *integrabile* su $\Omega = (a,b) \times (c,d)$ se vale "$\inf_n \bar{S}_n = \sup_n \underline{S}_n$" e tale valore lo chiamiamo $\odot$

DEF: Chiamiamo $R(\Omega)$ lo spazio delle funzioni Riemann integrabili su Ω

Posso estendere l'integrabilità a funzioni con punti di salto e punti di discontinuità eliminabili

PROPRIETÀ

- ADDITIVITÀ: $\iint_\Omega f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f$, $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ aperti, disgiunti
- LINEARITÀ: $\iint_\Omega c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1 \iint_\Omega f_1 + c_2 \iint_\Omega f_2 \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- CONFRONTO: se $f \leq g$ su $\Omega \Rightarrow \iint_\Omega f \leq \iint_\Omega g$
- $\left| \iint_\Omega f \right| \leq \iint_\Omega |f|$

Poco cambia tra domini Ω aperti e $\bar{\Omega}$ chiusi

DEF: Siano $a < b$, se $\exists\, g, h \in C^0([a,b])$ t.c. $g \leq h$ su $[a,b]$ allora la regione piana

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

è detta *semplice rispetto a y*. Analogamente:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b,\ g(x) \leq x \leq h(x)\}$$

è detta *semplice rispetto a x*.

DEF: Una regione piana Ω si dice REGOLARE se si può scomporre in un'unione finita di regioni semplici (rispetto a "x" o a "y")

FORMULA RIDUZIONE INTEGRALI DOPPI

Siano $a < b$, $g, h \in C^0([a,b])$ t.c. $g \leq h$ in $[a,b]$, se $f \in R(\Omega)$ allora

- Ω semplice rispetto a "y"

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- Ω semplice rispetto a "x"

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

CAMBIAMENTO VARIABILE INTEGRALE DOPPIO

Consideriamo la trasformazione $\Phi : \Omega \to T$ t.c. $(u,v) = \Phi(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$, con $(u,v) \in T$. Inoltre Φ deve essere invertibile quindi

$$\Phi : \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} ; \quad \Phi^{-1} : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

DEF: Sia $\Phi : \Omega \to T$ una trasformazione piana con proprie componenti e $\Phi \in C^1$. Si chiamerà matrice Jacobiana

$$J(u,v) = J(u(x,y), v(x,y)) = \begin{bmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{bmatrix}$$

se il determinante $\det J(u,v) \neq 0$ $\forall (x,y) \in \Omega \Rightarrow \Phi$ è localmente invertibile.
Chiedo che Φ sia globalmente invertibile tale che valga la precedente. In tal caso si può dimostrare che Φ^{-1} è ben definita (con componenti di classe C^1)

$$J(x,y) = J(x(u,v), y(u,v)) = \begin{bmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{bmatrix}$$

Quindi $\det J(x,y) \neq 0$ $\forall (u,v) \in T$

TEOR (CAMBIO VARIABILE INTEGRALE DOPPIO): Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aperto, limitato, regolare, $\Phi : \Omega \to T$ trasformazione piana invertibile di classe C^1 detta Φ^{-1} la sua inversa. Se vale ⊙ ⇒ vale ⊙⊙. Sia $f \in R(\Omega)$ allora

$$\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy = \iint_T f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\det J(x,y)|\, dx\, dy$$

INTEGRALI TRIPLI

Si procede in analogia con integrali doppi, $\Omega \in \mathbb{R}^3$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

. Integrazione per fili: $\Omega \in \mathbb{R}^3$ semplice rispetto a "z", ossia $\exists\, D \in \mathbb{R}^2$, $g, h \in C^0(\bar{D})$ t.c. $g \leq h$ in D e

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$$

Se $f \in R(\Omega)$, e così analogamente a "x" e "y", si dà precedenza a "z"

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy$$

. Integrazione per strati: $\Omega \in \mathbb{R}^3$ semplice rispetto a (x,y) e cioè $\exists\, a < b$ t.c.

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b,\ (x,y) \in D_z\ \forall z \in [a,b]\}$$

Sia $f \in R(\Omega)$ allora si ha

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\, dx\, dy \right) dz$$

CAMPI VETTORIALI

Un campo vettoriale sarà fatto da componenti di campi scalari, ovvero

$$\underline{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \to (F_1(\dots), F_2(\dots), \dots, F_m(\dots))$$

dove, questi ultimi, vanno per $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. In generale avremo che

- $n = 1$, $m \geq 2$ CURVE
- $n \geq 2$, $m = 1$ CAMPI SCALARI
- $n \geq 2$, $m \geq 2$ CAMPI VETTORIALI

DEF: Sia $\Omega \in \mathbb{R}^3$, aperto e connesso, con $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ allora chiamiamo linea di campo una generica curva regolare che in ogni punto del suo sostegno sia tangente a $\underline{F}$

DEF (OPERATORE ROTORE): Dato $\underline{F} : \Omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale dove $\underline{F} \in C^1(\Omega)$. Si definisce ROTORE DI $\underline{F}$ il vettore

$$\operatorname{rot}(\underline{F}) = \nabla \times \underline{F} = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

dove $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ e $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$; inoltre il determinante si può scrivere

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Il rotore si definisce o nello spazio o nel piano

DEF: Se $\nabla \times \underline{F} = 0$ il campo si dice irrotazionale

Oss (!): Il rotore è un vettore perpendicolare "$\perp$" al piano che localmente contiene il campo. Calcolato in un punto allora misurerà "quanto ruota" il campo attorno al punto in questione

DEF (OPERATORE DIVERGENZA): Sia $\underline{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale e $\underline{F} \in C^1(\Omega)$. Si definisce DIVERGENZA DI $\underline{F}$ lo scalare

$$\text{div } \underline{F} = \nabla \cdot \underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

DEF: Se $\nabla \cdot \underline{F} = 0$ il campo si dice solenoidale

Proviamo a combinare un pò di operazioni studiate nella seguente

PROPOSIZIONE: Siano u campo scalare e $\underline{F}$ campo vettoriale, quest'ultimo in tre dimensioni, entrambi $\in C^2(\Omega)$. Valgono le seguenti:

1. rot (gradiente di u) $= \nabla \times (\nabla u) = \underline{0} \to$ (vettore)
2. div (rotore di $\underline{F}$) $= \nabla \cdot (\nabla \times \underline{F}) = 0 \to$ (scalare)
3. div (gradiente di u) = Laplaciano di u $= \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

La dimostrazione della prima coinvolge ad esempio il Teorema di Schwarz.

INTEGRALI CURVILINEI DI 2^a SPECIE

Ad esempio per un campo di forze ne trova il lavoro

DEF (LAVORO DI UN CAMPO VETTORIALE): Sia γ il sostegno di una curva regolare a tratti, parametrizzata da $\underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. A questo punto sia $\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale, $\underline{F} \in C^0(A)$ t.c. $\underline{r}([a,b]) \subseteq A$ e si dice lavoro di $\underline{F}$ lungo γ o integrale curvilineo di 2^a specie di $\underline{F}$ estesa a γ la seguente

$$\int_\gamma \underline{F} \, d\underline{r} = \int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) \, dt$$

OSS (!): si nota l'analogia con quelli di prima specie ma il VERSO DI PERCORRENZA influisce solo sull'integrale di 2^a specie

NOTAZIONE: Se γ è una curva chiusa allora chiameremo il seguente integrale CIRCUITAZIONE DI $\underline{F}$ su γ

$$\oint_\gamma \underline{F}\, d\underline{r}$$

DEF (CAMPO CONSERVATIVO): Dato $\underline{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice conservativo su A se $F \in C^1(A)$ e $\exists$ una funzione $U: A \to \mathbb{R}$, detto POTENZIALE di $\underline{F}$ tale che

$$\nabla u = \underline{F} \iff \begin{cases} U_x = F_1 \\ U_y = F_2 \\ U_z = F_3 \end{cases}$$

LEMMA: Sia $\underline{F}$ conservativo in A, γ una curva regolare a tratti parametrizzata $\underline{r}(t): [a,b] \to A$ e $t \in [a,b]$. Il lavoro lungo γ è

$$\mathcal{L} = \int_\gamma \underline{F}\, d\underline{r} = U(\underline{r}(b)) - U(\underline{r}(a))$$

TEOR: Sia $\underline{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, A aperto e connesso, $\underline{F} \in C^1(A)$ allora $\underline{F}$ è CONSERVATIVO in A se e solo se vale una delle seguenti condizioni tutte equivalenti tra loro:

i) il lavoro di $\underline{F}$ lungo una curva γ, regolare a tratti, $\gamma \in A$ è

$$\mathcal{L} = \int_\gamma \underline{F}\, d\underline{r} = U(\underline{r}(b)) - U(\underline{r}(a))$$

ii) il lavoro di $\underline{F}$ lungo il sostegno orientato, con estremi coincidenti, di qualunque coppia di curve regolari a tratti $\gamma_1, \gamma_2 \subset A$ è uguale

$$\mathcal{L} = \int_{\gamma_1} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F}\, d\underline{r} \qquad (\gamma_{1,i} = \gamma_{2,i}\ ;\ \gamma_{1,f} = \gamma_{2,f})$$

iii) il lavoro di $\underline{F}$ lungo una qualsiasi curva CHIUSA, regolare a tratti, $\gamma \subset A$ è nullo e

$$\mathcal{L} = \oint_\gamma \underline{F}\, d\underline{r}$$

OSS (!): se una curva CHIUSA γ ha $\oint_\gamma \underline{F}\, d\underline{r} \neq 0 \Rightarrow \underline{F}$ NON è CONSERVATIVO

LEGAMI CAMPI CONSERVATIVI - ROTORE

PROPOSIZIONE: Sia $\underline{F} \in C^1(A)$, se $\underline{F}$ è CONSERVATIVO in A

$\Rightarrow$ $\underline{F}$ è IRROTAZIONALE in A, $rot(\underline{F}) = \nabla \times \underline{F} = 0 \quad \forall \underline{x} \in A$

Oss (!): Se $\nabla \times \underline{F} \neq 0$ in $A \Rightarrow \underline{F}$ non è conservativo in A

DEF (DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO): Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se:

- è connesso
- ogni linea chiusa $\gamma \subset A$ è contraibile in A ad un punto di A

TEOR: Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ insieme semplicemente connesso, sia $\underline{F} \in C^1(A)$ allora

$$\underline{F} \text{ conservativo in } A \Leftrightarrow \underline{F} \text{ irrotazionale in } A$$

Oss (!): Sia $rot(F) = \nabla \times \underline{F} = \underline{0}$ in un qualunque dominio di A e $B_r(\underline{x}^0) \subset A$ intorno sferico di $\underline{x}^0 \in A$ semplicemente connesso allora il Teorema precedente vale nell'intorno e $\underline{F}$ è localmente conservativo implicando che $\exists\, U : B_r(\underline{x}^0) \to \mathbb{R}$ t.c. $\nabla u = \underline{F}$ in $B_r(\underline{x}^0)$

SCHEMA RISOLUTIVO

1. Controllo se $\underline{F}$ irrotazionale su A
   - se non lo è $\Rightarrow \underline{F}$ non conservativo in A e per il lavoro uso integrali curv. 2° specie
   - se lo è studio il dominio e se semplicemente connesso allora $\underline{F}$ conservativo altrimenti non posso dire nulla se non cercare $U : A \to \mathbb{R}$ t.c. $\nabla u = \underline{F}$
2. Se $\underline{F}$ conservativo in A calcolo $\mathcal{L} = U(\underline{r}(b)) - U(\underline{r}(a))$

FORME DIFFERENZIALI LINEARI $(\mathbb{R}^3)$

- $\underline{F} \cdot d\underline{r} = F_1 \cdot dx + F_2 \cdot dy + F_3 \cdot dz$
- se $\underline{F}$ conservativo $\Rightarrow \underline{F} \cdot d\underline{r} = U_x \cdot dx + U_y \cdot dy + U_z \cdot dz$: forma differ. ESATTA
- se $\underline{F}$ irrotazionale $\Rightarrow \underline{F} \cdot d\underline{r} = F_1 \cdot dx + F_2 \cdot dy + F_3 \cdot dz$: forma differ. CHIUSA

Oss (!): Ogni forma differ. ESATTA è CHIUSA. Viceversa $\Leftrightarrow$ dominio semplicemente connesso

FORMULE DI GAUSS - GREEN NEL PIANO

C'è una relazione tra integrale doppio e integrale curvilineo su $\partial\Omega$?

DEF (ORIENTAZIONE FRONTIERA): Diremo che $\partial\Omega$ è orientata positivamente se muovendosi lungo $\partial\Omega$ l'insieme Ω rimane sulla sinistra con

- $\partial\Omega^+$ orientata positivamente
- $\partial\Omega^-$ orientata negativamente

TEOR (GREEN): Sia $\partial\Omega$ curva chiusa, regolare a tratti, orientata positivamente in $\mathbb{R}^2$ e sia Ω la regione interna a $\partial\Omega$ regolare. Sia inoltre $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\underline{F} \in C^1(A)$, A aperto, contenente Ω e $\partial\Omega$ allora

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \oint_{\partial\Omega^+} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

SUPERFICI IN FORMA PARAMETRICA

Consideriamo campi vettoriali $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\Omega \in \mathbb{R}^2$, aperto, e consideriamo poi una superficie $\Sigma : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dove $(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ t.c. potremo scrivere in due modi

$$\Sigma : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad \vee \quad \Sigma : \underline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \qquad (u,v) \in \Omega$$

DEF: Σ si dice **semplice** se è iniettiva da Ω a $\Sigma(\Omega)$ e si dice **chiusa** se $\Sigma(\bar{\Omega})$ separa lo spazio $\mathbb{R}^3$ in regioni sconnesse, ovvero che per passare dall'una all'altra con continuità devo intersecare $\partial\Sigma$

DEF: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{r}(u,v) \in C^1(\Omega)$ superficie in forma parametrica, diremo che Σ è **regolare** $\underline{r}_u \times \underline{r}_v \neq \underline{0}$ $\forall (u,v) \in \Omega$. Se questi sono linearmente indipendenti definiscono un piano tangente in $\underline{r}(u,v)$

DEF (NORMALE): è il vettore $\perp$ al piano tangente di una superficie di cui il versore è

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|}$$

DEF (INTEGRALE DI SUPERFICIE DI 1ª SPECIE): Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $\Sigma : \underline{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $(u,v) \in \Omega$, superficie regolare e sia $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ continua. Si dice integrale di superficie di f su Σ

$$\iint_\Sigma f \cdot dS = \iint f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| \, du\,dv$$

Se Σ è una superficie cartesiana con $z = g(x,y)$ e

$$\iint_\Sigma f \cdot dS = \iint_\Omega f(x,y,g(x,y)) \cdot \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, dx\,dy$$

SUPERFICI ORIENTATE

DEF: Una superficie regolare Σ si dice orientabile se è possibile definire in ogni suo punto un versore normale che varia con continuità sulla superficie, ossia tale che $\forall$ linea chiusa continua contenuta in Σ i punti iniziali e finali abbiano stesso versore normale

OSS (!): Il nastro di MÖBIUS non è orientabile

Se la superficie è chiusa ha senso parlare di versore esterno e interno mentre se non è chiusa va definito il bordo $\partial\Sigma$

DEF (INTEGRALI DI SUPERFICIE DI 2ª SPECIE): Sia Σ superficie regolare, a chiusura semplice, iniettiva da $\bar{\Omega} \to \Sigma(\bar{\Omega})$, $\Sigma : \underline{r}(u,v)$ $(u,v) \in \Omega$ orientata dal VERSORE NORMALE $\underline{n}$. Sia $\underline{F}$ un campo vettoriale e $\underline{F} \in C^1$ in un intorno di Σ e il flusso di $\underline{F}$ attraverso Σ o l'integrale di superficie di $\underline{F}$ attraverso Σ è

$$\Phi = \iint_\Sigma f \cdot \underline{n} \cdot dS = \iint_\Omega f(\underline{r}(u,v)) \cdot \underline{r}_u \times \underline{r}_v \, du\,dv$$

TEOR (STOKES O DEL ROTORE): Sia Σ una superficie regolare, orientata, con versore normale $\underline{n}$ e con bordo $\partial\Sigma^+$ orientato positivamente. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un intorno aperto di Σ e sia che $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ campo vettoriale, allora

$$\iint_\Sigma (\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{n} \, dS = \oint_{\partial\Sigma^+} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds$$

ovvero l'integrale di superficie del rotore del campo vettoriale rot$(\underline{F})$ è uguale alla circuitazione su $\partial\Sigma^+$ del campo vettoriale. Se ci mettiamo in $n = 2$ questa formula diventa il Teorema di Green e se invece Σ chiusa allora non avrà bordo quindi $\partial\Sigma^+ = \emptyset$ e perciò

$$\iint_\Sigma (\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{n} \, dS = 0$$

TEOR (DELLA DIVERGENZA): Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto, limitato, semplice rispetto ai tre assi, con versore normale $\underline{n}$ uscente in ogni punto del suo bordo $\partial\Omega$. Sia $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ campo vettoriale, allora

$$\iiint_\Omega (\nabla \cdot \underline{F}) \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS$$

questo teorema mette in relazione gli integrali tripli con gli integrali di superficie.